科学通报 2012 年 第 57 卷 第 12 期：1074 ~ 1080
论 文 www.scichina.com csb.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

基于粗差拟准检定的实时滤波

刘也[①], 余安喜[①], 朱炬波[②], 梁甸农[①]

① 国防科学技术大学电子科学与工程学院, 长沙 410073;
② 国防科学技术大学理学院, 长沙 410073
E-mail: liuye.cool2007@yahoo.com.cn

2011-12-22 收稿, 2012-01-19 接受
国家自然科学基金(61072115, 60901071)和中国空间技术研究院创新基金(2009-HT-GFKD)资助

摘要 基于卡尔曼滤波框架的实时滤波算法对测量粗差敏感, 需要开发合适的粗差检择算法. 将拟准观测思想与卡尔曼滤波框架相结合, 提出了拟准检定滤波算法, 并详细讨论了算法的扩展性和执行步骤. 建立了卡尔曼滤波的可靠性矩阵, 据此分析了算法的可靠性. 试验数据计算结果得到了与理论分析一致的结论. 拟准滤波将新息作为拟准算法的观测初选准则, 将拟准算法的复选观测作为滤波器测量, 简化了粗差检择过程, 且适当改造后, 可以涵盖常用的新息算法、抗差估计和原始拟准检定算法. 测量信息的选择性利用, 使得拟准滤波比新息算法和抗差估计有更高的检择精度和抗粗差转移能力. 状态预测模型的利用, 使得拟准滤波比原始拟准检定法所需拟准观测数量更少, 更加适合观测结构复杂或观测数量较少的系统. 这里的检择算法和可靠性分析方法可以用于指导实际系统的滤波器设计.

关键词
粗差
拟准检定
卡尔曼滤波
可靠性

测量粗差又称野值或异常值, 它存在多种定义, 普遍的观点是指数据集合中那些与大部分数据或变化趋势严重偏离且数量较少的成员[1,2]. 目前的实时滤波系统多是基于 Kalman 滤波框架[3], 如广泛使用的扩展 Kalman 滤波(the extended Kalman filter, EKF), 酉滤波(the unscented filter, UKF)等非线性滤波方法[4~6]. 此时, 若含粗差的数据参与滤波, 会严重歪曲系统状态估计结果, 甚至导致滤波发散, 因此, 必须采取有效的粗差检择或抑制措施[7].

粗差检择方法通常是依据测量信息的统计特性, 从测量新息或残差构造检验统计量, 进行假设检验, 由此对测量数据进行筛选或加权. 其关键是检择标准和检择阈值的选取, 以及对检择算法的评价.

检择标准由一定的预测手段获得, 根据信息利用不同可以分为单通道检择和多通道联合检择. 单通道检择方法利用同一测量通道不同时刻测量信息的时间相关性, 由历史数据预报当前时刻的测量值[2]或测量所需的典型特征[8,9]. 此类算法计算简单, 对系统通信性能要求不高, 但它仅利用了单个通道的历史测量数据, 算法的精度有限且无法应付成片野值[7]. 此外, 目标跟踪领域还有连续函数检择和差分检择方法等, 但它们对测量类型要求严格, 实时能力不高, 只在特定问题中有应用[2]. 多通道联合检择方法是利用多通道的冗余和互补特性, 由各通道联合滤波的系统状态或状态预报值反向解算各通道的测量值[7]. 根据反馈信息的不同, 该算法分为新息算法和残差算法两类. 前者不利用当前测量信息, 直接将滤波器的状态预测值作为检择标准, 其检择变量恰是 Kalman 滤波器的新息[10]. 后者在一步滤波后进行, 将滤波状态作为检择标准, 其检择变量是 Kalman 滤波器的残差[11]. 残差算法比新息算法利用了更多的测量信息, 但在复杂测量结构下, 这种信息的无差别利用, 容易因“杠杆观测”导致粗差转移和淹没现象[1].

英文版见: Liu Y, Yu A X, Zhu J B, et al. Real-time filter based on the quasi-accurate detection of gross errors. Chin Sci Bull, 2012, 57, doi: 10.1007/s11434-012-5092-4

检择阈值由检验统计量的置信区间获得. 通常是假设测量的某种特征或其滤波新息、残差服从某种典型分布, 进而构造性质较好的检验统计量[12]. 检择算法最初多为简单的 0-1 取舍, 但这种对测量的分类过于绝对化. 为此, Huber 等人[13]提出 M-估计理论. 由此逐步发展出著名的抗差滤波方法, 如杨元喜等的综合抗差滤波方法等[14]. 但目前还没有通用的抗差权值函数构造方法. Ting 等人[15]用 Gamma 分布描述测量权值, 并引入期望极大化算法实现权值的在线更新, 是权值自适应方法的一个有效尝试, 但算法的执行过程相对复杂.

为了充分利用测量信息和消除杠杆观测的影响, 欧吉坤[16]提出了直接以观测值真误差为研究对象的拟准检定法(QUAD). 该算法通过附加范数极小的条件来求解拟准观测真误差估值, 进而实现测量的取舍, 具有粗差定位准确、可靠的优点, 尤其能克服粗差转移和淹没等问题[17]. 原始的拟准检定是一种批处理的算法, 且拟准观测的选取依赖于先验信息, 文献[18]将拟准检定法应用于 Kalman 滤波算法, 滤波器性能改善明显. 但它仅是用在预处理阶段, 没有利用滤波器的状态模型, 而且初始拟准观测的选取需要设备测量状况的先验信息, 或者利用最小二乘算法对应的残差. 因此, 在先验信息缺失时, 仍有存在粗差转移的风险.

如果把滤波器看作一个平差系统, 则可以利用可靠性理论评价滤波器的性能. 测量领域的可靠性是指一个平差系统发现模型误差(粗差、系统误差)的能力和不可发现粗差对结果的影响[1]. 可以在一定的可靠性下, 构建统计量, 找出可发现模型误差的下界值, 将其作为粗差检择的标准. 传统平差理论中是用平差因子阵(可靠性矩阵)来构造该可靠性指标的[1,19]. 然而, 滤波系统的可靠性由测量粗差和状态模型预测误差共同决定, 传统的可靠性理论对其并不适用.

本文针对实时滤波的粗差检择问题展开. 首先, 将状态预测新息用于拟准观测的选取, 并将拟准检定步骤融入 Kalman 滤波过程, 提出了一种更加简洁可靠的滤波算法, 并建立了完整的算法执行步骤; 其次, 借鉴平差系统的可靠性理论, 建立了滤波系统的可靠性矩阵, 在理论上对比了各算法的可靠性; 最后, 利用典型弹道目标实时跟踪的试验数据, 计算验证了算法的滤波性能, 给出了文章主要结论.

1 拟准检定法回顾

设系统的观测方程为

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\Delta}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 m 维系统状态向量, $\boldsymbol{y}$ 是 n 维测量向量, $\boldsymbol{H}$ 是 $n\times m$ 维测量矩阵, $\boldsymbol{\Delta}$ 是测量的真误差. 假设测量权阵为 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{I}$ 为同阶的单位矩阵, 则平差因子阵(可靠性矩阵)[1]为 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H})\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$, 且满足 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Delta}=-\boldsymbol{R}\boldsymbol{y}$. 拟准检定法的目的是通过 $\boldsymbol{\Delta}$ 的估计值实现粗差定位和估计. 设已根据设备测量情况或残差绝对值选定了 r 个拟准观测 $(r\leqslant n)$, 对应向量为 $\boldsymbol{y}_r$, 由于 $\boldsymbol{R}$ 是秩亏的, 算法对 $\boldsymbol{y}_r$ 的真误差 $\boldsymbol{\Delta}_r$ 引入范数极小约束条件, 将问题转化为如下方程组的求解

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Delta}=-\boldsymbol{R}\boldsymbol{y},\\ \boldsymbol{G}_r\boldsymbol{\Delta}_r=\boldsymbol{0}_{r\times 1},\end{cases} \tag{2}$$

上式可用最小二乘方法求解, 引入观测判决条件, 根据真误差的分群现象, 既可逐步识别测量粗差[16~19].

2 拟准检定滤波算法

2.1 算法推导

本节将拟准观测思想融入滤波过程中, 用滤波器的状态预测性质选取初始拟准观测量, 推导基于拟准观测的滤波方法, 以提高系统解算结果的可靠性. 设 $k+1$时刻, 系统状态方程和测量方程如下

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{w}_k,\\ \boldsymbol{y}_{k+1}=\boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}+\boldsymbol{n}_{k+1},\end{cases} \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{w}_k$ 和 $\boldsymbol{n}_{k+1}$ 是系统状态和测量误差. 如果将上式看成一个平差系统, 则 $\boldsymbol{\Delta}_{k+1}=-\boldsymbol{n}_{k+1}$ 就是 $k+1$时刻的测量真误差. 应用 Kalman 滤波估计该系统时, 通常假设 $\boldsymbol{w}_k$ 和 $\boldsymbol{n}_{k+1}$ 是零均值的高斯白噪声, 记其协方差矩阵分别为 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{w},k}$ 和 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k}$. 假设 k 时刻已获得状态估计值 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$, 其方差为 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x},k}$. 每次滤波都等价于求解如下优化问题[14,20]

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}=\min_{\boldsymbol{x}_{k+1}}\{\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}+\tilde{\boldsymbol{y}}_{k+1|k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k}\tilde{\boldsymbol{y}}_{k+1|k}\}, \tag{4}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}=\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}-\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}_{k+1}$ 为状态预测误差, $\tilde{\boldsymbol{y}}_{k+1|k}=\hat{\boldsymbol{y}}_{k+1}-\boldsymbol{y}_{k+1}=\boldsymbol{H}_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}-\boldsymbol{y}_{k+1}$ 为测量残差, $\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}$ 是 $\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}$ 协方差矩阵.

计算新息 $\boldsymbol{v}_{k+1}=\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{H}_{k+1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}$, 据此选择 r 个

测量分量为初选拟准观测，记为 $\boldsymbol{y}_{r,k+1}$，其余分量记为 $\boldsymbol{y}_{s,k+1}(s=n-r)$．不妨设 $\boldsymbol{y}_{k+1}=[\boldsymbol{y}_{s,k+1}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}_{r,k+1}^{\mathrm{T}}]$，$\boldsymbol{H}_{k+1}=[\boldsymbol{H}_{s,k+1}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_{r,k+1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}=[\boldsymbol{P}_{s,k+1},\boldsymbol{P}_{sr,k+1};\boldsymbol{P}_{rs,k+1},\boldsymbol{P}_{r,k+1}]$．设拟准观测的 $m\times r$ 维权矩阵为 $\boldsymbol{G}_{r,k+1}$，并令 $\boldsymbol{G}_{k+1}=[\boldsymbol{0}_{m\times s},\boldsymbol{G}_{r,k+1}]$，可将滤波问题转化为如下方程组的求解

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}^{-1/2}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x},k+1}^{-1/2}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k},\\ \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1/2}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{\Delta}_{k+1})=\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1/2}\boldsymbol{y}_{k+1},\\ \boldsymbol{G}_{k+1}\boldsymbol{\Delta}_{k+1}=\boldsymbol{0}_{n\times 1}.\end{cases}\tag{5}$$

令 $\boldsymbol{I}_n$ 是 n 维单位矩阵，$\boldsymbol{X}_{k+1}=[\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\Delta}_{k+1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{H}}_{k+1}=[-\boldsymbol{H}_{k+1},\boldsymbol{I}_n]$，$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q},k+1}=(\boldsymbol{G}_{r,k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{r,k+1})^{-1}$，$\boldsymbol{B}_{k+1}=[\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}^{-1/2},\boldsymbol{0}_{m\times n};\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1/2}\boldsymbol{H},-\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1/2};\boldsymbol{0}_{m\times m},\boldsymbol{G}_{k+1}]$，$\boldsymbol{C}_{k+1}=[\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k}^{-1/2}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k};\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k}^{-1/2}\boldsymbol{y}_{k+1};\boldsymbol{0}_{m\times 1}]$，则由平差原理[1]，有

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{X}}_{k+1}&=(\boldsymbol{B}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{k+1})^{-1}\boldsymbol{B}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{k+1}\\&=\left(\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}^{-1}&\boldsymbol{0}_{m\times s}&\boldsymbol{0}_{m\times r}\\ \boldsymbol{0}_{s\times m}&\boldsymbol{0}_{s\times s}&\boldsymbol{0}_{s\times r}\\ \boldsymbol{0}_{r\times m}&\boldsymbol{0}_{r\times s}&\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q},k+1}^{-1}\end{bmatrix}+\tilde{\boldsymbol{H}}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\tilde{\boldsymbol{H}}_{k+1}\right)^{-1}\\&\quad\cdot\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}+\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1}\\ -\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1}\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{6}$$

为了化简上式，取一个足够小的常量 $\delta>0$，令 $\boldsymbol{M}_k^{-1}=[\delta\boldsymbol{I}_s,\boldsymbol{0}_{s\times r};\boldsymbol{0}_{r\times s},\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q},k+1}^{-1}]$，借鉴回归分析中复共线性问题的解决思路[21]，上式可近似为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{X}}_{k+1}&\approx\left(\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}^{-1}&\boldsymbol{0}_{m\times n}\\ \boldsymbol{0}_{n\times m}&\boldsymbol{M}_k^{-1}\end{bmatrix}+\tilde{\boldsymbol{H}}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\tilde{\boldsymbol{H}}_{k+1}\right)^{-1}\\&\quad\cdot\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}+\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1}\\ -\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1}\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{7}$$

令 $\boldsymbol{L}_{k+1}=\boldsymbol{H}_{k+1}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}+\boldsymbol{M}_k$，由矩阵求逆定理[22]，有

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{X}}_{k+1}&\approx\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}+\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1}\\ -\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{M}_k\end{bmatrix}\boldsymbol{L}_{k+1}^{-1}\\&\quad\cdot\left[-\boldsymbol{H}_{k+1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}-\boldsymbol{H}_{k+1}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1}\right]\\&=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}+\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1}\\ -\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1}\end{bmatrix}\\&\quad-\begin{bmatrix}-\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{M}_k\end{bmatrix}\boldsymbol{L}_{k+1}^{-1}\left[-\boldsymbol{H}_{k+1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}-\boldsymbol{L}_{k+1}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1}+\boldsymbol{y}_{k+1}\right]\\&=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}+\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{k+1}^{-1}\left(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{H}_{k+1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}\right)\\ -\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{L}_{k+1}^{-1}\left(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{H}_{k+1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}\right)\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{8}$$

将 $\boldsymbol{L}_{k+1}$ 写成分块形式 $\boldsymbol{L}_{k+1}=[\boldsymbol{L}_{k+1}^{11},\boldsymbol{L}_{k+1}^{12};\boldsymbol{L}_{k+1}^{21},\boldsymbol{L}_{k+1}^{22}]$，满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{L}_{k+1}^{11}=\boldsymbol{H}_{s,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{s,k+1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}_{s,k+1}+\delta^{-1}\boldsymbol{I}_s,\\ \boldsymbol{L}_{k+1}^{12}=\boldsymbol{H}_{s,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{r,k+1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}_{sr,k+1},\\ \boldsymbol{L}_{k+1}^{21}=\boldsymbol{H}_{r,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{s,k+1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}_{rs,k+1},\\ \boldsymbol{L}_{k+1}^{22}=\boldsymbol{H}_{r,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{r,k+1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}_{r,k+1}+\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q},k+1},\end{cases}$$

又记 $\boldsymbol{D}_{k+1}=\boldsymbol{H}_{r,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{r,k+1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}_{r,k+1}+\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q},k+1}$，由分块矩阵逆[22]与 $\delta^{-1}\boldsymbol{I}_s\approx\boldsymbol{0}_{s\times s}$，可得 $\boldsymbol{L}_{k+1}^{-1}\approx[\boldsymbol{0}_{s\times s},\boldsymbol{0}_{s\times r};\boldsymbol{0}_{r\times s},\boldsymbol{D}_{k+1}^{-1}]$ 和 $\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{L}_{k+1}^{-1}\approx[\boldsymbol{I}_s,\boldsymbol{H}_{s,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{r,k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{k+1}^{-1};\boldsymbol{0}_{r\times s},\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q},k+1}\boldsymbol{D}_{k+1}^{-1}]$，故系统状态和真误差估值分别为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}\approx\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}+\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{r,k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{k+1}^{-1}(\boldsymbol{y}_{r,k+1}-\boldsymbol{H}_{r,k+1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}),\\ \hat{\boldsymbol{\Delta}}_{s,k+1}\approx\boldsymbol{y}_{s,k+1}-\boldsymbol{H}_{s,k+1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}-\\ \qquad\boldsymbol{H}_{s,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{x},k+1}\boldsymbol{H}_{r,k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{k+1}^{-1}(\boldsymbol{y}_{r,k+1}-\boldsymbol{H}_{r,k+1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k})\\ \qquad=\boldsymbol{y}_{s,k+1}-\boldsymbol{H}_{s,k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1},\\ \hat{\boldsymbol{\Delta}}_{r,k+1}\approx\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q},k+1}\boldsymbol{D}_{k+1}^{-1}(\boldsymbol{y}_{r,k+1}-\boldsymbol{H}_{r,k+1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k})\\ \qquad=\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q},k+1}(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q},k+1}+\boldsymbol{P}_{r,k+1})^{-1}(\boldsymbol{y}_{r,k+1}-\boldsymbol{H}_{r,k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}).\end{cases}\tag{9}$$

如果初选拟准观测正确，则由上式求解出的真误差会呈明显分群特征[16]，含粗差的观测对应真误差将明显大于正常观测，利用真误差构造适当的检验统计量，可以实现复选拟准观测．复选后，再次滤波以计算系统状态估值，并重新进行粗差定位．上述过程可反复迭代，直至满足收敛条件，则完成了 $k+1$ 时刻的系统解算．本文称此算法为拟准检定滤波(QUAF)，算法执行过程见 2.3 节．

2.2 几点说明

(1) 算法的精度．算法的推导过程中，反复利用了 $\delta^{-1}\boldsymbol{I}_{s\times s}$ 与 $\boldsymbol{0}_{s\times s}$ 的近似关系，由于式(7)与(9)的近似过程相反，因此，由矩阵近似引入的误差得到了一定的补偿．算法精度依赖于状态模型预测精度：高精度的状态预测值，不但可以提高初选拟准观测的合理性和真误差的估计精度，而且可以降低滤波器的可观测性条件，提高粗差检择的崩溃污染率；反之，则需要适当增加初选拟准观测量个数，以降低检择操作的虚警概率．

(2) 向非线性系统的推广．Kalman 滤波框架主要是基于变量均值和方差的计算，在最小均方误差意义下获得系统最优解，因此，根据滤波器中方差和增益的计算公式，可将上面的式(9)修改为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}=\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}+\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{xy}_r,k+1}\boldsymbol{D}_{k+1}^{-1}(\boldsymbol{y}_{r,k+1}-\bar{\boldsymbol{y}}_{r,k+1}),\\ \hat{\boldsymbol{\Delta}}_{s,k+1}=\boldsymbol{y}_{s,k+1}-\hat{\boldsymbol{y}}_{s,k+1},\\ \hat{\boldsymbol{\Delta}}_{r,k+1}\approx\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q},k+1}(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q},k+1}+\boldsymbol{P}_{r,k+1})^{-1}(\boldsymbol{y}_{r,k+1}-\hat{\boldsymbol{y}}_{r,k+1}).\end{cases}\tag{10}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{y}}_{k+1}=[\hat{\boldsymbol{y}}_{s,k+1};\hat{\boldsymbol{y}}_{r,k+1}]$是由状态滤波值 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ 计算出的测量估计值，$\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{y},k+1}=[\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{y}_s,k+1},\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{y}_s\boldsymbol{y}_r,k+1};\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{y}_r\boldsymbol{y}_s,k+1},\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{y}_r,k+1}]$是测量预测 $\bar{\boldsymbol{y}}_{k+1|k}$ 的协方差，$\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{xy},k+1}=[\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{xy}_s,k+1},\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{xy}_r,k+1}]$是状态预测 $\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}$ 和测量预测 $\bar{\boldsymbol{y}}_{k+1|k}$ 的互相关矩阵，$\boldsymbol{D}_{k+1}=\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{y}_r,k+1}+\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q},k+1}$. 应用式(10)的优势是，可以引入各种非线性滤波算法[3]，突破(3)的线性系统假设.

(3) 与标准 Kalman 滤波的差异. 表现为: ①式(9)或式(10)中 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ 的滤波增益($\boldsymbol{K}_{k+1}=\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{xy}_r,k+1}\boldsymbol{D}_{k+1}^{-1}$)小于标准 Kalman 滤波的增益($\boldsymbol{K}_{k+1}=\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{xy}_r,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{y}_r,k+1}^{-1}$); ②$\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{s,k+1}$ 大于滤波状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ 对应的测量残差，但 $\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{r,k+1}$ 小于相对应的残差 $\boldsymbol{y}_{r,k+1}-\hat{\boldsymbol{y}}_{r,k+1}$.

(4) 算法的可靠性. 当不存在极大的状态预测误差时，算法有潜在的高可靠性，主要表现在: ①与原始拟准检定法[16~19]类似，算法的实质是利用一部分观测(拟准观测)滤波获得状态的估值，进而求得真误差，其中非拟准观测的粗差仅对自身有影响，消除了“杠杆观测”[1]的影响，可以同时定位多个粗差，且实现过程简单; ②算法的粗差检择能力强，由于有状态模型的约束作用，可以用少于 m 个(状态维数)观测实现真误差解算，即它比原始拟准检定法有更高的崩溃污染率高.

(5) 算法的适用性. 一些常用检择方法都可看作拟准滤波的特例. 如果不进行迭代滤波，则算法相当于新息算法; 如果选择所有变量为初选拟准观测，并在复选拟准观测中引入权函数，则算法可演变为抗差估计; 如果不引入状态方程，即去除式(5)的第一个方程，并参照原始的拟准观测初选方法，则算法与文献[18]的算法类似.

2.3 执行步骤

拟准检定滤波的关键是选择合适的拟准观测量，分为初选和复选两步实现，选取规则可以根据新息、残差或真误差统计特性灵活设计. 这里尽量参考原始拟准检定法的变量选取原则，并做了适当更改. 具体的，首先根据当前时刻的可观测性确定最小拟准观测数 r_0，并选择 $r\geqslant r_0$ 为初选拟准观测量个数. 然后，采用如下的步骤解算系统.

步骤 1: 利用测量新息初选拟准观测. 令 v_{k+1}^i 为新息的第 i 个分量，d^i 是测量预测协方差 $\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{y}_r,k+1}$ 的第 i 行 i 列元素的平方根，计算归一化测量信息新息为 $\bar{v}_{k+1}^i=|v_{k+1}^i|/d^i$. 将 $\bar{\boldsymbol{v}}_{k+1}(i)$ 从小到大排列，并选择最小的 r 个分量作为初选拟准观测量. 按式(10)计算初步的状态估计值和测量真误差估值. 转下步.

步骤 2: 根据真误差的“分群”特征复选拟准观测. 令 l^i 是测量预测协方差 $\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{y}_r,k+1}$ 的第 i 行 i 列元素的平方根，计算指标 $W_i=\hat{\boldsymbol{\Delta}}^i/[Cl^i]$，其中 $C=1.483\,\mathrm{median}\{|\hat{\boldsymbol{\Delta}}^1|,\cdots,|\hat{\boldsymbol{\Delta}}^n|\}$，将 $W(i)$ 从小到大排列，记为 W_j'，$j=1,\cdots,n$. 计算 $\mathrm{d}\bar{W}_j=\bar{W}_{j+1}-\bar{W}_j$，选择 $\mathrm{d}\bar{W}_j$ 有较大跳跃且跳跃点之下的 $\bar{W}$ 比较小的 j_0 为分群点，令 $\{\bar{W}_j,\ j=1,\cdots,j_0\}$ 对应的测量分量为拟准观测. 转下步.

步骤 3: 重新滤波. 根据复选拟准观测，重新计算状态估值和测量真误差. 如果真误差“分群”特征发生明显变化(j_0 的位置或 $\{\bar{W}_j,j=1,\cdots,j_0\}$ 包含元素)，则调整拟准观测量，返回步骤 2; 否则，转下步.

步骤 4: 对于非拟准观测，仿照抗差估计方法构造等价权函数，并结合选取的拟准观测量(它们权值是 1)，利用标准的滤波算法计算系统状态. 如果状态误差协方差比步骤 1 明显减小或达到最大迭代次数，则当前时刻滤波结束; 否则，迭代次数加 1，令 $r=r-1$，转下步.

步骤 5: 若 $r<r_0$，则当前时刻滤波结束; 否则，返回步骤 1.

可见，本文算法与原始的拟准检定法的不同是: ①本文算法利用滤波新息实现初选拟准观测，大大简化了初选过程，这可以看作是通过增加状态模型的先验信息，降低了对设备测量状况先验信息的需求或残差的依赖. ②简化了复选拟准过程，计算表明，这种简化对很多实际系统的滤波结果影响不大. ③为了不过于绝对的区别测量的“好坏”，更充分地利用观测信息，在最后的状态求解过程中引入了等价权.

需要指出的是，如果系统长时间满足 $r<r_0$，则认为观测不足，系统“严重”依赖状态模型的预报功能. 此时，预报误差的累积容易导致滤波发散，需要采取相应的发散判别和应急机制. 可以通过构造检验统计量或引入最长预报时间等方法实现，方法的有效性与具体问题有关，为节省篇幅，这里不再展开讨论.

3 可靠性分析

在平差理论中, 可靠性矩阵 $\boldsymbol{R}$ 反映了粗差对观测残差的综合影响, 可用来构造可靠性评价指标[1,19]. 本节考虑将平差系统的可靠性理论推广到 Kalman 滤波系统中, 并由此分析本文涉及的几类算法的可靠性. 仍以系统(3)为研究对象, 假设 $\boldsymbol{y}_{r,k+1}$ 是拟准测量. 系统滤波后, 测量残差为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{k+1} &= \boldsymbol{y}_{k+1} - \hat{\boldsymbol{y}}_{k+1} \\ &= \boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \boldsymbol{\Delta}_{k+1} - \boldsymbol{H}_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} \\ &= -(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{K}_{r,k+1})\boldsymbol{H}_{k+1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} \\ &\quad -(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{K}_{r,k+1})\boldsymbol{\Delta}_{k+1}, \end{aligned} \tag{11}$$

上式第一项主要由状态预测误差决定, 第二项由测量真误差决定, 它们有相同的系数矩阵. 因此, 本文定义 $\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{K}_{r\,k+1}$ 为滤波系统的可靠性矩阵, 它可进一步计算

$$\boldsymbol{R}_{k+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_s & -\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{y}_r\boldsymbol{y}_s,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}_{\boldsymbol{y}_r,k+1} \\ \boldsymbol{0}_{r\times s} & \boldsymbol{P}_{r,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}_{\boldsymbol{y}_r,k+1} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

下面分别讨论几类常用算法的可靠性.

(1)新息算法. 此时 $r=0$, $\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{I}_n$, 可计算残差为

$$\boldsymbol{V}_{k+1} = -\boldsymbol{H}_{k+1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} - \boldsymbol{\Delta}_{k+1}, \tag{13}$$

可见, 残差由状态预测误差和测量真误差共同决定, 前者根据测量几何分配到各测量分量中, 而后者仅影响其自身所在的测量分量. 因此, 算法可靠性仅由状态预测结果决定. 如果状态预测误差较小或者对各测量分量的影响比较均衡, 此类算法可以最大程度的消除"杠杆观测"的影响, 有很高的可靠性; 反之, 此类算法则可能获得错误的粗差检择结果.

(2)抗差估计. 此时 $r=n$, $\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},k+1}\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}_{\boldsymbol{y},k+1}$, 可计算残差为

$$\boldsymbol{V}_{k+1} = -\boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{H}_{k+1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} - \boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{\Delta}_{k+1}, \tag{14}$$

可见, 残差由状态预测误差和测量真误差共同决定, 两者的影响均通过可靠性矩阵分配到各测量分量中. 此类算法的特点是: 1) 测量信息的引入可以降低状态预测误差的影响; 2) 含误差的观测对所有其它测量都可能有影响, 对于测量结构复杂的系统, 需要合理设计抗差权函数, 否则仍可能因"杠杆观测"导致粗差的转移和淹没. 因此算法可靠性与具体问题有关, 难于开发通用的方法.

(3)原始拟准检定. 此时 $r \leqslant n$, 可计算残差为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{k+1} &= -\boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{\Delta}_{k+1} \\ &= [\boldsymbol{\Delta}_{s,k+1} - \bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{y}_r\boldsymbol{y}_s,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}_{\boldsymbol{y}_r,k+1}\boldsymbol{\Delta}_{r,k+1}; \boldsymbol{P}_{r,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}_{\boldsymbol{y}_r,k+1}\boldsymbol{\Delta}_{r,k+1}], \end{aligned} \tag{15}$$

可见, 残差仅由测量真误差决定. 此类算法不利用状态模型信息, 算法可靠性与初始拟准观测的准确性密切相关. 根据设备测量状况或初步计算的残差信息选择初始拟准观测[16~19]. 对于一些实时系统, 先验信息的缺失或不准确, 复杂测量结构下的粗差转移与淹没效应, 都可能导致拟准观测量的错误选择.

(4)拟准检定滤波. 此时 $r \leqslant n$, 可计算残差为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{k+1} &= -\boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{H}_{k+1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} - \boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{\Delta}_{k+1} \\ &= -\boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{H}_{k+1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} \\ &\quad -[\boldsymbol{\Delta}_{s,k+1} - \bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{y}_r\boldsymbol{y}_s,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}_{\boldsymbol{y}_r,k+1}\boldsymbol{\Delta}_{r,k+1}; \boldsymbol{P}_{r,k+1}\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}_{\boldsymbol{y}_r,k+1}\boldsymbol{\Delta}_{r,k+1}], \end{aligned} \tag{16}$$

可见, 与抗差估计相比, 相同之处是, 拟准检定滤波的残差也是由状态预测误差和测量真误差共同决定, 并通过可靠性矩阵分配到各测量分量中; 不同之处是, 非拟准观测中的粗差不会对拟准观测造成影响, 降低了复杂测量结构下粗差转移与淹没的可能性. 与原始拟准检定法相比, 状态预测不仅影响拟准观测的选取, 还直接影响残差的计算, 是决定算法可靠性的关键因素.

各类算法所利用的信息如图 1 所示, 可见拟准检定滤波和抗差估计两类方法所用先验信息最多, 特别是拟准检定算法对测量信息进行了筛选, 因此, 从信息利用率的角度, 可以认为拟准检定算法具有获得最高可靠性的潜力. 由于它与原始拟准检定法对所用先验信息的差别(前者是状态模型, 后者是设备测量状况), 两者结合也是改进可靠性的一个潜在途径.

4 计算实例

本节选取一个空间弹道目标的地基测速雷达试验测量数据, 分别采用上述信息算法、抗差估计、原始拟准检定算法和拟准滤波四种方法解算弹道, 对比它们的滤波性能. 计算条件为: 弹道目标采用动力学建模[23]; 由于系统的非线性特征, 计算中均选择了 UKF 滤波[4], 并根据系统形式进行了算法简化[5,6]; 抗差估计和拟准滤波的等价权构造过程参考了文献[14]; 原始拟准检定算法的执行与文献[18]类似, 其初始拟准观测利用设备测量信息先验给定(计算时不存在错误选择的情况), 复选拟准观测简化为与 2.3 节相同.

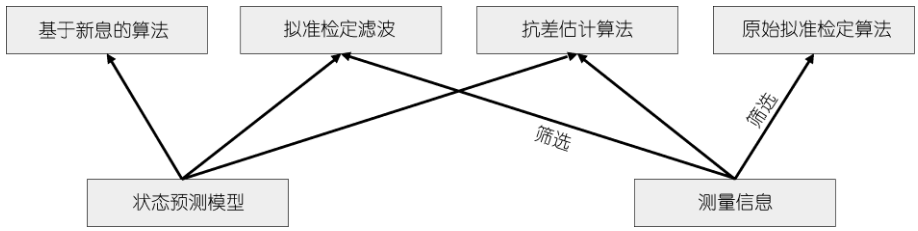


图 1　各类算法所用信息示意图

首先, 以事后高精度的弹道作为比较标准, 反算各测元的残差, 测元残差较大的点可以认为是出现测量粗差的位置. 表 1 给出了两个典型测量通道内, 各算法探测到的粗差位置, 原始拟准检定方法采用了与拟准滤波相同的初始拟准观测, 两者计算结果一致, 故未在表中列出. 由表可见: 1)测量通道 I 中不含粗差, 除抗差估计外, 其它算法都给出了正确的结果. 分析弹道运动特性, 我们发现 700~2000 采样时刻的弹道运动比较平稳, 状态(弹道)预测精度较高, 故新息算法和拟准滤波的粗差探测能力较强; 由于我们没有针对具体问题对抗差函数进行优化设计, 抗差估计存在粗差转移现象, 导致了虚警的出现. 2)测量通道 II 中含有少量粗差, 各算法虽然实现了粗差定位, 但都不同程度的出现了虚警. 弹道运动特性分析表明, 2100~2200 采样时刻的弹道处于机动段落, 状态预测精度较差, 故新息方法的虚警率最高; 而拟准滤波通过引入拟准测量信息, 降低了对状态的依赖程度, 并且有效的抑制了粗差转移现象, 故其虚警率最低.

其次, 为了给出各算法滤波性能的综合评价, 仍以事后高精度的弹道作为比较标准, 计算各方法滤波弹道的误差 $\Delta \boldsymbol{x}(t)$. 设定弹道滤波精度标准 M, 收敛时刻 t_0 后, 统计滤波误差超差点个数作为滤波器可靠性的综合评价指标. 其计算公式为 $q=\sum_{t_k \geq t_0} \varphi[\Delta \boldsymbol{x}(t_k)-M]$, 其中 $\varphi(x)=(x>0)$. 结果如表 2 所示, 原始拟准检定方法采用了与拟准滤波相同的初始拟准观测, 两者计算结果一致, 故未在表中列出. 可见拟准滤波的可靠性最高, 抗差估计次之, 而新息方法最差, 这与前文的理论分析结果是一致的.

最后, 人为地减少测量通道数量, 对比原始拟准检定算法和拟准滤波对测量信息的依赖程度. 此时, 假设我们对设备测量状况没有先验信息, 原始拟准检定法的初始拟准观测利用最小二乘算法的残差获得. 计算结果表明, 当可用观测数小于 7 个时原始拟准观测出现了类似抗差估计粗差转移现象; 当观测数小于 6 个时, 原始拟准观测无法执行. 而拟准滤波算法在观测数大于 4 个时, 均可获得较好的检择效果由测速定轨理论, 每个时刻需要 6 个测速元才能实现单点解算弹道[24].

5　结束语

粗差的有效检择和抑制是提高滤波算法可靠性的关键. 本文将拟准观测选取思想融入到 Kalman 滤波过程, 通过在滤波方程中引入拟准观测真误差最小化的约束条件, 提出了一种拟准检定滤波算法, 并

表 1　两个典型测量通道内各算法粗差检择结果

粗差位置	测量通道 I	测量通道 II
新息算法	无	2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208
抗差估计	793, 884, 1486, 1589	2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2214
拟准滤波	无	2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2188
真实值	无	2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186

表 2　各算法的滤波超差点个数

	x 位置	y 位置	z 位置	x 位置	y 位置	z 位置
新息算法	0	0	0	73	155	49
抗差估计	0	0	0	58	144	37
拟准滤波	0	0	0	60	126	16

讨论了算法的扩展性和适用性, 构造了完整的滤波执行步骤. 进而, 建立了滤波系统的可靠性矩阵, 从理论分析和计算实例两方面对比了新息算法、抗差估计、原始拟准检定法和拟准检定滤波的性能差异. 结果表明: 与新息算法和抗差估计相比, 拟准检定滤波算法对测量信息进行了有甄别的利用, 有更高的粗差定位精度和抗粗差转移能力; 与原始拟准检定法相比, 拟准检定滤波利用了状态模型信息, 更易于实现, 且所需拟准观测数量更少, 更加适合测量结构复杂和测量数量较少的系统. 文中所得算法可以应用于许多实际滤波系统, 所用可靠性分析方法也可推广到其它检择和滤波算法的性能分析中. 实际上, 我们已经将这些方法初步应用于靶场实时弹道跟踪的数据处理工作, 取得了较好的效果. 拟准检定滤波对状态模型的预测精度依赖性较大, 从信息融合理论出发, 为了提高拟准观测选取的合理性, 可以适当引入设备测量状况的先验信息, 本文后续的研究工作将重点就此展开.

参考文献

1 邱卫宁. 测量数据处理理论与方法. 武汉: 武汉大学出版社, 2008
2 王正明, 易东云. 测量数据建模与参数估计. 长沙: 国防科技大学出版社, 1996
3 Lefebrre T, Bruyninckx H, Schutter J D. Kalman filters for nonlinear systems: A comparison of performance. Int J Contr, 2004, 77: 639–654
4 Julier S J, Uhlmann J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. In: Proc Aero Sense: 11th Int Symp AeroSence/Def Sens, Sim Contr, Orlando. 1997, 54–65
5 Liu Y, Yu A X, Zhu J B, et al. Unscented Kalman filtering in the additive noise case. Sci China Tech Sci, 2010, 53: 929–941
6 Liu Y, Zhu J B, Hu Z T, et al. Dynamic modeling and simplified UKF for reentry vehicle. In: First Int Congr Image Signal Proc (CISP 2008), Sanya, Hainan, China. 2008, 436–441
7 杨元喜. Kalman 滤波异常误差检测. 测绘科学与工程, 2005, 25: 1–4
8 Angiulli F, Basta S, Pizzuti C. Distance-based detection and prediction of outliers. IEEE Trans Knowl Data Eng, 2006, 18: 145–160
9 肖艳军, 李建勋. 抗野值多速率模型及交互式多传感器状态融合. 自然科学进展, 2005, 15: 1106–1112
10 张磊, 汪渤. 抗野值 H_∞ 滤波在组合导航中的应用. 北京理工大学学报, 2009, 29: 600–604
11 荣思远, 穆荣军, 崔乃刚. EKF 容错滤波方法在磁测自主导航中的应用研究. 电子学报, 2006, 34: 2268–2271
12 陈轲, 归庆明, 柳丽, 等. Gauss-Markov 模型的 t 型抗差估计. 测绘学报, 2008, 37: 281–284, 292
13 Huber P J. Robust Statistics. New York: John Wiley&Sons, 1981
14 杨元喜, 文援兰. 卫星精密轨道综合自适应抗差滤波技术. 中国科学 D 辑: 地球科学, 2003, 33: 1112–1119
15 Ting J, Theodorou E, Schaal S. A Kalman filter for robust outlier detection. In: Proc 2007 IEEE/RSJ Int Conf Int Rob Syst, San Diego, CA, USA. 2007, 1514–1519
16 欧吉坤. 一种检测粗差的新方法——拟准检定法. 科学通报, 1999, 44: 1777–1781
17 欧吉坤. 再论拟准检定法的原理、实施和应用. 测绘工程, 2002, 11: 3–6
18 柴艳菊, 欧吉坤. Kalman 滤波质量控制的一种改进算法. 自然科学进展, 2004, 14: 904–909
19 欧吉坤. 测量数据的质量控制理论探讨. 测绘工程, 2001, 10: 6–10
20 Yang Y, He H, Xu G. Adaptively robust filtering for kinematic geodetic positioning. J Geodesy, 2001, 75: 109–116
21 Çetin M. Robust model selection criteria for robust Liu estimator. Eur J Oper Res, 2009: 21–24
22 张贤达. 矩阵分析与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004
23 Li X R, Jilkov V P. A survey of maneuvering target tracking—Part II: Ballistic target models. In: Proc 2001 SPIE Conf Signal Data Proc Small Targ, San Diego, CA, USA. 2001, 559–581
24 刘也, 朱炬波, 梁甸农. 测速定轨中的递推样条滤波算法. 信号处理, 2010, 26: 65–68