科 学 通 报
第 39 卷 第 10 期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1994 年 5 月

损伤断裂的确定性随机行为和对初始位形的敏感性*

白以龙 柯孚久① 夏蒙芬②

(中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室，北京 100080; ① 北京航空航天大学应用数学物理系，北京 100083; ② 北京大学物理系，北京 100871)

关键词 损伤断裂演化、断裂概率函数、对初始位形的敏感性

我们以恒定载荷下的一排平行纤维或平板试件为原型，考察材料内部的损伤断裂的演化行为[1,2]. 用包含 N 个键的一维链为模型，模拟这个演化过程(图 1). 为澄清不同类型的复杂性，本文限于:

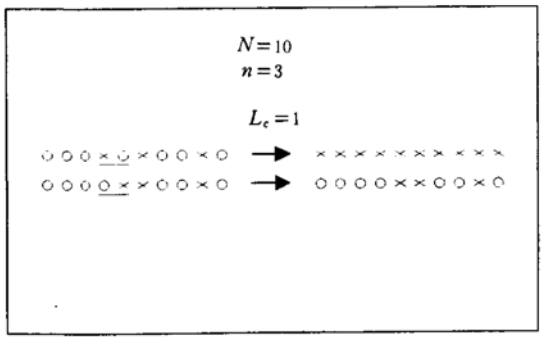

图 1 一维链初始位形和演化终态示意图
N 为总键数，n 为总断键数，L_c 为连接参数

(1)只考虑损伤加剧过程，不考虑损伤愈合一类逆过程.

(2)只考虑在一定初始损伤位形下，已有损伤在确定性的动力学规律下的演化过程. 不考虑演化过程中新的损伤成核和其它概率过程.

因此，这是一种单向的，确定性的演化，与 Logistic 映射等[3] 不同. 但是，本文结果表明，此模型的演化终态，可能对初始位形的微小差异相当敏感. 但它显然不是混沌. 此外，除用敏感程度外，还需引入敏感概率来刻画其行为.

本文所考虑的确定性的演化动力律，基于一种简化的力学假设，即已损坏单元原承担的载荷由其左右两侧均担; 两损坏单元间的连接部分的平均应力超过某临界值时，则连接部分的单元损坏，两损坏单元连接为一体. 该规律可表述如下:

$$L=s/[(r+l)/2]\leqslant L_c=\frac{\sigma_0}{\sigma_c-\sigma_0}\ , \tag{1}$$

式中 l, r, s 分别表示左、右损坏单元和中间连接部分所占的键数，σ_0 和 σ_c 分别为平均加载应力和键的强度.

确定性动力律(1)是一个不可逆的、标度不变的、非局域的法则，特别是一种截断性的非线性演化法则，即发生或者不发生连接不是连续过渡的. 这与元胞自动机中的邻域规律有所不同[4].

1993-11-11 收稿，1994-01-18 收修改稿.
*国家攀登计划和中国科学院重点资助项目.

这是造成本文所讨论的一类复杂性的根源.

对于一个给定的模型(即给定系统的大小和连接参数 L_c),从一个初始损伤位形出发,就可以依照动力律(1),讨论损伤演化. 该问题的计算量,随系统的大小 N,以几何级数 2^N 增加. 我们在计算机上系统研究 $N=10, 20$ 的演化性态.

对该一维链系统的状态,可用如下方式描写:

$$X=\{x_i\} \quad i=1,\cdots,N, \quad x_i=\begin{cases}0 & \text{完整键,}\\ 1 & \text{断键,}\end{cases}$$

其一阶损伤平均值(损伤分数)为

$$p=\frac{\Sigma x_i}{N}=\frac{\Sigma m S_m}{N}=\frac{n}{N},$$

式中 n 是总断键数,S_m 是连续 m 个断键构成的断键集团的个数. 损伤分数 p 是一种常用的宏观损伤内变量.

两个状态的差别可表示为

$$X_a-X_b=\{x_{ai}-x_{bi}\},$$

两个完全相同的状态,不但断键数相同,排列也相同. 所以 $X_a-X_b=\{0\}$ 表示两个完全相同的状态. 两个完全不同的状态则为 $X_a-X_b=\{\pm 1\}$. 因此,最微小的状态差异为

$$\delta X=\{0,\cdots 0,\pm 1,0,\cdots 0\}, \tag{2}$$

但是发生这个差异的两个状态的损伤分数 p 是不同的. 对具有相同的损伤分数 p 的两个状态的最微小差异为

$$\Delta X=\{0,\cdots 0,\pm 1,\mp 1,0,\cdots 0\}, \tag{3}$$

即仅有两相邻键有相反的差别.

现在来考察系统损伤演化的终态. 显而易见,对此单向过程,演化终态只可能是固定点,没有极限环和混沌. 但是,对同一初始损伤分数 p,其终态损伤分数 $p'=\frac{n'}{N}$ 却可以有好多个不同的值(见图 2). 这表明,即使初始损伤分数相同,但初始损伤位形上的差别,也会使其演化终态损伤分数有明显差别. 显然,这是该确定性模型表现出的一种对初始位形的敏感性. 系统损伤演化的终态有时不能用相近的初始损伤位形的演化来推测.

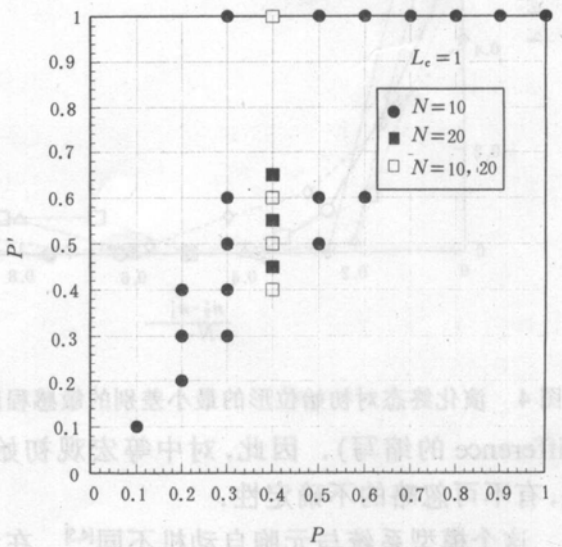

图 2　初始和演化终态损伤分数关系

上述对初始位形的敏感性,除了敏感程度外,还表现为一定的出现概率(见图 3). 图 3 中的横坐标 p' 表示终态的损伤分数,纵坐标则为出现概率 $\Phi=\frac{Ynn'}{\Omega_n}$, $\Omega_n=\frac{N!}{(N-n)!\ n!}$ 是初态的总个数,Ynn' 是由初态 n 演化为终

态 n' 的个数. 从图3中可以看到, 对于 $0<p<1$ 的相当大的范围, 对一定的初值 p, 终态概率 Φ 是呈U型的分布. 该U型的平底部, 相当演化中的瞬态, 如图中 $p'=(0.7—0.9)$ 的部分. U型的两支向上的臂, 分别靠近初态 $n'\sim n$ 和EIC态 $n'=N$(evolution induced catastrophe, 完全断裂态)[1,2]. 原则上, 不同损伤率下, 均只能作概率性预测. 中度损伤时, 终态的概率分布以较宽的分布函数描写, 预测准确率较低. 而 $p\sim 0$ 或 $p\sim 1$ 时, 概率分布很窄, 有很高的预测概率, 几乎趋向于确定性的预测.

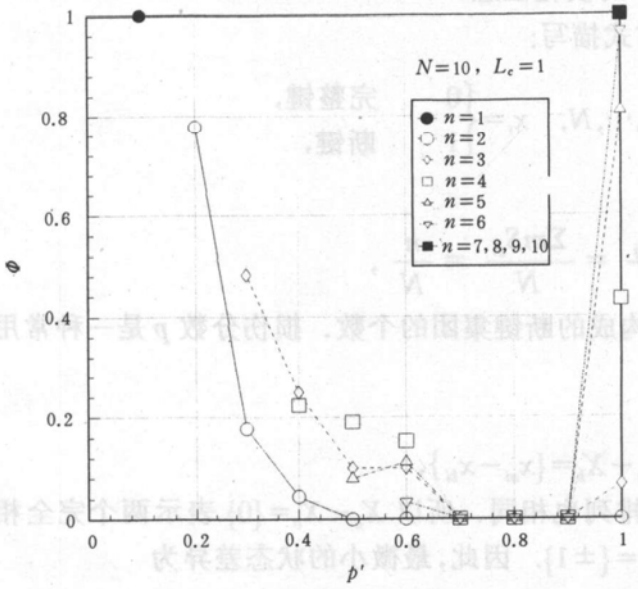

图3 演化终态损伤分数 p' 出现概率 Φ 随初始损伤分数 $\frac{n}{N}$ 的变化

虽然图3清楚地表示出了初始位形上的差异, 所导致的演化终态的分散程度和出现概率, 但是, 这作为对初始位形的敏感性的表征, 并不确切. 我们先只讨论在 ΔX 意义下, 初始位形最小差别对演化的影响. 它们的演化终态的宏观差别 $n_2'-n_1'$, 及其出现次数分别代表了演化终态对初始位形最小差别的敏感程度和出现概率. 图4表示了这个结果. 可看出当 $N=10$, $L_c=1$ 时, $n=1,7,8,9$, 并不表现任何对初始位形最小差别的敏感性, 即完全确定的终态不动点特征. 但对中度损伤的初态 $n=2—6$, 虽然, 一般来讲, 较小的终态差别有较高的概率(图左侧), 但是遍及整个系统的终态差别 $\frac{n_2'-n_1'}{N-n}=1$, 往往有不可忽视的终态差别概率(PFD为probability of final difference的缩写). 因此, 对中等宏观初始损伤的状态, 靠对比实验条件预测损伤演化终态, 有不可忽略的不确定性.

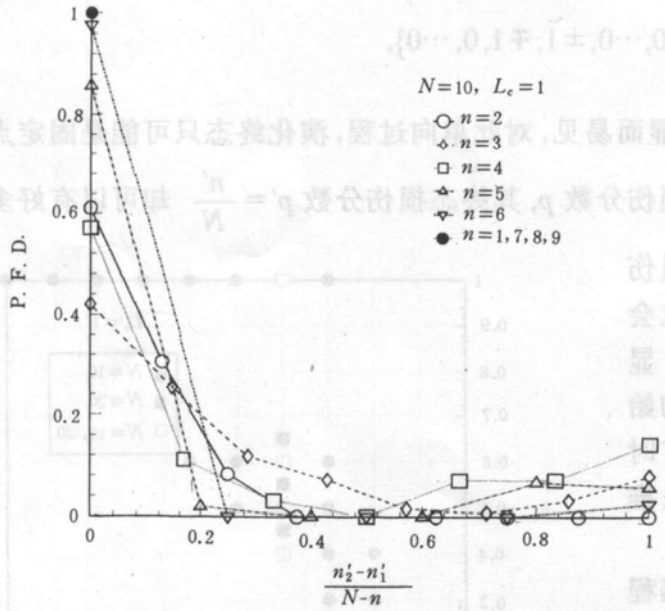

图4 演化终态对初始位形的最小差别的敏感程度和出现概率

这个模型系统与元胞自动机不同[4,5]. 在元胞自动机中, 一般包括生、灭两类演化规则, 并且是局域性的. 因之, 其中表现出的长期演化行为的复杂性(定态、周期态、混沌), 取决于演化

规则的不同选取．这与本文中非局域截断性演化规则和参数都固定，而出现的随机行为全然不同．如果在本问题中，采用单向的局域性的规则，那么此系统只会有该局域规则直接限定的若干终态，不会发生本文所示的遍及整个系统的终态差别．更为简单的类似，是逾渗等平衡态过程，此时则只有完全确定的逾渗阈值了．因此，看来本文所示的确定性随机行为，来源于非局域的、截断性的非线性演化法则．

对于一类不可逆的复杂过程，例如材料的损伤断裂，或者衰老死亡等，本文模型所显示的，对初始位形的敏感性和确定性随机行为，可能有一定的普遍意义，可提供一种有益的概念性思考．

致谢　感谢方飚同志协助画图．

参　考　文　献

[1] Bai, Y., Xia, M., Ke, F. *et al.*, *Chinese Phys. Lett.*, 1993, **10**: 155—158.
[2] Xia, M., Bai, Y., Ke, F., *Science in China*, Series A, 1994, **37**(3): 331—340.
[3] May, R. M., *Nature*, 1976, **261**: 459—467.
[4] Wolfram, S., *Nature*, 1984, **311**: 419—424.
[5] Kaneko, K., in *Theory and Its Applications of Cellular Automata* (ed. Wolfram, S.), World Scientific, Singapore, 1986, 367—399.