研究通讯

线性模型中最小二乘估计的强收敛速度

考虑线性模型如下：

$$y_i = x_i'\beta + e_i, i = 1,2,\cdots, \quad (1)$$

其中 $x_i' = (x_{i1}, \cdots, x_{ip})$为已知常值向量，$\beta' = (\beta_1, \cdots \beta_p)$为未知参数向量。令设计矩阵 $X_n = (x_1, \cdots, x_n)'$； $Y_n = (y_1, \cdots, y_n)'$； $S_n^{-1} = (X_n'X_n)^{-1} \triangleq (S_{ij}^{(n)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$。熟知 β 的最小二乘估计 $\hat\beta(n)$有如下表达式

$$\hat\beta(n) = S_n^{-1}X_n'Y_n, \quad (2)$$

其第一个分量 $\hat\beta_1(n)$ 为

$$\hat\beta_1(n) = u_n/v_n + \beta_1. \quad (3)$$

这里 $v_n = 1/S_{11}^{(n)} = v_m + \sum_{i=m+1}^{n} d_i^2(1 + T_i'H_{i-1}^{-1}T_i)$，

$$u_n = u_m + \sum_{i=m+1}^{n}(d_v e_i - d_i T_i'H_{i-1}^{-1}\sum_{k=1}^{i-1} T_k e_k),$$

$T_i = (x_{i2}, \cdots, x_{ip})'$, $H_n = \sum_{i=1}^{n} T_i T_i'$,

$K_n = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}T_i'$, $d_n = x_{n1} - K_n H_n^{-1}T_n$.

由于陈桂景等人在 1981 年得到了一个包罗很广的定理后，以前的许多结果都可以作为推论得出．但这个定理关于$\{e_i\}$的二阶矩无限的情况讨论得尚不十分完整，当 $E|e_i|^{1+\delta} < \infty (0 \leqslant \delta \leqslant 1)$时需 $v_n^{-1} = S_{11}^{(n)} = O(n^{-(1-\delta)/(1+\delta)}(\log n)^a)$, $a > 1$ 的条件，而从依概率，依 r 阶矩收敛的情形看，人们完全有理由猜测 $(\log n)^a$ 这个项是可以去掉的．

本文中，修改了陈文中关于 $\{e_i\}$ 为收敛系统的这一重要条件

定理 假定在线性模型(1)中，

(i) 若对某个函数 $h(x), h(x) \uparrow \infty$ $(x \uparrow \infty)$，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i^2(1 + T_i'H_{i-1}^{-1}T_i)/h^2(v_i) < \infty$$

并且对任意的 $\{c_i, i \geqslant 1\}$，满足

$$\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2 \leqslant c \sum_{i=n}^{\infty} d_i^2/h^2(v_i)$$

对某个 c 和任意的 n 成立，可得

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i e_i \quad \text{a. s. 收敛}$$

这里 $|g_n| > 0$ 非增，则有

$$\hat\beta_1(n) - \beta_1 = O(h(v_n)(v_n|g_n|)^{-1})).$$

由此定理，得到下面重要推论．

推论 假定在线性模型(1)中，

$\{e_i\}$ i. i. d 且 $Ee_1 = 0$, $E|e_1|^r < \infty$, $r \in (0,2)$, $(*)$ $v_n^{-1} = S_{11}^{(n)} = O(n^{-(2-r)/r})$, $(**)$ 则有 $\hat\beta_1(n) - \beta_1 \to 0$, a. s.。

这里得到的收敛速度已经达到古典强大数律的水平，就是说，对任意给出的数列 $0 < b_n \uparrow \infty$ 都可以找到一个设计矩阵 X_n，满足 $v_n^{-1} = O(n^{-(2-r)/r})$ 和 $\{e_i\}$ i. i. d, $E|e_1|^r < \infty$ 使得

$$b_n(\hat\beta_1(n) - \beta_1), \text{ a. s. 发散.}$$

朱力行

(安徽大学数学系，合肥)

离散线性系统稳定性判据

设定常离散线性系统的特征多项式为

$$P(z) = z^n + \beta_0 z^{n-1} + \beta_1 z^{n-2} + \cdots + \beta_{n-2}z + \beta_{n-1}, \quad (1)$$

熟知，当且仅当 $P(z)$ 的所有特征根 r_k 满足 $|r_k| < 1$ 时，系统指数稳定．记为 $P(z) \in S$.

记 $\Delta_1 \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} |\beta_i|$,

$$\Delta_2 \triangleq \sum_{i=0}^{2n-2} \left|\sum_{j=0}^{i} \beta_j\beta_{i-j}\right|, \quad (2)$$

这里 $\beta_n = \beta_{n+1} = \cdots = \beta_{2n-2} = 0$.