$N \times N$ 非等谱 AKNS 族的李代数结构

设 $V_0 = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_N)$, $V_1 = ((1-\delta_{ij})u_{ij})$, 其中 d_i 为互异复常数, 位势 $u_{ij} = u_{ij}(x, t)$ 对固定的 t 取自 Schwartz 空间 S. 记 $x^0 = 1$, $x^1 = x$ 并确定矩阵 W_k^a, $(k \geqslant 0,\ a = 0,1)$ 如下: $W_0^a = x^a V_0$, $W_1^a = x^a V_1$, $a\delta_{j0}V_0 - W_{jx}^a + [V_0,\ W_{j+1}^a] + [V_1, W_j^a] = 0, j \geqslant 0$ 及 $\rho(W_k^a) = k - a$, 这里权 ρ 定义为 $\rho(u_{ij}) = \rho(\partial/\partial x) = -\rho(x) = 1$. 我们称方程族 $V_{1t_n^a} = [V_0, W_{n+1}^a]$ 为 $N \times N$ 非等谱 AKNS 族, 对之我们证得

定理 1 $dW_k^a/dt_n^b = F_{b,n}^{a,k}$, 其中

$$F_{b,n}^{a,k} = a(k-1)W_{n+k-1}^a + \sum_{i=0}^{k-1}[W_i^a, W_{n+k-i-1}^b].$$

定理 2

$$\sum_{i=0}^{k}[W_i^a, W_{k-i}^b] = (b-a)(k-1)W_{k-1}^{a+b}.$$

定理 3

$$(d/dt_n^b)F_{a,m}^{c,k} - (d/dt_m^a)F_{b,n}^{c,k} = (mb - na)F_{a+b,m+n-1}^{c,k}.$$

当 $c = 0$, $k = 1$ 及 $N = 2$ 时定理 3 给出了李翊神和朱国城发现的无穷维李代数结构 (J. Phys A, 即将发表).

屠规彰
(中国科学院计算中心, 北京)

树的几个计数问题

对于 $t \geqslant 2$ 叉树和有序树, 具有 $r \geqslant 0$ 棵非空子树的节点称为 r 次节点. 考虑具有 $n \geqslant 0$ 个节点的 t 叉树族 Γ_n 和有序树族 Ω_n, 本文建立了以下结果. 它们在计算机科学的算法分析中有着直接的应用.

定理 1 设 b_n 是 Γ_n 中树的总数, $g_{k,n}^{[r]}$ 是 Γ_n 中位于第 k 层的 r 次节点的总数, 并且

$$B(y) = \sum_{n>0} b_n y^n,\quad G^{[r]}(z, y) = \sum_{k,n>0} z^k y^n,$$

则

$$G^{[r]}(z, y) = \frac{1}{1 - tyz[B(y)]^{t-1}} \cdot \binom{t}{r} y[B(y) - 1]^r,$$

$$g_{k,n}^{[r]} = \frac{tr + (t-1)k}{t(n-1) - k}\binom{t}{r} \cdot \binom{t(n-1) - k}{n - r - k - 1} t^k,\quad g_{0,1}^{[0]} = 1.$$

定理 2 设 a_n 是 Ω_n 中树的总数, $d_{k,n}^{[r]}$ 是 Ω_n 中位于第 k 层的 r 次节点的总数, 并且

$$A(y) = \sum_{n>0} a_n y^n,$$

$$D^{[r]}(z, y) = \sum_{k,n>0} d_{k,n}^{[r]} z^k y^n,$$

则

$$D^{[r]}(z, y) = \frac{y^2[A(y)]^r}{y - z[A(y)]^2},$$

$$d_{k,n}^{[r]} = \frac{2k + r}{2(n-1) - r}\binom{2(n-1) - r}{n + k - 1},$$

$$d_{0,1}^{[0]} = 1.$$

由上述定理可导出许多特殊结果, 特别地, 我们有

推论 1 设 $g_n^{[r]}$ 是 Γ_n 中 r 次节点的总

数，$g_{k,n}$ 是 Γ_n 中位于第 k 层的节点总数，$f_n^{[r]}$ 是 Γ_n 中 r 次节点的总通路长度，并且 $n>1$，则

$$g_n^{[r]}=\binom{t}{r}\binom{t(n-1)}{n-r-1},$$

$$g_{k,n}=\frac{t+(t-1)k}{tn-k}\binom{tn-k}{n-k-1}t^k,$$

$$f_n^{[r]}=\binom{t}{r}\sum_{i=r+1}^{n-1}\binom{t(i-1)}{i-r-1}\binom{t(n-i)}{n-i}.$$

推论 2 设 $d_n^{[r]}$ 是 Ω_n 中 r 次节点的总数，$d_{k,n}$ 是 Ω_n 中位于第 k 层的节点总数，$e_n^{[r]}$ 是 Ω_n 中 r 次节点的总通路长度，并且 $n>1$，则

$$d_n^{[r]}=\binom{2n-r-3}{n-2},$$

$$d_{k,n}=\frac{2k+1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-k-1},$$

$$e_n^{[r]}=\sum_{i=r}^{n-2}\binom{2i-r}{i}\binom{2(n-2-i)}{n-2-i}.$$

王振宇　孙潮义
（武汉数字工程研究所）

关于 Leavitt 和 Rossa 的两个问题

对任一环 R，令 $F(R)=\{A|$ 若 $0\neq I\lhd\lhd A$，则有 $J\lhd\lhd I$ 使 $J\sim R\}$，这里 $I\lhd\lhd A$ 表示 I 是 A 的次理想．并记 R^0 为环 R 上的零环．易知 $\mathbf{Z}^0\in F(\mathbf{Z}_n^0)$，$\mathbf{Z}_p^0\in F(\mathbf{Z}_p^0)$，其中 p 为素数，n 为任意自然数，

$$\mathbf{Z}_n=\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

最近 Leavitt 和 Rossa[1]在研究根类的极小生成元的问题中提出了下面两个问题：

问题 1.　对于一个域 K，$F\left(\sum_1^\infty K^0\right)$ 是否等于零？这里 $\sum_1^\infty$ 表可数无限直和．

问题 2.　对于合数 n，除了 $\mathbf{Z}^0$，$F(\mathbf{Z}_n^0)$ 是否含别的(非零)环？

本文给出两个定理．定理 1 否定回答了问题 1，定理 2 肯定回答了问题 2．

定理 1　设 K 是一个域，则

$$F\left(\sum_1^\infty K^0\right)\neq 0.$$

证　取符号集 $E=\{e_\alpha|\alpha\in\mathbf{Q},\ \alpha>0\}$，规定

$$e_\alpha e_\beta=e_{\alpha+\beta},$$

则 E 是一个可换半群．作 K 代数

$$A=K[E]=\{u_1e_{\alpha_1}+u_2e_{\alpha_2}+\cdots+u_ne_{\alpha_n}|,$$
$$0\neq u_i\in K,\ 0<\alpha_i\in\mathbf{Q},$$

且可设

$$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n\}.$$

按照分配律定义 A 中任二元素的乘积，则 A 成为一个(可换)环．$\forall 0\neq a\in A$，设

$$a=u_1e_{\alpha_1}+u_2e_{\alpha_2}+\cdots+u_ne_{\alpha_n},$$
$$0\neq u_i\in K,\quad \alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n,$$

则称 $u_1e_{\alpha_1}$ 是 a 的首项．易知 a^2 的首项是 $u_1^2e_{2\alpha_1}(\neq 0)$，所以 $a^2\neq 0$，A 是半素环．下证

$$A\in F\left(\sum_1^\infty K^0\right).$$

由 Andrunakievich 引理，A 的每个非零次理想都包含一个非零理想，因此要证

$$A\in F\left(\sum_1^\infty K^0\right),$$

只需证明 $\forall 0\neq H\lhd A$，H 有一个次理想

$$I\sim\sum_1^\infty K^0.$$

若 $ue_\alpha(u\in K)$ 是 H 中某个元素 w 的首项，那么容易看到，对任意有理数 $\beta>\alpha$ 和 K 中任意非零元 v，H 中(至少)有一个元素，它的