正压地转大气中 Normal Mode 的研究

任 荷 展

（中国科学院大气物理研究所大气科学数值模拟及地球流体力学开放实验室，北京 100080）

关键词 Normal Mode、连续谱

Normal Mode（标准模）一直是研究流体稳定性的一个重要方法，故此得到了深入的研究。研究结果表明，对于无旋流体的稳定性问题，如果不顾条件一味地套用 Normal Mode 法，就会导致前后矛盾。Hoiland[1]、Case[2] 等分析了 Normal Mode 方法出现困难的原因，指出根源在于 Normal Mode 对于所有可能出现的扰动形式并不完备。对稳定性问题的完整提法是将其考虑成一个初值和边值问题。

由于在正压地转大气中出现了科氏力因子 β，使其内中性 Normal Mode 存在区域扩大。多年来，大多数研究侧重于与 β 有关的波（即 Rossby-Hauwitz 波），从而在一定程度上忽略了对 Normal Mode 完备性的研究。直到最近，正压地转大气中 Normal Mode 完备性问题才由曾庆存系统地提出[3]。曾庆存曾猜想，大尺度大气环流主要由连续谱组成，因而中纬度的西风环流由连续谱滋养，这一猜想在正压地转大气中得到证实[1]。

过去研究连续谱所采用的方法都是比较复杂的数学理论，难以对 Normal Mode 描述扰动所存在的困难有十分明确的直观认识。本文力图综合以往有关 Normal Mode 的研究，结合适当的数学理论对 Normal Mode 的困难作一直观描述。同时分析 Σ 域内 Normal Mode 的分布问题、σ 域内改进的有关 Normal Mode 个数的定理、中性 Rossby-Hauwitz 波的存在条件和关于正压地转大气不稳定增长率的上限，以及对应的波长的数学表达式。

一、正压地转大气的自激解

支配正压地转大气运动的方程为

$$\begin{cases}(\partial_t + \bar{u}\partial_x)\nabla^2\phi + \bar{\beta}_y\phi = 0, \\ \phi|_{y_1} = \phi|_{y_2} = 0,\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\bar{\beta}_y = \beta - \bar{u}_{yy}$，$\bar{u}$ 是纬向基本流。将特征波解 $\phi = \phi(y)\exp[i\alpha(k - ct)]$ 代入(1)式得到

$$(\bar{u} - c)(\phi_{yy} - \alpha^2\phi) + \bar{\beta}_y\phi = 0. \tag{2}$$

以下记 $\bar{u} - c = W(y)$，值得注意的是，(2)式的共轭方程为

$$(\bar{u} - c^*)(\phi^*_{yy} - \alpha^2\phi^*) + \bar{\beta}_y\phi^* = 0, \tag{2}'$$

因此 (c^*, ϕ^*) 也同样是方程(2)的解。由此可知，稳定的情形对应于 $c_i = 0$（c_i 为 c 的虚部）。以下提出一些已有定理。

Kuo-Rayleigh 定理 正压地转大气基流稳定的充分条件是在流域内，$\bar{\beta}_y$ 是一定号函数。

Fjørtoft 定理 对于不稳定性，如果速度是单调的，则 $|\bar{\beta}_y|$ 在流域内必有一最大值。

Howard 半圆定理 正压地转大气中不稳定的 Normal Mode 的谱点分布满足

$$c_i^2 + (c_r - \bar{u}_m/2)^2 \leqslant (\Delta\bar{u}/2)^2 + \beta\Delta\bar{u}/(\alpha^2 + \pi^2/4), \tag{3}$$

本文 1990 年 5 月 3 日收到。1991 年 1 月 27 日收到修改稿。

1) 张明华，中国科学院大气物理研究所博士论文，1987.

其中 $\bar{u}_m = \bar{u}_{max} + \bar{u}_{min}$，$\Delta\bar{u} = \bar{u}_{max} - \bar{u}_{min}$，$\bar{u}_{max}$、$\bar{u}_{min}$ 分别对应于 $\bar{u}$ 在流域内的最大和最小值。(3)式的结果可以形象地由图 1 示出。

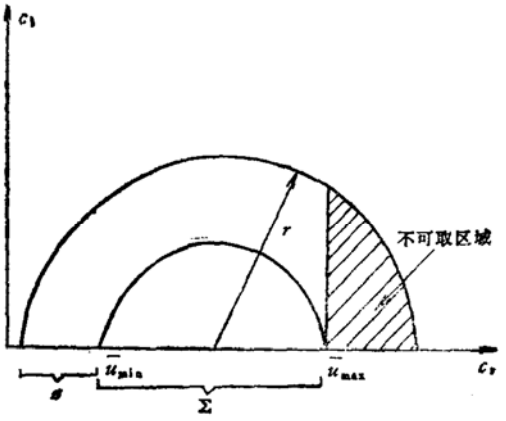

图 1　半圆定理示意图

图 1 中，将 c_r 轴上半圆内部分分成 Σ 域和 σ 域，σ 域的存在是有旋地球流体的特有现象，通常所指的中性 Rossby-Hauwitz 波即位于 σ 域内(一般称 Σ 域内的中性波为奇异中性波)。

从(3)式不难得到

$$\bar{u}_{min} - \beta\Delta\bar{u}/(\alpha^2 + \pi^2/4) \leqslant c_r \leqslant \bar{u}_{max}, \quad (4)$$

$$c_i^2 \leqslant (\Delta\bar{u}/2)^2 + \beta\Delta\bar{u}/(\alpha^2 + \pi^2/4). \quad (4)'$$

同时通过适当的数学变换，(2)式为

$$w_i\int_{y_1}^{y_2} dy\left[|G'|^2 + \alpha^2|G|^2 - \frac{1}{4}\bar{u}''|G/w|^2\right].$$

对于不稳定情形，$w_i \neq 0$，并且由于 $|w|^2 \leqslant |w_i|^2$，因而有

$$\alpha^2\int_{y_1}^{y_2} dy|G|^2 = \frac{1}{4}\int_{y_1}^{y_2} dy\bar{u}''^2|G/w|^2 - \int_{y_1}^{y_2} dy|G'|^2$$

$$\leqslant (\mathrm{Max}\bar{u}''^2)/4w_i^2\int_{y_1}^{y_2} dy|G|^2, \quad (\alpha w_i)^2 \leqslant \frac{1}{4}\mathrm{Max}\bar{u}''^2. \quad (5)$$

结合(4)′和(5)式有

$$\alpha_{um}^2\Delta\bar{u}^2 + 4\beta\alpha_{um}^2\Delta\bar{u}/(\alpha^2 + \pi^2/4) \sim \mathrm{Max}\bar{u}''^2.$$

由于 $\beta/\Delta\bar{u} \ll 1$，因而

$$\alpha_{um}^2 \sim \mathrm{Max}\bar{u}''^2/\Delta\bar{u}^2 - 16\beta/\pi^2\Delta\bar{u}. \quad (6)$$

(6)式表明，北半球中纬度 ($\beta > 0$) 西风带中最不稳定扰动所对应的波长略大于南半球中纬度 ($\beta < 0$) 东风带中最不稳定扰动所对应的波长，Kuo[4] 对此给出了定性说明，我们可由(6)式估计出两者之间的差值约为

$$\Delta\alpha_{um}^2 \sim 16\beta/\pi^2\Delta\bar{u}. \quad (7)$$

考虑如下 1 种基流分布[1]：

(i) $\bar{u} = \frac{1}{2}(1 + \cos y)$，$y \in [-\pi, \pi]$；(ii) $\bar{u} = -\tanh y$，$y \in (-\infty, +\infty)$；(iii) $\bar{u} = \mathrm{sech}^2 y$，$y \in (-\infty, +\infty)$。

对于 (i)，$\Delta\bar{u} = 1$，$|\bar{u}'_{max}| = 1/2$，$(\alpha w_i)^2_{max} \leqslant \frac{1}{4}\bar{u}'^2_{max} = 1/16$，$(\alpha w_i)_{max} \leqslant 1/4$，$\alpha_{um}^2 \sim \mathrm{Max}\bar{u}''^2/\Delta\bar{u}^2 = 1/4$，$\alpha_{um} \sim 1/2$。

对于 (ii)，$\Delta\bar{u} = 2$，$|\bar{u}|'_{max} = 1$，$(\alpha w_i)^2_{max} < \frac{1}{4}$，$(\alpha w_i)_{max} < 0.5$，$\alpha_{um} \sim 0.5$。

对于 (iii)，$\Delta\bar{u} = 1$，$|\bar{u}'_{max}| = 4\sqrt{3}/9$，$(\alpha w_i)_{max} < 2\sqrt{3}/9 \simeq 0.385$，$\alpha_{um} \sim 4\sqrt{3}/9 \simeq 0.77$。以上的结果与数值实验结果较为一致。

二、中 性 解

中性 Normal Mode 是指对应于 $c_i = 0$ 的解。从 K-R 定理可以看出，对于定号的 $\bar{\beta}_y$，

1) 同上页脚注。

c 只能位于 $\sigma+\Sigma$ 上. 同时从以下的分析可以看出，对于不定号的 $\bar{\beta}_y$，c 也可能位于 Σ 上，从而也有中性 Normal Mode 存在. 这就说明了为什么 $\bar{\beta}_y$ 不定号将是不稳定发生的必要条件而非充分条件. 以下将分别对 Σ 和 σ 域进行分析.

1. $c_r\in\Sigma$ ($c_r\in[\bar{u}_{\min},\bar{u}_{\max}]$)　对于 $\beta=0$ 的情形，Tollmein 已有深入的研究. 对于定号的 $\bar{u}''$，Tollmein 的结论和 Rayleigh 的定理结合在一起，会导致相互矛盾的结果，从而指出了 Normal Mode 不完备的困难. 对于 $\beta\neq 0$ 的情形，有类似于 Tollmein 的如下定理.

定理 1　对于对称的速度分布，如果 $\bar{\beta}_y$ 在流域内某处为零，那么一个中性Normal Mode是可能存在的.

定理 2　如果速度 $\bar{u}$ 是单调的或可分成两个单调部分，那么对于定号的 $\bar{\beta}_y$（正定或负定），$\bar{u}$ 在流场内无论何处均不能等于 c.

定理 2 的证明较长，此处略去，以下给出定理 1 的证明.

设 $K(y)=\bar{\beta}_y/(\bar{u}-\bar{u}_s)$ 在 y_s 处解析，其中 $\bar{u}(y_s)=c$，并记 $\lambda=-\alpha^2$，则(2)式可写为

$$\phi''+[K(y)+\lambda]\phi=0,\quad \phi|_{y_1}=\phi|_{y_2}=0, \tag{8}$$

(8)式是标准的 Sturm-Liouville 型方程. 由(8)式知

$$\lambda=\int_{y_1}^{y_2}dy[|\phi'|^2-K(y)|\phi|^2]\Big/\int_{y_1}^{y_2}dy|\phi|^2.$$

由变分原理知，λ 存在一最小值 λ_s:

$$\lambda_s=\int_{y_1}^{y_2}dy[|f'|^2-K(y)|f|^2]\Big/\int_{y_1}^{y_2}dy|f|^2,$$

f 是任一满足边条件的平方可积函数. 由不等式

$$(y_2-y_1)^2\int_{y_1}^{y_2}dy|f'|^2\geqslant\pi^2\Big/\int_{y_1}^{y_2}dy|f|^2 \tag{9}$$

知，如果在流域内处处有 $K(y)\geqslant\pi^2/(y_2-y_1)^2$，则 $\lambda_s<0$，即 $\alpha_s>0$，此时存在中性 Normal Mode. 注意这和 F-定理不矛盾，如果满足 F-定理中的条件，则 $K(y)$ 处处小于零，即不存在中性 Normal Mode. 同时由简单的分析知道，对于 $\alpha>\alpha_s$ 的情形，基流将是稳定的，反之则是不稳定的.

2. $c_r\in\sigma$　如果 $c_r\in\sigma$，则 $\bar{u}-c_r>0$，由定理 2 知，对于定号的 $\bar{\beta}_y$，必然导致 $c_r\in\sigma$. 此时 (2) 式可写成

$$\phi''+[\bar{\beta}_y/(\bar{u}-c_r)-\alpha^2]\phi=0,$$
$$\phi|_{y_1}=\phi|_{y_2}=0. \tag{10}$$

如果 $\bar{\beta}_y$ 负定，从上方程不难得出

$$\int_{y_1}^{y_2}dy\{|\phi'|^2+[\alpha^2+|\bar{\beta}_y|/(\bar{u}-c_r)]|\phi|^2\}=0.$$

除非 $\phi\equiv 0$ 这种情况，否则上式将不可能成立，也就是说 Normal Mode 将不存在，即不存在中性的 Rossby-Hauwitz 波.

反之，如果 $K(y)=(\beta-\bar{u}'')/(\bar{u}-c_r)$ 在流域内处处大于 $\pi^2/(y_2-y_1)^2$，则(10)式存在中性 Rossby-Hauwitz 波解. 而且由常微分方程理论知，(10)式的解只可能是单零点，它的零点或为有限多个或可数无限多个，且这些零点在开区域 $(\bar{u}_{\min},\bar{u}_{\max})$ 内无聚点，以下作详细分析.

如果(10)式存在解 ($\phi_1(y,c)$、$\phi_2(y,c)$ 为 y,c 的解析函数)，则 ϕ_1、ϕ_2 的任意线性组合 $\phi=A\phi_1+B\phi_2$ 也满足(10)式. 为使 ϕ 满足边条件，必有如下等式:

$$D(c) = \phi_1(y_1,c)\phi_2(y_2,c) - \phi_1(y,c)\phi_2(y,c) = 0. \tag{11}$$

由(10)式有

定理 3 在区域 σ 内，对于正定且满足一定条件的 $\beta_y/(\bar{u} - c_r)$ 而言，由(11)式所决定的零点 c 或为有限多或可数无限多，但不可能在开区间(σ)内有聚点. 如果有聚点的话，聚点只能在 σ 域的边界上. 定理 3 的证明可参见脚注 1). 以下举出一个例子略加说明.

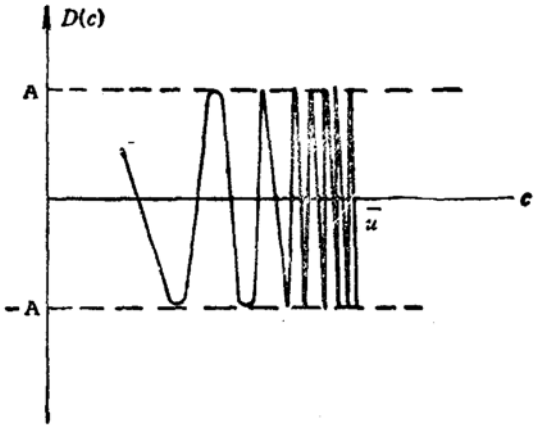

图 2 $D(c)$ 示意图

$\bar{u}$ = constant，则 $\bar{u} \neq c$，方程(10)有解 $\phi = A\phi_1 + B\phi_2$，其中 $\phi_1 = \sin my$，$\phi_2 = \cos my$，$y \in [0,L]$. 为使 ϕ 满足边条件，有

$$D(c) = A\sin\sqrt{\alpha^2 + \beta/(\bar{u} - c)}\,L) = 0,$$

从而 $c_n = \bar{u} - \beta/(\alpha^2 + n^2\pi^2/L^2)$，$\{c_n\}$ 为可数无限多且其聚点 $\bar{c} = \lim_{n\to\infty} c_n = \bar{u}$，如图 2.

三、Normal Mode 的困难及克服方法

由以上分析知，对于负定的 β_y，在定理 2 的条件下使得 $c \notin \Sigma$，同时负定的 β_y 也使得 $c \notin \sigma$，然而这和 K-R 定理相矛盾. 矛盾的根源在于以上的分析中，不顾条件地套用 Normal Mode 分析方法. 实际天气资料分析表明，中纬度存在许多 β_y 负定的情形，然而天气系统却仍然存在发展与衰减. 因而看来，Normal Mode 对于描述所有可能的扰动形式而言并不完备. 同时理论分析表明，除 Normal Mode 以外还存在着另一类形式的扰动——连续谱，正是连续谱的存在使得西风环流得以维持.

致谢：作者在完成该工作过程中，曾与曾庆存教授作过许多有益的讨论，在此表示衷心谢意.

参 考 文 献

[1] Hoiland, E., *Geofys. Publ.*, 18(1953), 9: 1—12.

[2] Case, K. M., *Phys. Fluids*, 1960, 3: 143—148.

[3] Zeng, Q. C. et al., *Advances in Atmos. Sci.*, 3(1980), 39—58.

[4] Kuo, H. L., *Advances in Applied Mech.*, Vol. 13, Academic Press, 1973.