二维 Euler 方程的整体光滑解

穆　穆

(中国科学院大气物理研究所，北京 100080)

关键词　地球流体力学、Euler 方程、整体光滑解

已有不少作者研究了二维 Euler 方程初边值问题整体光滑解的存在性问题. Kato[1] 与 Kozono[2] 分别在不随时间变化的多连通区域与随时间变化的多连通区域中考察了这一问题，但他们研究的方程是惯性坐标系中的形式，未考察柯氏力的作用. 作者[3] 曾证明了单连通区域中具柯氏力作用的二维 Euler 方程初边值问题整体光滑解的存在性. 在地球流体力学中，也有人开始研究多连通区域中具柯氏力作用的二维 Euler 方程[4,5]. 作者迄今未见关于该类问题整体光滑解的存在性的研究. 本文以文献[6]的方法为基础，利用 Kelvin 速度环流定理给出了流函数在边界上满足的约束条件，进而得到了具柯氏力的二维 Euler 方程在随时间变化的多连通区域中存在整体光滑解的充分必要条件. 本文结果包含了文献[1,2]结果为其特例，而证明方法不同，显得较为简单.

设区域 $Q=\bigcup_{t>0}Q(t)$，而 $\{Q(t)\}_{t>0}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中一族有界多连通区域. Q 的边界 $\Gamma=\bigcup_{t>0}\partial Q(t)$ 是 C^∞ 光滑的，可由 C^∞ 函数 $\gamma(x_1,x_2,t)=0$ 表示，$\partial Q(t)$ 的单位外法向量 $\boldsymbol{n}=(\gamma_{x_1}/|\nabla_x\gamma|,\gamma_{x_2}/|\nabla_x\gamma|)$. 又设 $\partial Q(t)=\bigcup_{j=0}^{m}\partial_jQ(t)$，这里 $\{\partial_jQ(t)\}_{j=0}^m$ 是 $m+1$ 条简单闭曲线，$\{\partial_jQ(t)\}_{j=1}^m$ 在 $\partial_0Q(t)$ 的内部. 当 $i\neq 0$，$j\neq 0$ 且 $i\neq j$ 时，$\partial_iQ(t)$ 在 $\partial_jQ(t)$ 的外部.

记 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 为速度向量，$\boldsymbol{u}_0=(u_1^0,u_2^0)$ 为初始速度，$\boldsymbol{F}=(f_1(x_1,x_2,t),f_2(x_1,x_2,t))$ 为外力，ω 为科氏参数，p 为压力，矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. 考察初边值问题

$$(E)\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\nabla p+\omega A\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F},\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0,\\ \left(\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}+u_1\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_2}\right)\Big|_\Gamma=0,\\ \boldsymbol{u}|_{t=0}=\boldsymbol{u}_0.\end{cases}\qquad \text{在 } Q \text{ 中}$$

本文得到了

定理　下述命题等价

(i) 问题 (E) 存在整体光滑解；

(ii) 对 $\forall t\geqslant 0$，$\int_{\partial Q(t)}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}\Big/|\nabla_x\gamma|\,dl_t=0$，

本文 1989 年 6 月 30 日收到.

这里 dl_t 是 $\partial\Omega(t)$ 上的线元.

(iii) 存在以 t 为参数的一族映射 $X_t:(y_1,y_2)\longmapsto(x_1(y_1,y_2,t),x_2(y_1,y_2,t))$，使得：($\alpha$) 对 $\forall t\geqslant 0$，X_t 是从 $\bar{\Omega}(0)$ 到 $\bar{\Omega}(t)$ 的微分同胚；(β) 对 $\forall t\geqslant 0$，X_t 是保测度的. (γ) X_t 关于参数 t 光滑.

由文献[3]可知，欲证该定理，我们只需证明在条件 (ii)、(iii) 皆成立的假定下，命题 (i) 成立.

在多连通区域中考察问题 (E) 时，主要困难在于导出流函数在边界上满足的约束条件. Kato[1] 与 Kozono[2] 将速度场分解，达到了这一目的. 在随时间变化的区域中，这种方法显得特别繁琐[2]. 下面将用 Kelvin 速度环流定理，导出速度环流由初始速度场与外力所确定的关系式，为下面导出流函数在边界上满足的约束条件作准备.

记 $\Gamma_j(t)=\partial_j\Omega(t)$，$dl_t=(-\gamma_{x_2}/|\nabla_x\gamma|,\gamma_{x_1}/|\nabla_x\gamma|)dl_t$，利用 Kelvin 速度环流定理与 (E) 中的边界条件，易得

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_j(t)}\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{l}_t=\int_{\Gamma_j(t)}\left(\frac{\omega}{|\nabla_x\gamma|}\frac{\partial\gamma}{\partial t}dl_t+\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}_t\right),\quad j=1,\cdots,J.$$

因而问题 (E) 的整体光滑解 $\boldsymbol{u}$ 还应满足

$$\int_{\Gamma_j(t)}\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{l}_t=\int_{\Gamma_j(0)}\boldsymbol{u}_0\cdot d\boldsymbol{l}_0+\int_0^t ds\int_{\Gamma_j(s)}\left(\frac{\omega}{|\nabla_x\gamma|}\frac{\partial\gamma}{\partial s}dl_s+\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}_s\right),\quad j=1,\cdots,J. \tag{1}$$

现在证明，在条件 (ii)、(iii) 成立的假定下，问题 (E) 存在满足(1)式的整体光滑解.

由条件 (ii) 可知，存在函数 $H\in C^\infty(\bar{Q})$，满足 $\left\{\nabla^2H=0,\text{ 在 }Q\text{ 中};\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\gamma_{x_1}+\frac{\partial H}{\partial x_2}\gamma_{x_2}+\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)\Big|_\Gamma=0\right\}$. 令 $\boldsymbol{W}=(W_1,W_2)=(H_{x_1},H_{x_2})$，则

$$\begin{cases}\operatorname{div}\boldsymbol{W}=0,\text{ 在 }Q\text{ 中}\\(W_1\gamma_{x_1}+W_2\gamma_{x_2}+\gamma_t)|_\Gamma=0,\end{cases} \tag{2}$$

再令 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{W}$，则

$$\begin{cases}\operatorname{div}\boldsymbol{V}=0,\text{ 在 }Q\text{ 中}\\(V_1\gamma_{x_1}+V_2\gamma_{x_2})|_\Gamma=0.\end{cases} \tag{3}$$

因为速度场 $\boldsymbol{V}$ 满足(3)式，可引入单值流函数 $\phi(x_1,x_2,t)$，使

$$V_1=\frac{\partial\phi}{\partial x_2},\quad V_2=-\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\quad \phi|_{\Gamma_0(t)}\equiv 0,\ \forall t\geqslant 0. \tag{4}$$

再对 (E) 的运动方程施行涡度运算，即将问题 (E) 及(1)式化为

$$(E)^*\begin{cases}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}+W_1\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+W_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\right]\Delta\phi=R(\boldsymbol{F},\omega,\boldsymbol{W},\phi),\text{ 在 }Q\text{ 中}\\\phi|_{\Gamma_0(t)}=0,\ \forall t\geqslant 0;\ \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\Big|_{\Gamma_j(t)}=0,\ \forall t\geqslant 0,\ j=1,\cdots,J,\\\int_{\Gamma_j(t)}\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}dl_t=G_j(t),\ j=1,\cdots,J,\\(\Delta\phi)_{t=0}=l(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{W}_0),\end{cases}$$

这里

$$R(\boldsymbol{F},\omega,\boldsymbol{W},\phi)=\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}+W_1\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_2}-\frac{\partial W_2}{\partial x_1}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}-W_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_2}-\frac{\partial W_2}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_2}-\frac{\partial W_2}{\partial x_1}\right)$$
$$+\left(W_2-\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+\left(W_1+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_2},$$

$$G_j(t)=\int_{\Gamma_j(t)}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{l}_t-\int_{\Gamma_0(0)}\boldsymbol{u}_0\cdot d\boldsymbol{l}_0-\int_0^t ds\int_{\Gamma_j(s)}\left(\frac{\omega}{|\nabla_x\gamma|}\frac{\partial\gamma}{\partial s}\,dl_s+\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}_s\right),$$

$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $\frac{\partial}{\partial\tau}$ 表示沿 $\partial\Omega(t)$ 的切向求导.

$$I(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{W}_0)=\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2^0}{\partial x_1}+\frac{\partial W_2^0}{\partial x_1}-\frac{\partial W_1^0}{\partial x_2}.$$

下面再将 (E^*) 化成柱状区域中的定解问题. 由假定 (iii), 映射

$$X_t^{-1}:(x_1,x_2,t)\longmapsto(y_1(x_1,x_2,t),y_2(x_1,x_2,t),t),$$

将 Ω 映成柱状区域 $\tilde{\Omega}=\Omega(0)\times[0,\infty)$, 其边界为 $\tilde{\Gamma}=\bigcup_{j=0}^{J}\tilde{\Gamma}_j=\bigcup_{j=0}^{J}\{\partial_j\Omega(0)\times[0,\infty)\}$. 拉普拉斯算子 Δ 成为 $\Omega(0)$ 上系数光滑依赖于参数 t 的二阶线性椭圆偏微分算子 $A(t)$, 法向求导算子 $\frac{\partial}{\partial n}$ 成为 $\partial\Omega(0)$ 上系数光滑依赖于参数 t 的一阶线性偏微分算子 $B(t)$. 对任何定义在 Ω 中的函数 h, 定义 $\tilde{h}=h\circ X_t$, 则问题 $(E)^*$ 化成

$$(E)^{**}\begin{cases}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}-\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y_2}+\tilde{W}_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\tilde{W}_2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial y_1}{\partial t}\right]\frac{\partial}{\partial y_1}\right.\\ \quad\left.+\left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}-\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y_1}+\tilde{W}_1\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\tilde{W}_2\frac{\partial y_2}{\partial x_2}+\frac{\partial y_2}{\partial t}\right]\frac{\partial}{\partial y_2}\right\}A\tilde{\phi}\\ \quad=R(\tilde{F},\tilde{\omega},\tilde{W},\tilde{\phi}), \qquad \text{在 } \tilde{Q} \text{ 中}\\ \tilde{\phi}|_{\tilde{\Gamma}_0}=0;\ \left.\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tau}\right|_{\tilde{\Gamma}_j}=0,\ j=1,\cdots,J.\\ \int_{\tilde{\Gamma}_j}B(t)\tilde{\phi}\,d\tilde{l}_t=\tilde{G}_j(t),\ j=1,\cdots,J.\\ (A\tilde{\phi})|_{t=0}=I(\tilde{u}_0,\tilde{W}_0).\end{cases}$$

至此,问题已化为文献[6]所考察过的双曲-椭圆复合型方程的初边值问题,但边界条件不同. 仔细分析文献[6]中定理 6.1 的证明可知,欲用那里的办法证明 $(E)^{**}$ 整体光滑解的存在性,我们需要下面两个引理.

引理 1 设 φ 是满足 $\varphi|_{\tilde{\Gamma}_0}=0$, $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|_{\tilde{\Gamma}_j}=0$, $j=1,\cdots,J$ 的任意连续可导函数. 这时曲面 $\tilde{\Gamma}$ 是算子

$$\frac{\partial}{\partial t}+\left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}-\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}+\tilde{W}_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\tilde{W}_2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial y_1}{\partial t}\right]\frac{\partial}{\partial y_1}$$
$$+\left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}-\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\tilde{W}_1\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\tilde{W}_2\frac{\partial y_2}{\partial x_2}+\frac{\partial y_2}{\partial t}\right]\frac{\partial}{\partial y_2}$$

的特征曲面.

证 记 $\tilde{\gamma}(y_1,y_2,t)=\gamma(x_1(y_1,y_2,t),x_2(y_1,y_2,t),t)$. 我们只需证明

$$\left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}-\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}+\tilde{W}_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\tilde{W}_2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial y_1}{\partial t}\right]\tilde{\gamma}_{y_1}$$

$$+\left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}-\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}+\widetilde{W}_1\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\widetilde{W}_2\frac{\partial y_2}{\partial x_2}+\frac{\partial y_2}{\partial t}\right]\tilde{\gamma}_{y_2}|_\Gamma=0. \tag{5}$$

由(2)式可知

$$\left[\widetilde{W}_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\tilde{\gamma}_{y_1}+\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\tilde{\gamma}_{y_2}\right)+\widetilde{W}_2\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\tilde{\gamma}_{y_1}+\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\tilde{\gamma}_{y_2}\right)+\frac{\partial y_1}{\partial t}\tilde{\gamma}_{y_1}+\frac{\partial y_2}{\partial t}\tilde{\gamma}_{y_2}\right]\Big|_\Gamma$$
$$-(W_1\gamma_{x_1}+W_2\gamma_{x_2}+\gamma_t)|_\Gamma=0.$$

再利用 φ 满足的边界条件，即知(5)式成立. 证毕.

下一引理给出了椭圆边值问题的适定性及有关先验估计.

定义 设 $\varphi(y)$ 是 $\bar{\Omega}(0)$ 上的连续可导函数，定义

$$|||\varphi(y)|||_{C^1(\bar{\Omega}(0))}=\|\varphi(y)\|_{C^1(\bar{\Omega}(0))}+\sup_{\substack{y',y''\in\bar{\Omega}(0)\\ |y'-y''|<1}}\sum_{|\alpha|=1}\frac{|D^\alpha\varphi(y')-D^\alpha\varphi(y'')|}{\chi(|y'-y''|)},$$

这里 $\chi(s)=s(1-\ln s)$，$0<s<1$.

利用变分方法及文献[6]中定理 4.1，我们有

引理 2 设 $g\in H^k(\bar{\Omega}(0))$，$k\geqslant 0$，这时存在唯一的 $\tilde{\varphi}(t)\in H^{k+2}(\bar{\Omega}(0))$，满足

$$\begin{cases}A(t)\tilde{\varphi}(t)=g, \text{ 在 } \Omega(0) \text{ 中},\\ \tilde{\varphi}|_{\Gamma_0}=0,\ \left.\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tau}\right|_{\Gamma_j}=0,\ j=1,\cdots,J,\\ \displaystyle\int_{\Gamma_j}B(t)\tilde{\varphi}(t)d\Gamma_t=\tilde{G}_j(t),\ j=1,\cdots,J.\end{cases}$$

此外，对任何 $T>0$，存在与 t，$\tilde{\varphi}$ 与 g 无关的常数 C_T，使成立先验估计式

$$\|\tilde{\varphi}(t)\|^2_{H^{k+2}(\bar{\Omega}(0))}\leqslant C_T\left(\|g\|^2_{H^k(\bar{\Omega}(0))}+\sum_{j=1}^{J}|\tilde{G}_j(t)|^2\right),\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

$$|||\tilde{\varphi}(t)|||^2_{C^2(\bar{\Omega}(0))}\leqslant C_T\left(\|g\|^2_{C^0(\bar{\Omega}(0))}+\sum_{j=1}^{J}|\tilde{G}_j(t)|^2\right),\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

因篇幅所限，略去引理 2 的证明.

最后，用引理 1 代替文献[6]中的基本假定 $(H2)$，用引理 2 代替那里的基本假定 $(H1)$ 及定理 4.1，即可证明 $(E)^{**}$ 存在整体光滑解. 至此，定理证毕.

参 考 文 献

[1] Kato, T., *Arch. Rational Mech. Anal.*, 25(1967), 188—200.
[2] Kozono, H., *J. Diff. Eq.*, 57(1985), 275—302.
[3] Mu Mu, *Kexue Tongbao*, 33(1988), 1295—1299.
[4] 曾庆存，数值天气预报的数学物理基础，第一卷，科学出版社，北京，1979.
[5] Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1979.
[6] 穆穆，数学物理学报，6(1986)，201—218