# 中子扩散方程的PINN源迭代法求解精度与收敛性优化研究

曹 允[1] 庄 坤[1] 陈金根[2]

1（南京航空航天大学 材料科学与技术学院 南京 211106）

2（中国科学院上海应用物理研究所 上海 201800）

**摘要** 准确预测有效增殖因数（$k_{eff}$）对反应堆物理设计与安全分析至关重要。近年来，物理信息神经网络（Physics-Informed Neural Networks，PINN）为其提供了一种无网格的机器学习求解范式，但在求解多材料区域问题时因其表达能力瓶颈导致精度和收敛性严重下降。针对该问题，本研究建立了基于PINN源迭代法求解中子扩散方程的算法，并通过单区域均匀问题验证了其正确性。在多材料区域问题中，引入了残差自适应重采样和权重动态调整策略，数值结果表明，在材料截面平滑过渡问题中，残差自适应重采样与权重动态调整策略均能提升预测精度，特别是后者不仅改善了收敛稳定性，更将$k_{eff}$预测误差由$9.89\times10^{-3}$降低至$6.3\times10^{-4}$。针对多区问题中由于中子通量梯度大导致上述优化策略失效，预测精度难以满足反应堆物理计算要求的情况，采用分域物理信息神经网络（Extended Physics Informed Neural Networks，XPINN），并利用二维TWIGL基准题进行验证。结果表明，XPINN的$k_{eff}$预测误差仅为$2.5\times10^{-4}$，较单网络模型精度提升超过一个数量级，并在收敛过程中表现出良好的稳定性。本研究提出的优化框架在复杂非均匀问题中的预测精度与训练稳定性上均表现出较大优势，为PINN方法在多区中子扩散问题中的应用提供了新的思路与参考。

**关键词** 物理信息神经网络，中子扩散方程，分域神经网络，精度优化策略，多区子网

**中图分类号** TL325，TP183

**DOI:** 10.3724/j.0253-3219.2026.hjs.49.250351

**CSTR:** 32193.14.hjs.CN31-1342/TL.2026.49.250351

# A physics-informed neural network source iteration approach for improved accuracy and convergence in neutron diffusion problems

CAO Yun[1] ZHUANG Kun[1] CHEN Jingen[2]

1(*College of Materials Science and Technology*, *Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, *Nanjing 211106*, *China*)

2(*Shanghai Institute of Applied Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Shanghai 201800*, *China*)

**Abstract** **[Background]** The accurate solution of the neutron diffusion equation to determine the effective multiplication factor ($k_{eff}$) is fundamental to nuclear reactor design and safety analysis. However, the performance of a standard single-network Physics-Informed Neural Networks (PINN) is often limited when applied to practical multi-material problems, exhibiting significant accuracy degradation, particularly at the interfaces between disparate materials where steep neutron flux gradients arise. **[Purpose]** This study aims to propose an algorithm for solving the neutron diffusion equation based on the PINN source iteration method and introduces multiple optimization strategies

国家自然科学基金(No.12435012)资助

第一作者：曹允，男，2002年出生，2024年毕业于烟台大学，现为硕士研究生，研究领域为核科学与技术

通信作者：庄坤，E-mail：kzhuang@nuaa.edu.cn

收稿日期：2025-09-25，修回日期：2025-12-02

Supported by National Natural Science Foundation of China (No.12435012)

First author: CAO Yun, male, born in 2002, graduated from Yantai University in 2024, master student, focusing on nuclear science and technology

Corresponding author: ZHUANG Kun, E-mail: kzhuang@nuaa.edu.cn

Received date: 2025-09-25, revised date: 2025-12-02

to address the limitations in complex multi-region problems, thereby achieving high-accuracy and robust solutions to the neutron diffusion eigenvalue problem. **[Methods]** First, the correctness of the source iteration algorithm was verified on a standard single-region homogeneous example. For multi-region problems with relatively small differences in material cross-sections, two optimization methods, Residual Adaptive Resampling (RAR) and Weight Adaptive, were employed to enhance the expressive capacity of the model. Furthermore, for multi-region problems with steep neutron flux gradients at region interfaces, which made these optimization methods ineffective, the Extended Physics-Informed Neural Network (XPINN) framework was applied and validated using the TWIGL benchmark. **[Results]** The results show that, for multi-region problems with relatively small cross-section differences, the unoptimized PINN produces a $k_{\mathrm{eff}}$ prediction error of $9.89\times10^{-3}$. Both RAR and Weight Adaptive optimization strategies improve prediction accuracy and convergence performance, with the Weight Adaptive method being the most effective, reducing the error to $6.3\times10^{-4}$. In contrast, for the TWIGL benchmark problem involving steep neutron flux gradients at material interfaces, the single-network PINN and its associated optimizations fail, yielding errors exceeding $1\times10^{-2}$. With the application of the XPINN framework, however, the $k_{\mathrm{eff}}$ prediction error is reduced to just $2.5\times10^{-4}$, representing more than an order-of-magnitude improvement and exhibiting excellent convergence stability. **[Conclusions]** The optimization framework for solving neutron diffusion equation proposed in this study substantially enhances the performance of standard PINN algorithm, exhibiting notable advantages in prediction accuracy and training stability, and thereby providing a more effective solution to such challenges.

**Key words** Physics-informed neural networks, Neutron diffusion equation, Extended physics informed neural networks, Accuracy optimization strategies, Multi-region subnetworks

中子学分析在反应堆设计、堆芯监测、核数据研究与安全分析等多个方向中发挥着关键作用[1−3]，而中子扩散理论作为该领域的基础模型，被广泛用于工程计算与数值模拟。在传统数值求解方法中，有限差分法已被广泛应用于中子扩散方程的求解，该方法通过将物理域和控制方程离散化为规则的网格和相应的代数方程组进行求解，网格质量直接制约着最终的计算精度。对于复杂几何，高质量网格的生成本身就极具挑战，而网格单元数又随空间维度呈指数级增长。这使其在复杂问题求解中面临重大困难。近年来，深度学习方法逐渐成为偏微分方程求解领域的研究热点。Raissi等[4]提出的物理信息神经网络方法，其核心思想是直接在一个由深度神经网络定义的连续函数空间中搜索问题的解析近似解[5]。作为一种无网格的深度学习方法，其在复杂场景下的应用具备显著优势。物理信息神经网络（Physics-Informed Neural Networks，PINN）方法已被广泛应用于核反应堆物理[6−7]、流体力学[8−9]、量子力学[10−11]等众多科学与工程领域，并取得了丰富的研究成果。

目前，PINN方法在中子扩散方程求解中得到了持续关注。Elhareef和Wu[7]首次将PINN模型融入传统源迭代法，将其应用于中子扩散固定源问题和特征值问题中，并通过在多群多区域算例上的数值计算，验证了这一算法的可行性；刘东等[12−13]提出了$k_{\mathrm{eff}}$的直接搜索和并行搜索方法，直接搜索法将$k_{\mathrm{eff}}$作为一个可学习的网络参数，与神经网络权重等共同进行优化，该方法将$k_{\mathrm{eff}}$的求解转化为一个依赖于物理残差的优化问题；并行搜索法则将稳态扩散方程转化为带时间项的瞬态方程，通过监测瞬态过程中子通量的时间导数变化状态，来为$k_{\mathrm{eff}}$的调整提供明确的方向。Yang等[14]则提出了数据驱动的物理信息神经网络（Data-Enabled Physics Informed Neural Network，DEPINN），DEPINN框架通过在损失函数中额外引入一个由少量高精度先验数据构成的监督项，将物理模型与数据知识进行融合，这些先验数据能够有效地约束解空间，引导网络向正确的物理解收敛，从而在复杂特征值问题中显著提升预测精度。这些研究充分展现了PINN方法在中子扩散模型中的广泛适用性和应用潜力，然而纯物理驱动的单网络PINN方法在多材料非均匀区域特征值问题的应用面临根本性的精度瓶颈，而DEPINN成功应用依赖于高精度先验数据，这在许多初始设计或缺乏实验数据的场景中难以满足。

本文以PINN源迭代算法求解中子扩散方程为基础，针对多材料区域中因截面差异导致的网络表达能力不足问题，提出并评估了一种纯物理驱动的优化框架，旨在提升PINN在多材料区域特征值问题中的求解精度，以满足反应堆物理计算的要求。在多材料截面平滑过渡问题中，引入残差自适应重采样与权重动态调整两种训练策略，并验证了其均能有效提升预测精度。针对中子通量在材料界面剧

烈突变导致的单网络拟合困难问题，本研究在迭代框架中引入分域神经网络算法，通过多子网协同优化，提高了PINN求解中子扩散方程的精度和收敛性能。通过不同复杂程度问题计算，对各优化方法的效果和适用性进行了评价。

## 1 基于PINN的中子扩散方程求解

### 1.1 物理信息神经网络

物理信息神经网络是一种将物理定律嵌入学习过程的深度学习算法。其利用一个深度神经网络$N(x,\theta)$，通常是全连接前馈网络，来近似问题的未知解。全连接前馈网络的数学表达可递归地定义，即对于一个L层的网络，其第$k$层的输出$Z_k$为：

$$Z_k = f_a(Z_{k-1}\cdot W_k + B_k) \tag{1}$$

式中：$Z_k$为第$k$层的输出；$Z_0 = x$为网络输入向量；网络参数$\theta = (W_k, B_k)$，由各层权重矩阵$W_k$和偏置矩阵$B_k$构成；$f_a$为激活函数。本文选用双曲正切函数（tanh）作为激活函数，因其具有无限阶光滑且高阶导数不为零的特性，适用于偏微分方程的求解。

PINN的工作流程可分为前向传播与反向传播两个核心阶段。在前向传播阶段，网络根据输入坐标计算物理残差。在训练初，输入向量$X$（如空间坐标）被送入网络的输入层。信息随即逐层向前传递，每一层的神经元都对来自前一层的结果进行线性变换（权重乘积与偏置求和）与非线性激活，直至最后一层输出预测解。此过程的关键技术为自动微分。利用该技术，PINN能够精确地计算出网络输出关于其输入$X$的任意阶导数。最终，将网络输出及其导数代入待解的偏微分方程和边界条件中，即可计算出物理残差，并依据均方误差准则构建出当前总损失函数Loss，其形式表示为：

$$\begin{aligned}\mathrm{Loss} = &\frac{1}{N_\mathrm{b}}\sum_{i=1}^{N_\mathrm{b}}\left[Y_\mathrm{b}^{\mathrm{net}}(X_\mathrm{b}) - Y_\mathrm{b}(X_\mathrm{b})\right]^2 + \\ &\frac{1}{N_\mathrm{f}}\sum_{i=1}^{N_\mathrm{f}}\left[Y_\mathrm{f}^{\mathrm{net}}(X_\mathrm{f})\right]^2\end{aligned} \tag{2}$$

式中：右侧的第一项为边界损失，计算了$N_\mathrm{b}$个边界点$X_\mathrm{b}$上网络预测值$Y_\mathrm{b}^{\mathrm{net}}$与真实边界值$Y_\mathrm{b}$之间的均方误差；第二项为物理方程损失，计算了在$N_\mathrm{f}$个求解域内部的配置点$X_\mathrm{f}$上，物理残差$Y_\mathrm{f}^{\mathrm{net}}$的均方误差。通过此过程，前向传播最终将网络的预测性能量化为一个可供优化的标量。

在构建出总损失函数后，反向传播阶段的目的便是计算该损失关于网络中所有可训练参数$\theta = (W_k, B_k)$的梯度$\partial L/\partial\theta$。从网络的最后一层开始，首先计算出总损失关于输出层的梯度，该梯度信息会逐层向后传递。在每一层$k$，算法会利用来自后一层$k+1$的梯度信息，并且结合本层的激活函数的导数，通过链式法则计算出损失关于本层输出$Z_k$、权重$W_k$和偏置$B_k$的梯度。在获得了这些指明了最优下降方向的梯度后，梯度下降类优化器（本文选用Adam优化器）便会利用它们对网络参数$\theta$进行迭代更新，从而使经网络处理的信息更加贴近待解方程。通过反复执行前向与反向传播，总损失函数被逐渐最小化，直至预测解收敛。

### 1.2 PINN与源迭代法的结合算法

在无外源的情况下，稳态多群中子扩散方程可表示为：

$$\begin{aligned}&-D_g\nabla^2\phi_g(r) + \Sigma_{t,g}(r)\phi_g(r) - \sum_{g'}^{G}\Sigma_{g'-g}\phi_{g'}(r) = \\ &\frac{1}{k_\mathrm{eff}}Q_g(r), g = 1,2,...,G\end{aligned} \tag{3}$$

$$Q_g(r) = \chi_g\sum_{g'=1}^{G}\nu\Sigma_{f,g'}\phi_{g'}(r) \tag{4}$$

式中：$D_\mathrm{g}$为第$g$群的扩散系数；$r$表示空间坐标；$\phi_g(r)$为第$g$群的中子通量；$\Sigma_{t,g}(r)$为第$g$群的总截面；$\Sigma_{g'-g}$为中子由第$g'$群散射至第$g$群的散射截面；$k_\mathrm{eff}$为有效增殖因子；$Q_g(r)$为第$g$群的裂变中子源；$\chi_g$为第$g$群的裂变能谱；$\nu\Sigma_{f,g'}$为第$g'$群的中子产生截面；$G$为能群总数。

在反应堆数值计算中，广泛地应用源迭代法来近似求解多群扩散方程。该方法的核心思想是在每次迭代中，以源项和$k_\mathrm{eff}$作为已知量，将多群扩散特征值方程转化为一组非齐次方程，通过迭代求解不断更新中子通量和$k_\mathrm{eff}$，直至达到收敛条件。

本文采用PINN与源迭代融合算法（图1），对二维两群稳态中子扩散方程进行求解。通过在外迭代中不断更新源项$Q$和$k_\mathrm{eff}$，并在内迭代中利用具有两输出的神经网络模型分别输出热群和快群中子通量。神经网络函数形式为：

$$\Phi(x,y) = f(w,b,l,n,x,y) \tag{5}$$

式中：$\Phi(x,y)$为包含两群通量的输出向量；$w$为网络权重；$b$为偏置；$l$为神经网络层数；$n$为每层神经元数；$x,y$为空间输入变量。

该算法流程为：

1）设置外迭代最大次数，生成训练集采样点$(x, y)$，给定两群通量初值$\Phi_0$及有效增殖因数初值$k_0$，并根据初始通量计算初始源项$Q_0$。

2）将$Q_0$和$k_0$代入式（3）右端，此时式（3）右端便成为已知项。将训练集输入神经网络，经网络处理后，得到通量预测值$\Phi_{\mathrm{pred}}(x, y)$。此时根据当前网

络输出和已知源项，可得到方程约束项，并与其他约束项共同构建出损失函数。通过最小化该损失函数实现网络参数的优化，使网络输出的中子通量尽可能满足当前物理方程。在内迭代过程中，设定收敛判据为Loss<$\sigma$，其中，$\sigma$依据具体算例进行调整，通常在$10^{-3}$~$10^{-5}$取值，以确保模型在精度与计算成本之间达到合理的平衡。

3）利用输出的收敛中子通量密度，更新裂变源项$Q$和有效增殖因数$k_{\mathrm{eff}}$。

4）判断外迭代是否满足收敛条件，通常采用以下收敛准则：

$$abs\left[\left(k_{\mathrm{eff}}^{n}-k_{\mathrm{eff}}^{n-1}\right)/k_{\mathrm{eff}}^{n-1}\right]<\varepsilon_1 \tag{6}$$

$$norm\left(Q^{n}-Q^{n-1}\right)/norm\left(Q^{n}\right)<\varepsilon_2 \tag{7}$$

式中：$abs(\cdot)$为绝对值函数；$norm(\cdot)$为L2范数；$\varepsilon_1$和$\varepsilon_2$通常分别取$10^{-6}$和$10^{-5}$。若未收敛，则重复步骤2）和3），直至满足准则。

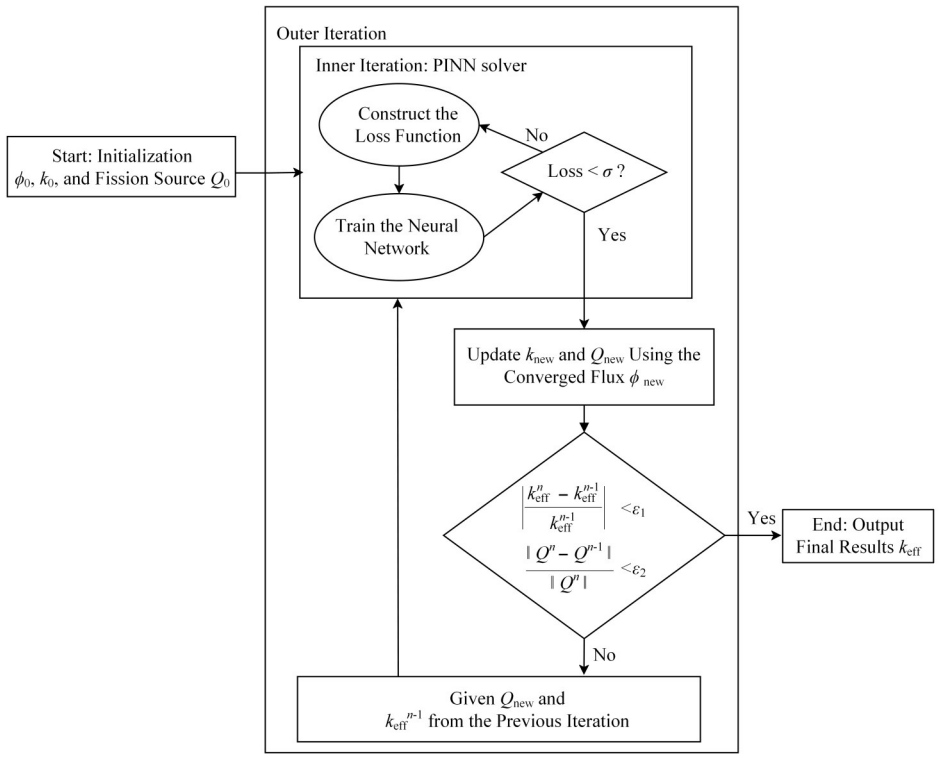



**图1**　PINN源迭代算法流程图
**Fig.1**　Flowchart of the proposed PINN-based source iteration algorithm

## 2　优化方法

前述PINN源迭代算法应用于多区域中子扩散问题时，遇到了影响预测精度和收敛性的问题。例如，由于区域间材料截面存在差异，物理残差高度集中在材料交界处等关键区域，而常规的全局均匀采样策略对此关注不足，限制了模型预测精度[15]。同时，由多个约束项构成的损失函数，其各项的收敛特性与对最终解的贡献度不一致，为避免因权重分配不当而导致的收敛困难，需平衡这些物理约束项，从而保证训练质量[16]。为应对上述训练层面的挑战，本文研究了基于残差的自适应重采样与权重动态调整两种优化策略。此外，在求解强非均匀的TWIGL基准问题时（详见§3.2），发现训练层面的优化方法效果较差，单网络模型对该类问题存在固有的表达能力瓶颈[17-18]。为此，本文从网络架构层面进行优化，引入了分域物理信息神经网络框架。

### 2.1　基于残差的自适应重采样

基于残差的自适应重采样方法（Residual Adaptive Resampling，RAR）通过动态识别高残差区域，并周期性地增加这些区域的采样点密度，从而增强模型对该区域的表达能力。训练前，将物理求解域均匀划分为$\alpha^2$个子网格区域。训练过程中，程序每间隔$n$步评估各子区域的残差，定位当前残差值最高的子区域，并在该区域内补充*n_points*个采样点，与原训练集合并形成新的训练集。如此循环，直到总采样点数达预设上限或网络收敛。上述过程中，$\alpha$、$n$以及*n_points*等参数可根据具体算例灵活设定，以实现该方法的最优效果。

图2为RAR方法在二维问题中的采样点自适应分布示意图。随着训练过程的进行，算法在被识别出的高残差局部区域内增加了采样点密度（图中 $x$ 点）。

本文以§3.2所述的平滑过渡五区问题，对该方法进行了验证，并在训练收敛后对物理残差进行分区统计评估。结果如图3所示。图中的实心条形代表残差的中位数，而斜线填充条形代表残差的均值，分界区域为各材料区交界处附近5 cm宽度的带状区域。

在不应用优化方法情况下，分界区域和燃料区1的残差均值水平最高。在引入RAR策略后，两个区域的残差水平得到了有效的改善，分界区域的残差均值降低21.5%，燃料区1的残差均值降低34%。该结果证明了RAR能够精准识别并有效改善高残差区域的模型性能。同时，RAR通过增加在复杂区域的采样点，能够实现计算资源的合理分配，减少了

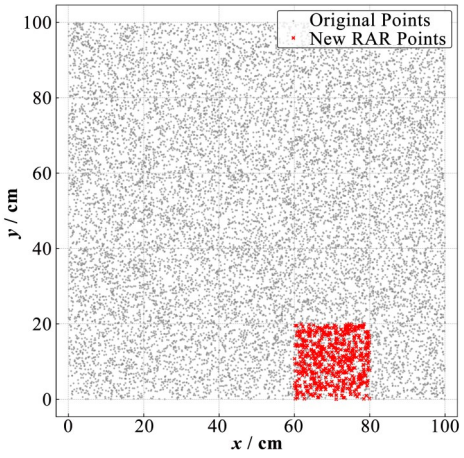



**图2** RAR新采样点分布示意图（彩图见网络版）
**Fig.2** Distribution of RAR-based new sampling points (color online)

网络在简单区域的过度学习，使得各区域间的残差水平差距缩小，有利于整体的优化性能。

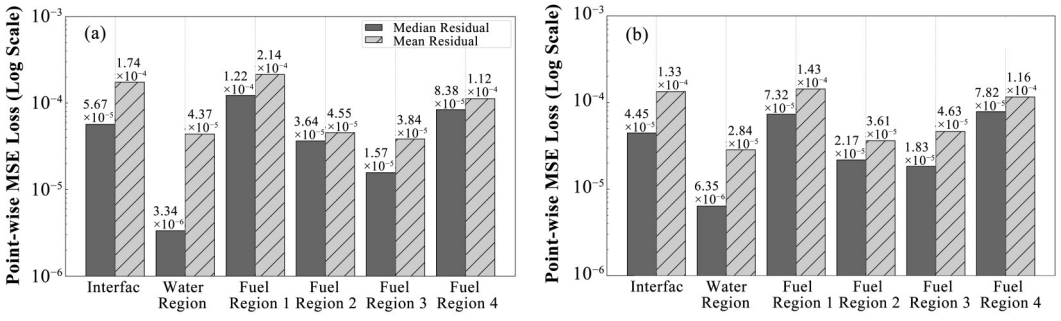



**图3** 无优化情况与RAR策略残差水平对比图 (a) 无优化条件下的残差水平，(b) RAR策略下的残差水平
**Fig.3** Comparison of residual levels between the baseline and RAR strategy
(a) Residual levels under no optimization conditions, (b) Residual levels under the RAR strategy

## 2.2 权重动态调整

PINN通过最小化损失函数以逼近偏微分方程的参考解，其总损失函数通常可表示为：

$$\text{Loss} = \lambda_1 L_{\text{pde}} + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i L_i \tag{8}$$

式中：Loss为总损失；$L_{\text{pde}}$ 为偏微分方程损失；$L_i, i = 1, \cdots, N$ 为其他约束项损失；$\lambda_1$、$\lambda_i$ 为各损失项权重。

模型训练过程中，各约束项权重反映了神经网络对该项的重视程度，权重越大，该项对网络参数更新的影响越大，而网络参数又直接影响模型收敛性能。如果约束项权重分配不合理，会导致训练过程不稳定，或使网络难以满足某些物理约束，最终严重影响解的精度。各约束项权重分配的传统做法依赖于经验反复调整，该试错过程繁琐低效，且最优权重高度依赖于具体问题，难以实现不同算例间的迁移利用。

为解决上述问题，本文在Wang等[16]提出的权重自适应方法基础上，结合中子扩散问题在多区训练中的实际表现，对其进行了改进，实现了一种权重动态调整机制。具体流程如下：

1）每间隔10步，计算当前各约束项对于网络参数的梯度均值 $Norm_i$：

$$Norm_i = \frac{1}{M}\sum_{j}^{M}\left|\frac{\partial L_i}{\partial \theta_j}\right|, i = 1,2 \tag{9}$$

式中：$M$ 为网络参数总数；$\theta_j$ 为第 $j$ 个网络参数。

2）对每个约束项，计算临时权重因子 $\hat{\lambda}_i$：

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\max_i(Norm_i)}{Norm_i}, i = 1, 2 \tag{10}$$

3）平滑更新各约束项权重：

$$\lambda_i = (1 - \beta)\lambda_i + \beta\hat{\lambda}_i, i = 1, 2 \tag{11}$$

式中：$\beta$ 设定为0.9，以避免权重变化过于剧烈。为防止权重极端失衡，限定 $\lambda_i$ 最大值为20。

4）最终损失函数构成为：

$$\text{Loss} = \lambda_1 L_{\text{R}} + \lambda_2 L_{\text{B}} \tag{12}$$

式中：$L_R$为扩散方程损失；$L_B$为边界条件损失。

### 2.3 分域物理信息神经网络

当物理场本身存在梯度剧烈突变时，单个神经网络拟合能力会面临内在瓶颈，前述训练层面的优化方法难以应对该情形。对于存在材料截面差异较大的强非均匀问题，仅依靠一个单网络同时学习所有区域的物理行为易导致拟合困难甚至训练失败。

分域物理信息神经网络是由单网络PINN扩展出的一种分域求解算法。该算法将整个求解域划分为多个不重叠的子域，并在每个子域上分别建立独立的神经网络模型，这些子网仅在分界接口处相交，并通过接口约束各区域连续性。与单网络PINN相比，XPINN通过划分子域，使得各子网只需专注于拟合其所在子域内物理特性稳定的函数，使得学习任务大大简化。这种架构中各子网可以采用一组独立的、更具针对性的超参数进行学习优化，因而更适合处理多物理场或多材料区域等复杂问题[19]。

在XPINN算法的实际应用中，维持各子网之间接口处的解连续性至关重要，这能保证全局解的物理合理性，降低计算误差。以中子扩散方程为例，需在各子网接口处额外施加中子通量连续和中子流密度连续两类约束，其对应的损失函数分别为：

$$\mathrm{Loss}_{\phi} = \frac{\lambda_{\phi}}{N_i}\left(\phi_i - \phi_i'\right)^2 \tag{13}$$

$$\mathrm{Loss}_{J} = \frac{\lambda_{J}}{N_i}\left(J_i - J_i'\right)^2 \tag{14}$$

式中：$N_i$为接口处采样点数；$\phi_i$、$\phi_i'$分别为两侧子网在接口处的通量预测值；$J_i$、$J_i'$分别为两侧子网在接口处的中子流密度。

最终，各子网的总损失函数形式为：

$$\mathrm{Loss} = L_{\mathrm{pde}} + L_{\mathrm{boundary}} + L_{\mathrm{interface}} \tag{15}$$

式中：$L_{\mathrm{pde}}$为方程损失；$L_{\mathrm{boundary}}$为边界条件损失；$L_{\mathrm{interface}}$为接口连续性损失，即式(13)与(14)之和。

在将XPINN框架应用于前述PINN源迭代算法时，整个求解域由多个子网络独立建模，各子域分别独立生成采样点，并在各自区域内构建PDE、边界条件以及接口连续性残差约束。每轮内迭代完成后，需将各子域的预测通量进行拼接，并重构为全域通量分布，再据此计算全局裂变源项，实现对$k_{\mathrm{eff}}$的更新。

## 3 结果和讨论

### 3.1 PINN源迭代法验证

采用一个二维矩形几何多群单材料区域问题对PINN源迭代法进行验证，该问题为边长100 cm的正方形区域，分别考虑采用四边全反射边界以及四边真空边界两种边界条件。具体材料参数见表1。计算中，神经网络层数设置为10层，隐藏层每层的神经元数为40个。所有全连接层权重$w$采用Xavier均匀分布进行初始化，偏置项$b$初始化为0.01。学习率固定为$5\times10^{-5}$。源迭代算法外迭代最大训练步数为20 000步。内迭代的收敛判据$\sigma=1\times10^{-4}$。本算例及后续算例中所采用的主要超参数均参考相关文献中的常用设定，并结合多次参数调试经验确定。几何区域内部共采样15 000个点，边界处每条边各采样1 500个点。所有采样点均采用拉丁超立方采样(Latin Hypercube Sampling，LHS)生成。本算例及后续算例的参考解均由变分节块法程序VNMQD[20]计算给出。

**表1 单材料计算区域材料特性**

**Table 1 Material properties of the single-material computational region**

| 能群 Group | 扩散系数 Diffusion coefficient $D$ / cm$^{-1}$ | 吸收截面 Absorption cross section $\Sigma_a$ / cm$^{-1}$ | 中子产生截面 Neutron production cross section $\nu\Sigma_f$ / cm$^{-1}$ | 散射截面 Scattering cross section $\Sigma_{s12}$ / cm$^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.423 913 | 0.010 402 1 | 0.006 477 69 | 0.017 555 5 |
| 2 | 0.356 306 | 0.087 662 2 | 0.112 732 80 | |

计算结果如表2所示，在全反射边界条件下，$k_{\mathrm{eff}}$的预测误差仅为$1.6\times10^{-4}$；在更为复杂的真空边界条件下，误差为$5.6\times10^{-4}$。结果表明，全反射边界和真空边界条件下，基于PINN的源迭代算法求解中子扩散方程可实现对$k_{\mathrm{eff}}$的高精度预测，即使在不引入额外优化策略的情况下也具备良好的计算精度。值得注意的是，两种边界条件的收敛行为存在显著差异。全反射边界下的模型收敛所需的迭代次数远少于真空边界。后者在训练中震荡更为剧烈，导致其难以在预设的收敛阈值内稳定收敛。

### 3.2 自适应重采样及权重动态调整优化验证

采用二维矩形几何多群多材料区域平缓过渡问题和二维TWIGL基准问题两个算例，进行RAR采样和权重动态调整优化方法的验证。

二维矩形几何多群多材料区域平缓过渡问题几何区域为边长100 cm的正方形，几何结构为如图4所示5个区域，图中标号为对应材料号。其中左、下

**表2 二维多群单区域计算结果**
**Table 2 Numerical results of the two-dimensional multi-group single-region model**

| 边界条件<br>Boundary condition | 步数<br>Epoch | $k_{\text{eff}}$预测值<br>$k_{\text{eff}}$ predicted | $k_{\text{eff}}$参考值<br>$k_{\text{eff}}$ reference | $k_{\text{eff}}$误差<br>$k_{\text{eff}}$ error / $10^{-5}$ | 损失值<br>Loss |
|---|---|---|---|---|---|
| 全反射边界 Fully reflective | 722 | 1.039 05 | 1.039 21 | 16 | $1.647\,2\times10^{-7}$ |
| 真空边界 Vacuum | 20 000 | 0.946 74 | 0.947 30 | 56 | $9.817\,3\times10^{-6}$ |

边界为全反射边界条件，右、上边界为真空边界条件。各材料参数如表3所示。计算中，神经网络层数设置为10层，隐藏层每层的神经元数为50个。其余参数设置与§3.1中相同，学习率固定为$1\times10^{-4}$。源迭代算法外迭代最大训练步数为40 000步，内迭代跳出条件为$\sigma=1\times10^{-3}$。每次训练迭代使用全部采样点。RAR采点网格$\alpha=8$，每1 000步增加点数*n_points*=500，几何区域内部共采样15 000个点，边界处每条边各采样1 000个点。所有采样点均采用LHS生成。

计算结果如表4所示，两能群通量分布热图及$k_{\text{eff}}$收敛曲线见图5。由表4可知，针对该类材料截面过渡平缓的多区域问题，未采用优化策略时PINN源迭代算法的$k_{\text{eff}}$预测误差较大，为$9.89\times10^{-3}$。引入RAR采样策略后，$k_{\text{eff}}$误差降低至$4.02\times10^{-3}$，表明高残差区域的加密采样能够提升模型对局部物理特性的拟合能力，而采用权重动态调整方法得到的$k_{\text{eff}}$误差仅为$6.3\times10^{-4}$。由图5(b)$k_{\text{eff}}$收敛曲线可见，权重动态调整不仅有效降低了误差，还能改善训练中的震荡现象，从而提升了收敛稳定性。综合结果表明，在材料截面过渡较平缓的问题中，RAR采样和权重动态调整两种优化策略均能有效提升PINN在多区域复杂问题中的预测精度。

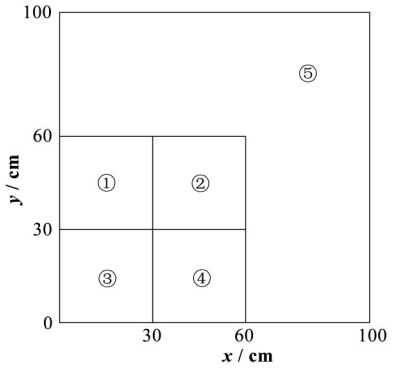



**图4** 二维多材料区域几何结构示意图
**Fig.4** Schematic diagram of the two-dimensional multi-material region geometry

**表3 多材料计算区域材料特性**
**Table 3 Material properties of the multi-material computational region**

| 材料<br>Material | 能群<br>Group | 扩散系数<br>Diffusion coefficient<br>$D$ / cm$^{-1}$ | 吸收截面<br>Absorptioncross section<br>$\Sigma_{\text{a}}$ / cm$^{-1}$ | 中子产生截面<br>Neutron production cross section<br>$\nu\Sigma_{\text{f}}$ / cm$^{-1}$ | 散射截面<br>Scattering cross section<br>$\Sigma_{\text{s12}}$ / cm$^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1.423 913 | 0.010 402 | 0.006 478 | 0.017 556 |
| | 2 | 0.356 306 | 0.087 662 | 0.112 733 | |
| 2 | 1 | 1.423 913 | 0.010 952 | 0.006 648 | 0.017 556 |
| | 2 | 0.356 306 | 0.091 462 | 0.112 733 | |
| 3 | 1 | 1.425 611 | 0.010 993 | 0.007 503 | 0.017 178 |
| | 2 | 0.350 574 | 0.099 270 | 0.137 800 | |
| 4 | 1 | 1.400 000 | 0.011 400 | 0.007 200 | 0.017 000 |
| | 2 | 0.340 000 | 0.104 000 | 0.130 000 | |
| 5 | 1 | 1.634 227 | 0.002 661 | 0.000 000 | 0.027 597 |
| | 2 | 0.264 002 | 0.049 364 | 0.000 000 | |

**表4 二维多群多材料区域计算结果**
**Table 4 Numerical results for two-dimensional multi-group multi-material regions**

| 优化方法<br>Optimization method | 步数<br>Epoch | $k_{\text{eff}}$预测值<br>$k_{\text{eff}}$ predicted | $k_{\text{eff}}$参考值<br>$k_{\text{eff}}$ reference | $k_{\text{eff}}$误差<br>$k_{\text{eff}}$ error / $10^{-5}$ | 损失值<br>Loss |
|---|---|---|---|---|---|
| 无优化 No optimization | 39 525 | 1.010 033 | 1.019 924 | 989 | $1.032\,5\times10^{-4}$ |
| RAR | 40 000 | 1.015 906 | | 402 | $1.655\,7\times10^{-4}$ |
| 权重动态调整 Weight adaptive | 30 003 | 1.019 293 | | 63 | $2.045\,5\times10^{-5}$ |

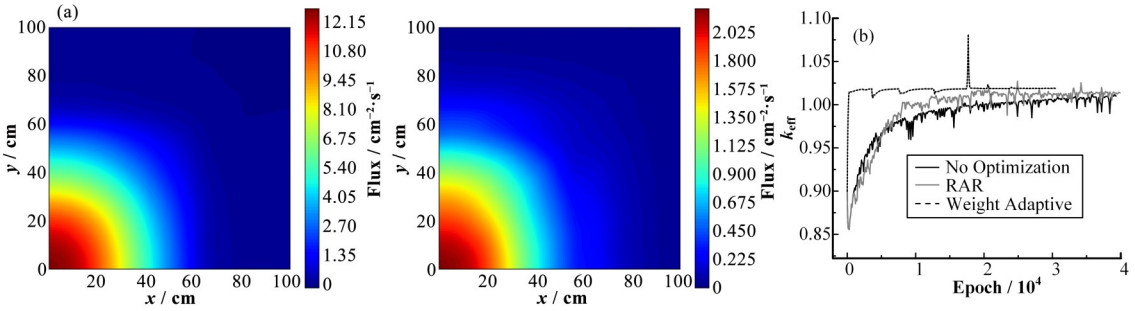



**图5**　二维多群多材料区域通量分布与$k_{\mathrm{eff}}$收敛曲线（彩图见网络版）
(a) 权重动态调整方法得到的中子通量分布，左图为第1能群中子通量，右图为第2能群中子通量，(b) $k_{\mathrm{eff}}$收敛过程
**Fig.5**　Flux distribution and $k_{\mathrm{eff}}$ convergence curve for the two-dimensional multi-group multi-material region (color online)
(a) Neutron flux distribution using weight adaptive, with the left panel showing group-1 neutron flux and the right panel showing group-2 neutron flux, (b) $k_{\mathrm{eff}}$ convergence history

二维TWIGL基准问题几何结构如图6所示，图中标号为对应材料号。其中左、下边界为全反射边界条件，右、上边界为真空边界条件。各材料参数如表5所示。计算中，神经网络层数设置为8层，隐藏层每层的神经元数为50个。其余参数设置与上述一致。RAR采点网格$\alpha$=5，每1 000步增加点数*n_points*=350，几何区域内部共采样10 000个点，边界处每条边各采样800个点，所有采样点均采用LHS生成。

计算结果如表6所示，两能群通量分布热图及$k_{\mathrm{eff}}$收敛曲线见图7。由表6可知，在TWIGL基准问题求解中，前述两种训练层面的优化策略均未表现出明显效果，无论是否进行优化，单网络PINN算法的$k_{\mathrm{eff}}$预测误差均大于$1\times10^{-2}$，远未达到可接受的精度水平。根据图7(a)的通量分布可观察到，在材料

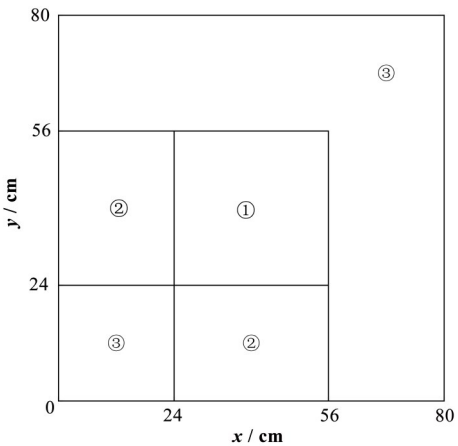



**图6**　TWIGL基准问题几何结构示意图
**Fig.6**　Schematic diagram of the geometry for the TWIGL benchmark problem

交界面处的热群中子通量空间梯度变化剧烈，这可

**表5　TWIGL基准题计算区域材料特性**
**Table 5　Material properties of the computational region in the TWIGL benchmark problem**

| 材料 Material | 能群 Group | 扩散系数 Diffusion coefficient $D$ / cm$^{-1}$ | 吸收截面 Absorption cross section $\Sigma_{\mathrm{a}}$ / cm$^{-1}$ | 中子产生截面 Neutron production cross section $\nu\Sigma_{\mathrm{f}}$ / cm$^{-1}$ | 散射截面 Scattering cross section $\Sigma_{\mathrm{s12}}$ / cm$^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1.4 | 0.010 0 | 0.007 0 | 0.01 |
| | 2 | 0.4 | 0.150 0 | 0.200 0 | |
| 2 | 1 | 1.4 | 0.010 0 | 0.007 0 | 0.01 |
| | 2 | 0.4 | 0.150 0 | 0.200 0 | |
| 3 | 1 | 1.3 | 0.008 0 | 0.003 0 | 0.01 |
| | 2 | 0.5 | 0.050 0 | 0.060 0 | |

**表6　二维TWIGL基准问题计算结果**
**Table 6　Numerical results for the two-dimensional TWIGL benchmark problem**

| 优化方法 Optimization method | 步数 Epoch | $k_{\mathrm{eff}}$预测值 $k_{\mathrm{eff}}$ predicted | $k_{\mathrm{eff}}$参考值 $k_{\mathrm{eff}}$ reference | $k_{\mathrm{eff}}$误差 $k_{\mathrm{eff}}$ error / $10^{-5}$ | 损失值 Loss |
|---|---|---|---|---|---|
| 无优化 No optimization | 40 000 | 0.902 881 | 0.915 409 | 1 253 | $1.161\,7\times10^{-4}$ |
| RAR | 40 000 | 0.897 717 | | 1 769 | $1.655\,0\times10^{-4}$ |
| 权重动态调整 Weight adaptive | 30 001 | 0.904 810 | | 1 060 | $1.807\,6\times10^{-4}$ |
| XPINN | 30 381 | 0.915 155 | | 25 | $2.157\,6\times10^{-4}$ |

能是导致网络难以有效拟合整个物理场的根本原因。尤其值得注意的是，RAR采样方法在本算例中不仅未能提升精度，反而出现了负优化现象。尽管该采样策略会在高残差区域增加采样点密度，但目前PINN网络架构对该问题存在表达能力瓶颈，此时RAR采样无法弥补网络表达能力的不足，反而导致模型在该区域过度拟合。这种局部过拟合会破坏解的全局协调性，影响对网络其他区域的优化，最终导致整体预测精度的下降。

综合本节两个算例的数值结果可以得出，对于材料物性平滑过渡的非均匀问题，其求解精度主要受采样策略和权重平衡的影响，因此采用RAR和权重动态调整等训练层面的优化策略能够有效改善$k_{\mathrm{eff}}$的预测精度。而在求解中子通量空间变化梯度大的问题如TWIGL基准题时，这两种优化策略不适用，未能产生有效的优化效果。在§3.3中，将针对这一现象进行具体分析，并提出改进思路。

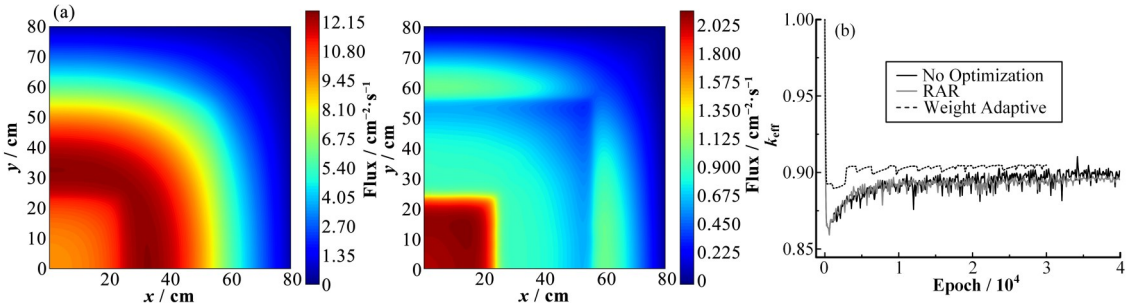



**图7** TWIGL基准题的通量分布与$k_{\mathrm{eff}}$收敛曲线（彩图见网络版）
(a) 权重动态调整方法得到的中子通量分布，左图为第1能群中子通量，右图为第2能群中子通量，(b) $k_{\mathrm{eff}}$收敛过程
**Fig.7** Flux distribution and $k_{\mathrm{eff}}$ convergence curve for the TWIGL benchmark problem (color online)
(a) Neutron flux distribution using weight adaptive, with the left panel showing group-1 neutron flux and the right panel showing group-2 neutron flux, (b) $k_{\mathrm{eff}}$ convergence history

### 3.3 XPINN优化算法验证

#### 3.3.1 强中子通量梯度问题分析

为了确定中子通量密度梯度大导致了上述两种优化策略失效，本节对材料3的截面参数进行人工调整，使其与相邻材料的截面参数差异减小，修改后的材料3截面参数如表7所示。图8分别展示了截面调整前后，热群通量在$y$=10 cm处的剖面曲线及其导数变化。

从图8可以看出，材料3截面修改前，在分界面（$x$=24 cm与$x$=56 cm）处的通量变化剧烈，通量导数发生剧烈突变。截面修改后，通量在该分界面处的变化明显趋于平缓，导数的峰值幅度显著降低，表明截面调整有效地缓和了界面处物理特征的突变程度。随后，采用与前节相同的PINN算法与参数设置，对修改后的问题进行数值分析。

**表7 修改后的材料3区域的材料特性**
**Table 7 Modified material properties of region 3**

| 材料 Material | 能群 Group | 扩散系数 Diffusion coefficient $D$ / cm$^{-1}$ | 吸收截面 Absorption cross section $\Sigma_{\mathrm{a}}$ / cm$^{-1}$ | 中子产生截面 Neutron production cross section $\nu\Sigma_{\mathrm{f}}$ / cm$^{-1}$ | 散射截面 Scattering cross section $\Sigma_{\mathrm{s12}}$ / cm$^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1.35 | 0.009 0 | 0.005 0 | 0.01 |
| | 2 | 0.45 | 0.100 0 | 0.130 0 | |

结果如表8所示，对应的两能群通量分布热图以及$k_{\mathrm{eff}}$收敛曲线见图9。由表8可知，在中子通量密度梯度缓和后，无优化模型的$k_{\mathrm{eff}}$预测误差显著降低至$4.78\times10^{-3}$，RAR策略同样未表现出正向优化效

**表8 更换材料后问题的计算结果**
**Table 8 Numerical results after material replacement**

| 优化方法 Optimization method | 步数 Epoch | $k_{\mathrm{eff}}$预测值 $k_{\mathrm{eff}}$ predicted | $k_{\mathrm{eff}}$参考值 $k_{\mathrm{eff}}$ reference | $k_{\mathrm{eff}}$误差 $k_{\mathrm{eff}}$ error / $10^{-5}$ | 损失值 Loss |
|---|---|---|---|---|---|
| 无优化 No optimization | 29 485 | 0.938 226 | 0.943 006 | 478 | $1.507\,7\times10^{-4}$ |
| RAR | 37 349 | 0.937 584 | | 542 | $1.409\,2\times10^{-4}$ |
| 权重动态调整 Weight adaptive | 20 051 | 0.940 782 | | 222 | $6.317\,8\times10^{-4}$ |

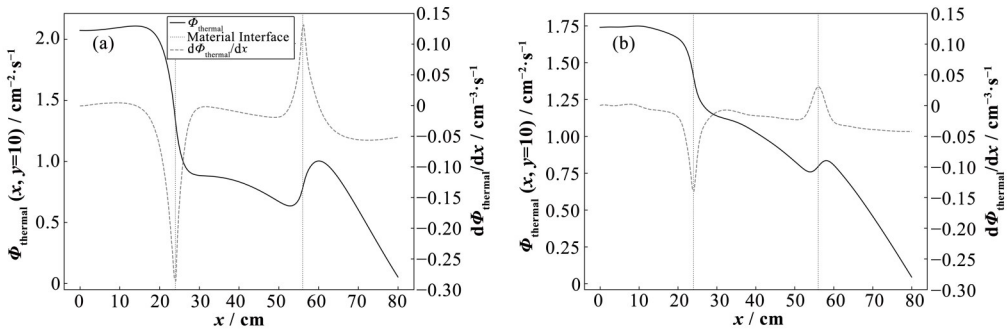



**图8**　热群通量分布在$y$=10 cm处的剖面曲线及其导数变化　(a) 材料更换前，(b) 材料更换后
**Fig.8**　Profile and derivative of thermal group flux distribution at $y$=10 cm
(a) Before material replacement, (b) After material replacement

果，而权重动态调整策略虽将误差降至$2.22\times10^{-3}$，其精度仍不满足反应堆物理计算要求。结果证明，在多材料非均匀问题中，强中子通量梯度是限制单网络PINN预测精度的核心因素，传统的单网络架构因其表达能力瓶颈，难以适配此类复杂特征值问题。训练层面的两种优化策略均受制于单网络表达能力而难以进行有效优化，从而有必要从网络结构层面对强梯度问题进行针对性改进。

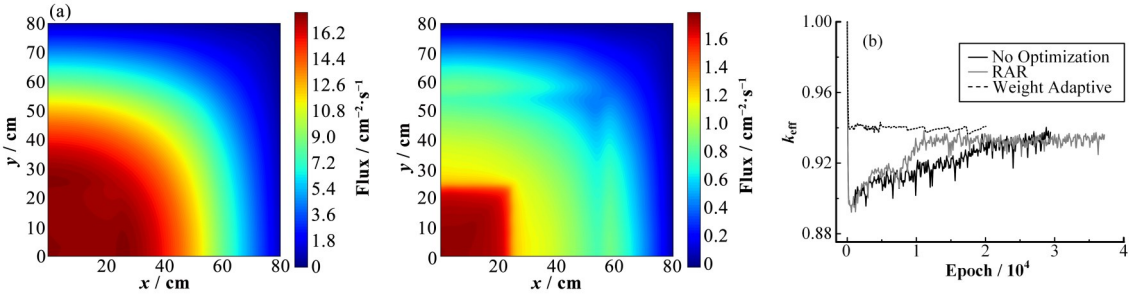



**图9**　更换材料后问题通量分布与$k_{\mathrm{eff}}$收敛曲线（彩图见网络版）
(a) 权重动态调整方法得到的中子通量分布，左图为第1能群中子通量，右图为第2能群中子通量，(b) $k_{\mathrm{eff}}$收敛过程
**Fig.9**　Flux distribution and $k_{\mathrm{eff}}$ convergence curve after material replacement (color online)
(a) Neutron flux distribution using weight adaptive, with the left panel showing group-1 neutron flux and the right panel showing group-2 neutron flux, (b) $k_{\mathrm{eff}}$ convergence history

### 3.3.2　XPINN分域求解算法

本文在PINN源迭代法中采用XPINN分域求解算法，以解决中子通量密度梯度大时无法有效预测的局限。

以TWIGL为例，如图6所示，将计算区域划分为如图10所示的三个子域，并分别由三个子网络进行建模。其中，Net2子网络包含三个不同的材料区域。该划分综合考虑了材料界面处的物理差异与预期通量梯度分布特征。图中标号对应表5所列材料编号。

计算中，Net1设置为3层，每层包含30个神经元；Net2设置为4层，每层包含40个神经元；Net3同样设置为4层，每层包含40个神经元。其余网络结构参数均与前述一致。三个子网络的学习率均固定为$1\times10^{-4}$，内迭代的收敛判据为三个子网络的Loss同时小于$\sigma$=$1\times10^{-4}$。

采样方面，各子网采样点数根据区域面积和边界长度按比例分配。Net1区域内部采样900个点，外边界每条边各采样150个点；Net2区域内部采样4 000个点，外边界每条边各采样200个点；Net3区域内部采样5 100个点，外边界每条边各采样150个点。Net1与Net2分界处每条边各采样200个点，Net2与Net3分界处每条边各采样600个点。其中，外边界点用于施加边界条件损失，分界点用于构造子网间通量与流密度连续性约束。所有采样点均采用LHS生成。

计算结果如表6所示，采用XPINN分域框架后，$k_{\mathrm{eff}}$预测误差大幅下降，仅为$2.5\times10^{-4}$，显著优于前述单网络PINN两种训练层面优化方法的结果。XPINN分域框架通过将复杂问题分解为多个更易于学习的子问题，能够有效地克服单网络的表达能力瓶颈，在处理中子通量梯度剧烈突变问题时表现出更高的预测能力。表明了分域神经网络方法在多材料区域复杂问题中的有效性与优越性。

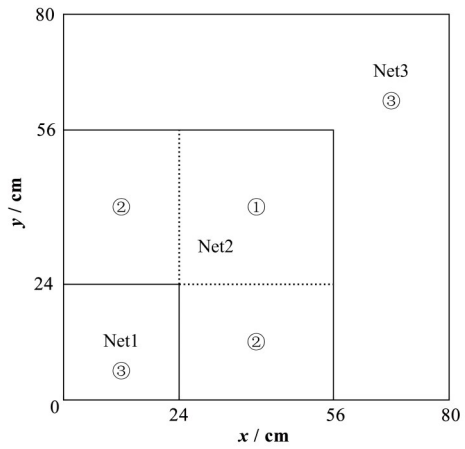



**图10** XPINN框架分域图
**Fig.10** Domain decomposition diagram of XPINN framework

## 4 结语

本文针对中子扩散方程特征值问题，系统评估了PINN源迭代法及多种优化策略的适用性，所得主要结论如下：

对于单区域问题，PINN源迭代算法无需额外优化即可实现$k_{\mathrm{eff}}$的高精度预测，表明该模型在物理特性均匀的简单问题中具备良好的性能。

在材料截面过渡平缓的多区问题中，单网络PINN的预测精度存在局限。此时，RAR采样策略通过在高残差区域追加采样点，有利于局部收敛并减小残差，但其整体精度提升有限；而权重动态调整策略通过动态平衡方程损失项与边界损失项的权重，有效抑制网络参数更新不均衡问题，在提升模型整体收敛性与全局精度方面表现最为显著。

对于存在中子通量梯度剧烈突变的复杂多区问题，XPINN分域神经网络算法凭借多子网协同优化，显著提升了$k_{\mathrm{eff}}$预测准确性，能够有效解决单网络PINN在此类问题中出现的拟合困难，保证各子域内的局部精度与跨界面连续性。

此外，研究发现，当RAR策略过度集中采样于模型表达能力瓶颈区域时，可能导致网络局部过拟合，反而降低整体泛化性能。因此，优化策略的有效应用需以模型具备充足的全局表达能力为前提。

本研究拓展了PINN各类优化策略及其分域算法在复杂多区中子扩散问题中的应用，为后续复杂的反应堆物理数值求解提供了技术参考。未来的研究可进一步将本文提出的优化框架推广至三维中子扩散及输运问题，以验证其在更复杂几何结构与能群耦合条件下的适用性。同时，未来可探索PINN在反应堆瞬态行为分析中的求解潜力，以扩展其在反应堆物理分析中的应用价值。此外，还可进一步研究基于残差变化趋势的RAR动态启停策略，以提升该方法在多类问题中的稳定性。

**作者贡献声明** 曹允负责算法的实现、实验数据处理和分析以及文章的撰写；庄坤提供研究思路，并对实验过程进行指导以及文章的修订；陈金根参与文章讨论与修订。

## 参考文献

1 陈怡, 伍建辉, 邹春燕, 等. 基于TMSR-PNS的宽能区中子束流监测器的模拟研究[J]. 核技术, 2025, **48**(10): 100402. DOI: 10.3724/j. 0253-3219.2025. hjs. 48.240531. CSTR: 32193.14.hjs.CN31-1342/TL.2025.48.240531.
CHEN Yi, WU Jianhui, ZOU Chunyan, *et al*. Simulation study of neutron beam monitor in wide energy region based on TMSR-PNS[J]. Nuclear Techniques, 2025, **48** (10): 100402. DOI: 10.3724/j. 0253-3219.2025. hjs. 48. 240531. CSTR: 32193.14. hjs. CN31-1342/TL. 2025.48. 240531.

2 张志成, 胡继峰, 陈金根, 等. 氟锂铍熔盐热中子散射效应对熔盐堆中子学性能的影响[J]. 核技术, 2023, **46**(7): 070605. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.070605.
ZHANG Zhicheng, HU Jifeng, CHEN Jingen, *et al*. Influence of thermal neutron scattering effect of FLiBe molten salt on neutronic performance of molten salt reactors[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(7): 070605. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.070605.

3 伍建辉, 周俊, 邹春燕, 等. 小型氦氙冷却反应堆事故发生频率分析研究[J]. 核技术, 2022, **45**(6): 060605. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2022.hjs.45.060605.
WU Jianhui, ZHOU Jun, ZOU Chunyan, *et al*. Accident occurrence frequency of a small helium-xenon gas cooled nuclear reactor system[J]. Nuclear Techniques, 2022, **45** (6): 060605. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2022. hjs. 45. 060605.

4 Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G E. Physics-informed neural networks: a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 2019, **378**: 686–707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045.

5 Ray D, Pinti O, Oberai A A. Deep Learning and Computational Physics[M]. Cham: Springer Nature Switzerland, 2024. DOI: 10.1007/978-3-031-59345-1.

6 谢宇辰, 马宇, 王亚辉. 参数化物理内嵌神经网络求解稳态单能中子扩散解集[J]. 原子能科学技术, 2024, **58** (6): 1242–1249. DOI: 10.7538/yzk.2023.youxian.0765.
XIE Yuchen, MA Yu, WANG Yahui. Solving steady-state

mono-energy neutron diffusion solution set with parameterized physics-informed neural network[J]. Atomic Energy Science and Technology, 2024, **58**(6): 1242 – 1249. DOI: 10.7538/yzk.2023.youxian.0765.

7 Elhareef M H, Wu Z Y. Physics-informed neural network method and application to nuclear reactor calculations: a pilot study[J]. Nuclear Science and Engineering, 2023, **197**(4): 601 – 622. DOI: 10.1080/00295639.2022.2123211.

8 Zhu X W, Hu X Z, Sun P T. Physics-informed neural networks for solving dynamic two-phase interface problems[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2023, **45**(6): A2912 – A2944. DOI: 10.1137/22m1517081.

9 Ren X, Hu P, Su H, *et al*. Physics-informed neural networks for transonic flow around a cylinder with high Reynolds number[J]. Physics of Fluids, 2024, **36**(3): 036129. DOI: 10.1063/5.0200384.

10 Jin H, Mattheakis M, Protopapas P. Physics-informed neural networks for quantum eigenvalue problems[C]// 2022 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). July 18-23, 2022, Padua, Italy. IEEE, 2022: 1 – 8. DOI: 10.1109/IJCNN55064.2022.9891944.

11 Norambuena A, Mattheakis M, González F J, *et al*. Physics-informed neural networks for quantum control[J]. Physical Review Letters, 2024, **132**: 010801. DOI: 10.1103/physrevlett.132.010801.

12 刘东, 唐雷, 安萍, 等. 核反应堆有效增殖系数深度学习直接搜索求解方法[J]. 核动力工程, 2023, **44**(5): 6 – 14. DOI: 10.13832/j.jnpe.2023.05.0006.
LIU Dong, TANG Lei, AN Ping, *et al*. The deep learning method to search effective multiplication factor of nuclear reactor directly[J]. Nuclear Power Engineering, 2023, **44**(5): 6 – 14. DOI: 10.13832/j.jnpe.2023.05.0006.

13 刘东, 罗琦, 唐雷, 等. 基于PINN深度机器学习技术求解多维中子学扩散方程[J]. 核动力工程, 2022, **43**(2): 1 – 8. DOI: 10.13832/j.jnpe.2022.02.0001.
LIU Dong, LUO Qi, TANG Lei, *et al*. Solving multi-dimensional neutron diffusion equation using deep machine learning technology based on PINN model[J]. Nuclear Power Engineering, 2022, **43**(2): 1 – 8. DOI: 10.13832/j.jnpe.2022.02.0001.

14 Yang Y, Gong H L, Zhang S Q, *et al*. A data-enabled physics-informed neural network with comprehensive numerical study on solving neutron diffusion eigenvalue problems[J]. Annals of Nuclear Energy, 2023, **183**: 109656. DOI: 10.1016/j.anucene.2022.109656.

15 Wu C X, Zhu M, Tan Q Y, *et al*. A comprehensive study of non-adaptive and residual-based adaptive sampling for physics-informed neural networks[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, **403**: 115671. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115671.

16 Wang S F, Teng Y J, Perdikaris P. Understanding and mitigating gradient flow pathologies in physics-informed neural networks[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2021, **43**(5): A3055 – A3081. DOI: 10.1137/20m1318043.

17 Moseley B, Markham A, Nissen-Meyer T. Finite basis physics-informed neural networks (FBPINNs): a scalable domain decomposition approach for solving differential equations[J]. Advances in Computational Mathematics, 2023, **49**(4): 62. DOI: 10.1007/s10444-023-10065-9.

18 Dolean V, Heinlein A, Mishra S, *et al*. Multilevel domain decomposition-based architectures for physics-informed neural networks[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2024, **429**: 117116. DOI: 10.1016/j.cma.2024.117116.

19 Jagtap A D, Karniadakis G E. Extended physics-informed neural networks (XPINNs): a generalized space-time domain decomposition based deep learning framework for nonlinear partial differential equations[J]. Communications in Computational Physics, 2025, **28**(5): 2002 – 2041. DOI: 10.4208/cicp.oa-2020-0164.

20 庄坤, 王连杰, 刘琨, 等. 基于变分节块法六角形Quasi-diffusion程序开发及验证[J]. 原子能科学技术, 2023, **57**(1): 147 – 155. DOI: 10.7538/yzk.2022.youxian.0013.
ZHUANG Kun, WANG Lianjie, LIU Kun, *et al*. Development and verification of hexagonal Quasi-diffusion code based on variational nodal method[J]. Atomic Energy Science and Technology, 2023, **57**(1): 147 – 155. DOI: 10.7538/yzk.2022.youxian.0013.