0254-6124/2020/40(1)-102–07 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

XIONG Yao, YUAN Hong, YANG Xin, ZHANG Yang, GAN Qingbo. A simplified path searching and correcting method for the calculation of initial value of libration periodic orbit (in Chinese). *Chin. J. Space Sci.*, 2020, **40**(1): 102-108. DOI:10.11728/cjss2020.01.102

一种适用于平动点周期轨道初值计算的简化路径搜索修正法*

熊 瑶[1,2] 袁 洪[1,3] 杨 新[1,4]

张 扬[1] 甘庆波[1]

1(中国科学院光电研究院 北京 100094)

2(中国科学院大学 北京 100049)

3(青岛市光电工程技术研究院 青岛 266000)

4(中国航天科工集团第二研究院 北京 100854)

摘 要 在限制性三体问题中, 路径搜索修正法是一种基于平动点周期轨道垂直穿越 Poincare 截面的几何对称性计算平面及空间平动点周期轨道近似初值的方法. 采用路径搜索修正法的一种简化形式, 在圆形限制性三体模型中, 对地月系中几种典型的平面及空间周期轨道近似初值进行了计算. 结果表明, 该简化方法得到的周期轨道近似初值不唯一, 由近似初值经微分修正得到的精确结果中通常同时存在 Halo 轨道和大幅值逆行轨道 (DRO). 进一步分析表明, 在某些临界初值下, 精确结果中 Halo 轨道将消失, 同时可能出现平面 Lyapunov 轨道及 Vertical 轨道. 上述计算中, 搜索初值与结果中轨道类型的对应关系值得进一步研究.

关键词 圆形限制性三体问题, 路径搜索修正法, 平动点周期轨道, Halo 轨道, 大幅值逆行轨道

中图分类号 V 412.4

A Simplified Path Searching and Correcting Method for the Calculation of Initial Value of Libration Periodic Orbit

XIONG Yao[1,2] YUAN Hong[1,3] YANG Xin[1,4]

ZHANG Yang[1] GAN Qingbo[1]

1(*Academy of Opto-Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100094)

2(*University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049)

3(*Qingdao Academy for Opto-Electronics Engineering, Qingdao* 266000)

4(*The Second Academy, China Aerospace Science and Industry Corp, Beijing* 100854)

* 青岛创新领军人才项目资助 (16-8-3-5-zhc)

2018-12-10 收到原稿, 2019-07-23 收到修定稿

E-mail: xiong_yao_aoe@126.com

Abstract　In the restricted three-body problem, the path searching and correcting method is often used to calculate the approximate initial value of planar and three-dimensional periodic orbit. In this paper, in view of the Circular Restricted Three-Body Problem (CRTBP), a simplified mode of this method is applied to calculate the approximate initial value of several ordinary kinds of periodic orbit. The results show that the approximate initial value obtained by the simplified method is not unique, and the precise initial values derived from the unique values above using differential correction method often include both Halo and DRO (Distant Retrograde Orbit) orbits. Moreover, under certain boundary initial values, Halo orbit will disappear from the results and the planar Lyapunov orbit or Vertical orbit will appears. The relationship between these initial values using in this method and the certain kinds of orbit needs further study.

Key words　Circular restricted three-body problem, Path searching and correcting method, Libration Periodic orbit, Halo orbit, Distant retrograde orbit

0　引言

地月系平动点周期轨道的研究与利用是限制性三体问题的一个重要方向. 1980 年以来, Richardson[1], Angel 等 [2], Gomez 等 [3], Hirani 等 [4], Russell[5] 等对平动点周期轨道的计算及任务设计进行了广泛研究.

在平动点周期轨道计算中, 路径搜索修正法 [5,6] 是一种基于平动点周期轨道垂直穿越 Poincare 截面的几何对称性轨道计算方法. 一个周期内, 平面周期轨道穿越 Poincare 截面次数最小可为 1. Tan 等 [6] 在该条件下对月球附近的大幅值逆行轨道 (DRO) 进行了研究. 本文在 Tan 工作基础上进行, 但与 Tan 将搜索起点设置在 x 轴 (地月质心旋转坐标系, 下同) 上不同, 这里将搜索起点设置在 xz 平面上, 使之可对平面和空间内多种周期轨道进行计算.

1　路径搜索修正法

1.1　动力学基础

在圆形限制性三体问题中, 一般在质心旋转坐标系中研究质点 m 的运动规律 [6−8]. 该坐标系原点是主天体 M_1 和 M_2 的公共质心 O, 而 xy 平面是两个主天体 M_1 和 M_2 的运动平面, x 轴方向由 M_1 指向 M_2 (主天体质量 $m_1 > m_2$), z 轴方向沿 M_1 和 M_2 的角动量方向, $Oxyz$ 构成右手坐标系, 如图 1 所示.

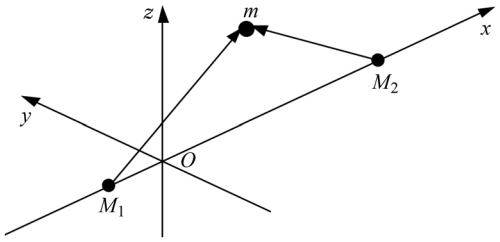


图 1　圆形限制性三体问题质心旋转坐标

Fig. 1　Centroid rotation coordinate system in CRTBS

对系统相关物理量 (主天体 M_1 和 M_2 的质量和、距离及平均角速度) 进行归一化处理 (无量纲), 则质点 m 在该坐标系中的动力学方程可表示为

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} = \dfrac{\partial U}{\partial z}. \end{cases} \tag{1}$$

式中, U 为等效势能,

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \tag{2}$$

式中, r_1 和 r_2 分别为质点 m 与两个主天体之间的距离, 有

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}, \\ r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}. \end{cases} \tag{3}$$

式中, μ 为系统中唯一质量参数, 表达式为

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

式 (1) 存在 5 个特解, 即质点 m 在质心旋转坐标系中速度和加速度为零的点, 也被称为平动点, 分为 3 个共线平动点 L_1~L_3 和 2 个三角平动点 L_4~L_5.

在地月系中, $\mu = 0.0122$. 本文所有轨道计算均在地月质心旋转坐标系中完成.

1.2 平面周期轨道计算

以 DRO 轨道 [4,9−14] 为例, 由于 DRO 轨道位于 xy 平面内, z 及 $\dot{z}$ 恒为 0, 下述 DRO 轨道坐标表述内容中二者均略去不记. 若 $[x, y, \dot{x}, \dot{y}]$ 是式 (1) 的解, 则 $[x, -y, -\dot{x}, \dot{y}]$ 亦是式 (1) 的解, 即 DRO 轨道关于 x 轴对称.

在 x 轴上 L_1 点附近给出任一点 $[x_0, 0]$ 作为 DRO 轨道搜索起点. 圆形限制性三体问题中, 归一化条件下质点 m 的 Jacobi 积分常量可表示为

$$J = 2U - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{4}$$

则对 DRO 轨道搜索起点, 有

$$\dot{y}_0 = \sqrt{2U_0 - J} = f(J). \tag{5}$$

式中, U_0 为起点 $[x_0, 0]$ 的等效势能.

确定合适的 J 步长, 可以得到对应的状态初值 $\tilde{\boldsymbol{x}}_0[x_0 \quad 0 \quad 0 \quad \dot{y}_0]$. 对式 (1) 进行积分直至 y 改变符号, 记录此时的 $[J, \dot{x}]$, 对比相邻的两组数据, 确定 $\dot{x}$ 符号由正变负时的 $\tilde{J}$.

图 2 给出了从 x 轴上 $x_0 = 0.5$ 出发的轨道簇, 图中右侧不同轨道由外到内 J 依次增大, 轨道在穿越 x 轴时的速度分量 $\dot{x}$ 符号也逐渐由正变负. 由于步长影响, 此时只能得到近似垂直穿越 x 轴的轨道对应的 $\tilde{J}$, 但其附近存在一个精确的 J 使对应的轨道垂直穿越 x 轴.

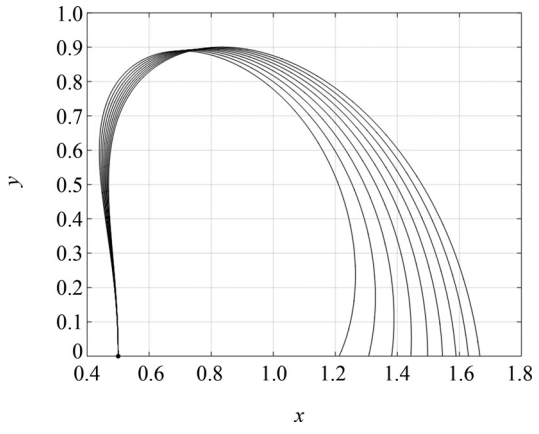


图 2 不同 Jacobi 积分常量确定的轨道穿越 x 轴

Fig. 2 Orbits determined by different Jacobi integral constant crossing x axis

xy 平面内的周期轨道不唯一, 因此 $\tilde{J}$ 不唯一. 由于轨道起点位置不同, 结果中可能包含 DRO 轨道、平面 Lyapunov 轨道或 HEO 轨道. 如图 3 所示. 图 3(a) 为 Jacobi 积分常量 J 与从 x 轴上 $x_0 = 0.5$ 出发的轨道第一次穿越 x 轴时速度分量 v_{xi} 的关系, 图 3 中 J_1, J_2, J_3 即为所求 $\tilde{J}$. 图 3(b) 为经微分修正最终得到的 3 条精确轨道, J_1, J_2, J_3 分别对应 DRO 轨道、平面 Lyapunov 轨道和 HEO 轨道, 各轨道对应的精确初值分别为 $[0.5, 0, 0, 1.2043]$, $[0.5, 0, 0, 1.1572]$ 及 $[0.5, 0, 0, 0.8910]$. 由图 3 可以看出, $\dot{y}_0$ 依次变小. 当 x 轴上起点不断靠近月球时, 图 3(a) 中轨迹不断下沉及右移, J_2, J_3 及对应的平面 Lyapunov 轨道和 HEO 轨也将从结果中消失, 只剩下 DRO 轨道, 以 $x_0 = 0.9$ 为例, 结果如图 4 所示.

图 3 及图 4 中的 E, M 分别为地月系中的地球与月球.

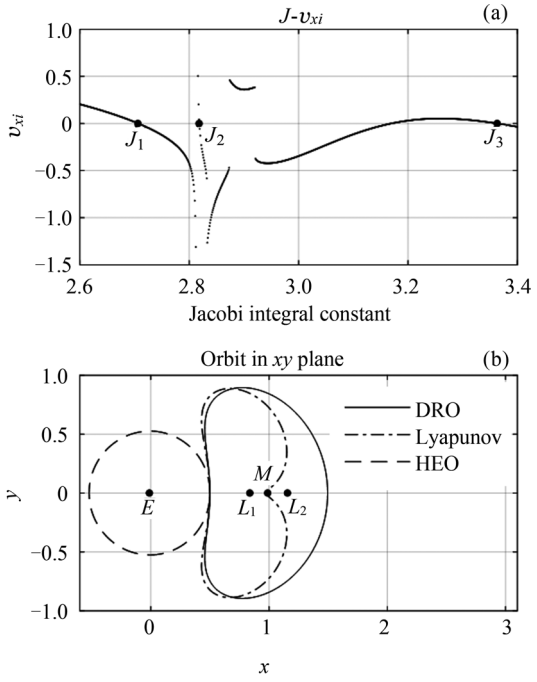


图 3 从 $x_0 = 0.5$ 出发的轨道第一次穿越 x 轴时的速度 (a), Jacobi 积分常量与对应的轨道 (b)

Fig. 3 Velocity that the orbit starting from $x_0 = 0.5$ crossing x axis firstly (a), Jacobi integral constant and corresponding orbit (b)

1.3　空间周期轨道计算

以 Halo 轨道 [15−18] 为例, 若 $[x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$ 是式 (1) 的解, 则 $[x, -y, z, -\dot{x}, \dot{y}, -\dot{z}]$ 也是式 (1) 的解, 因此 Halo 轨道关于 xz 平面对称, 即垂直穿越 xz 平面. 在 xz 平面上 L_1 点附近给出任意一点 $[x_0, 0, z_0]$ $(z_0 > 0)$ 作为 Halo 轨道搜索起点, 相应搜索条件为轨道穿越 xz 平面时 $\dot{x}$, $\dot{z}$ 中至少有一个异号. 满足搜索条件时, 该轨道附近存在一条垂直穿越 xz 平面的轨道, 将该轨道对应的 Jacobi 积分常量设为备选 $\tilde{J}$, 同理 $\tilde{J}$ 并不唯一.

取 xz 平面上一点 $[0.8657, 0, 0.075]$, 求得 4 个 $\tilde{J}$, 可对应确定 4 条轨道, 如图 5 所示, 图中轨道由外到内对应的 $\tilde{J}$ 逐渐变大. 图 5(a) 给出 4 条轨道在 $y = 0$ 处的速度分量 $\dot{x}$ 的符号变化情况, 图 5(b) 给出 $\dot{z}$ 的符号变化情况, 其中只有第 3 条轨道 (由外到内, 下同) 经微分修正后可得 Halo 轨道精确初值 $[0.8657, 0, 0.1873, 0, 0.2466, 0]$, 而第 1, 3 条轨道对应同一条 DRO 轨道 $[0.8657, 0, 0, 0.4720]$, 第 2 条轨道微分修正过程中出现矩阵奇异, 无实际对应轨道.

应用路径搜索修正法计算 Halo 轨道, 搜索起点 $[x_0, 0, z_0]$ 中 x_0 固定时, z_0 初值精度要求不高, 以图 5 中 $x_0 = 0.8657$ 为例, z_0 取值为 [0.075, 0.275], 最终得到的 Halo 轨道精确初值均为 [0.8657, 0, 0.1873, 0, 0.2466, 0].

2　应用及分析

选取位于 xz 平面上 L_1 点附近的 5 个点, x 轴分量为 0.8257 :0.01 :0.8657, z 轴分量均为 0.075, 依搜索条件各自确定若干 $\tilde{J}$, 每个 $\tilde{J}$ 轴均有可能对应一条 Halo 轨道, 经微分修正后对应结果列于表 1.

最终生成的 5 条 Halo 轨道精确初值三分量 x, z, $\dot{y}$ 列于表 2. 轨道如图 6 所示.

对上述 5 组数据的 (x, z) 进行数据拟合, 生成 4 阶方程

$$\begin{aligned} z = &-5.357 \times 10^4 x^4 + \\ &1.839 \times 10^5 x^3 - 2.368 \times 10^5 x^2 + \\ &1.355 \times 10^5 x - 2.908 \times 10^4. \end{aligned} \tag{6}$$

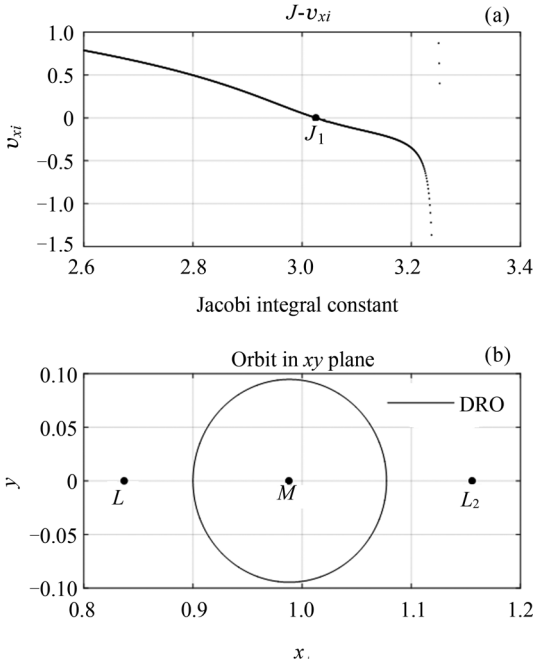


图 4　(a) 从 $x_0 = 0.9$ 出发的轨道第一次穿越 x 轴时的速度, (b) 最终确定的 DRO 轨道

Fig. 4　(a) Velocity that the orbit starting from $x_0 = 0.9$ crossing x axis firstly, (b) finalized DRO

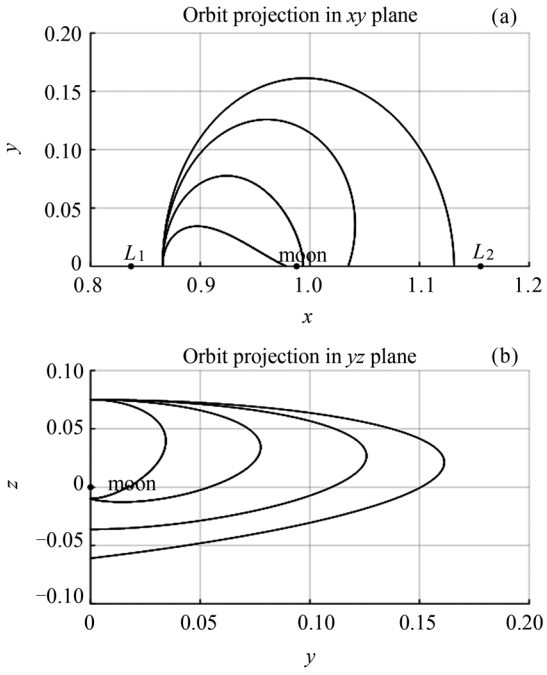


图 5　不同 Jacobi 积分常量确定的轨道在 xy (a) 及 yz 平面的投影 (b)

Fig. 5　Orbit determined by different Jacobi integral constant and its projection in xy (a) and yz (b) plane

表 1 不同 x_0 确定的 $\tilde{J}$ 对应的轨道

Table 1 Jacobi integral constant determined by different x_0 and its corresponding orbit

0.8257	2.9284	2.9695	3.0487	3.1279
	DRO	—	—	Halo
0.8357	2.9357	2.9799	3.0590	3.1349
	DRO	—	DRO	Halo
0.8457	2.9407	2.9913	3.0703	3.1398
	DRO	—	DRO	Halo
0.8557	2.9467	3.0036	3.0826	3.1426
	DRO	—	Halo	DRO
0.8657	2.9538	3.1070	3.0960	3.1466
	DRO	—	Halo	DRO

“—” 表示微分修正过程中出现矩阵奇异.

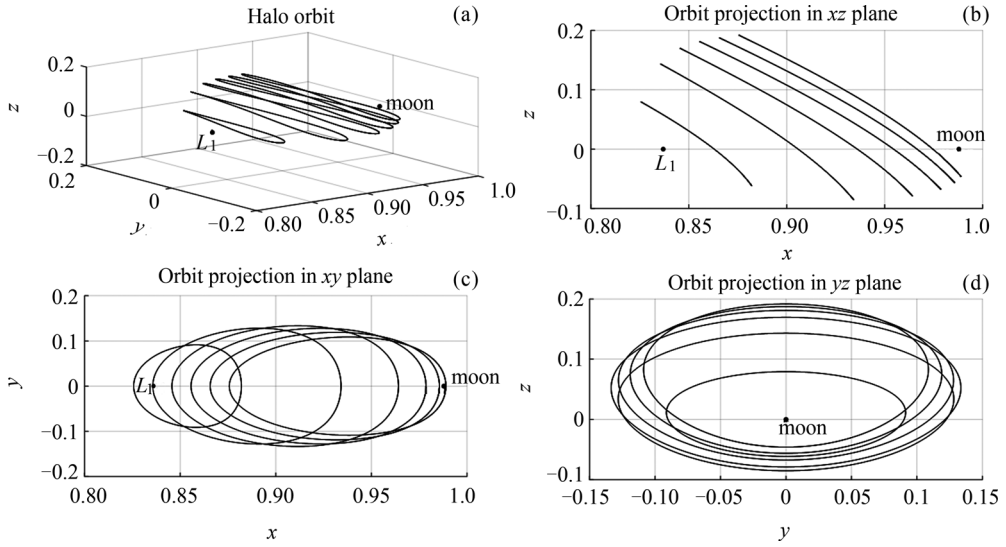


图 6 利用路径搜索修正法得到的精确 Halo 轨道

Fig. 6 Accurate Halo orbits obtained by applying the path search and correct method

表 2 Halo 轨道精确初值

Table 2 Precise initial value of Halo orbit

x	z	$\dot{y}$
0.8257	0.079 36	0.019 30
0.8357	0.1432	0.2533
0.8457	0.1695	0.2642
0.8557	0.1810	0.2586
0.8657	0.1873	0.2466

对上述 5 组数据的 $(x, \dot{y})$ 进行数据拟合, 生成 4 阶方程

$$\dot{y} = -9.479\times10^4x^4 + 3.243\times10^5x^3 - 4.16\times10^5x^2 + 2.372\times10^5x - 5.071\times10^4. \tag{7}$$

数值计算过程仅与圆形限制性三体问题中的系统质量参数 μ 有关.

式 (6) 及式 (7) 是应用路径搜索修正法求解地月系 L_1 点附近的 Halo 轨道近似初值时, 搜索起

点分量 (x,z) 及 $(x,\dot{y})$ 之间的经验关系. 取 $x_0=0.8757$, 计算 Halo 轨道近似初值, 得 $\tilde{z}_0=0.1855$, $\tilde{\dot{y}}_0=0.2157$; 经微分修正得精确初值 $z_0=0.1917$, $\dot{y}_0=0.2312$, 即应用式 (6) 及式 (7) 可快速计算 Halo 轨道的近似初值. 利用式 (6) 可以得到 z_0 与 x_0 的关系, 如图 7 所示.

L_1 点附近 Halo 轨道初值搜索起点有 $z_0>0$, 结合图 7 可确定搜索起点 x_0 取值范围, 这在一定程度上验证了使用 Richardson 三阶近似解计算 Halo 轨道近似初值时对振幅 A_x 的要求 (A_x 取值不当时计算会发散). 经计算可知, 当 x_0 位于该范围内使得 z_0 适当大时, 经路径搜索修正法得到 $\tilde{J}$, 微分修正后结果中出现一条 DRO 轨道及 Halo 轨道; 但若 x_0 取值使得 z_0 接近 0 时, 结果中 Halo 轨道将消失, 同时可能出现平面 Lyapunov 轨道及 Vertical 轨道.

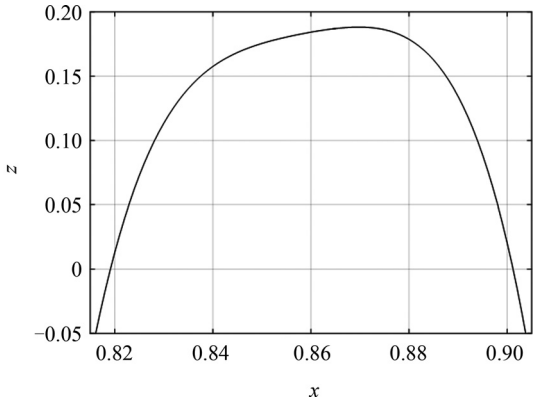


图 7　Halo 轨道起点 z_0 与 x_0 的关系

Fig. 7　Relationship between the initial value of z_0 and x_0 of Halo orbit

以 $x_0=0.8205$ 为例, 应用路径搜索修正法, $\tilde{J}$ 与最终结果中轨道类型对应关系列于表 3. 其中, Vertical 轨道精确初值为 [0.8205, 0, −0.5701, 0, −1.8205, 0], 如图 8 所示.

3　结语

路径搜索修正法核心是周期轨道关于 Poincare 截面对称. 平动点附近的平面内及空间周期轨道种类不唯一, 这也是本文应用路径搜索修正法结果中有多个 Jacobi 积分常量的原因. 目前尚无法确定 Jacobi 积分常量和实际轨道类型的对应关系, 只有通过微分修正得到精确轨道结果后才可确定具体的轨道类型.

表 3　$x_0=0.8205$ 时 $\tilde{J}$ 与轨道的对应关系

Table 3　Jacobi integral constant and corresponding orbit as $x_0=0.8205$

2.9267	2.9647	3.0439	3.1263	3.1390
DRO	—	Lyapunov	DRO	Vertical

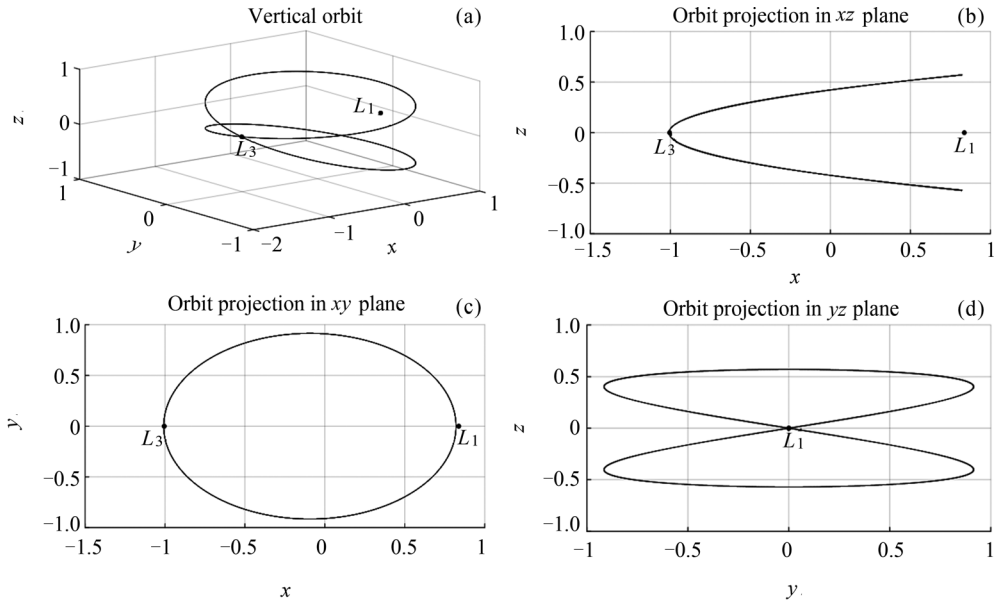


图 8　经路径搜索修正法得到的 Vertical 轨道

Fig. 8　Accurate vertical orbit obtained by the path search and correct method

应用路径搜索修正法, 利用不同搜索起点 x_0 得到的最终结果对应的轨道类型关系尚不明确, 值得进一步研究.

参考文献

[1] RICHARDSON D L. Analytic construction of periodic orbits about the collinear points [J]. *Celest. Mech.*, 1980, **22**(3): 241-253

[2] ANGEL J, MASDEMONT J. Dynamics in the center manifold of the collinear points of the restricted three body problem [J]. *Phys. D*, 1999, **132**(1/2): 189-213

[3] GOMEZ G, LIBRE J, MARTINEZ R, *et al*. Dynamics and mission design near libration points [M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2001

[4] HIRANI A N, RUSSELL R P. Approximations of distant retrograde orbits for mission design [C]. 16th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. San Diego: AAS Publications Office, 2006

[5] RUSSELL R P. Global search for planar and three-dimensional periodic orbits near Europa [J]. *J. Astronaut. Sci.*, 2006, **54**(2): 199-226

[6] TAN M H, ZHANG K, LV M B, *et al*. Transfer to long term distant retrograde orbits around the moon [J]. *Acta Astronaut.*, 2014, **98**: 50-63

[7] YUAN Jianping, ZHAO Yushan, TANG Geshi, *et al*. Spacecraft Orbit Design of Deep Space Flight [M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2014: 184-190 (袁建平, 赵育善, 唐歌实, 等. 航天器深空飞行轨道设计 [M]. 北京: 中国宇航出版社, 2014: 184-190)

[8] MENG Yunhe, ZHANG Yuedong, CHEN Qifeng. Dynamics and Control of Spacecraft Near Libration Points [M]. Beijing: Science Press, 2015: 48-52 (孟云鹤, 张跃东, 陈琪锋. 平动点航天器动力学与控制 [M]. 北京: 科学出版社, 2015: 48-52)

[9] ZHANG Yuedong. Research on Relative Motion Dynamics and Control of Libration Points Spacecrafts [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2012: 18-28 (张跃东. 平动点航天器相对运动动力学与控制研究 [D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2012: 18-28)

[10] MENG Yunhe, CHEN Qifeng. Outline design and performance analysis of navigation constellation near earth-moon libration point [J]. *Acta Phys. Sin.*, 2014, **63**(24): 248402 (孟云鹤, 陈琪锋. 地月平动点导航星座的概要设计与性能分析 [J]. 物理学报, 2014, **63**(24): 248402)

[11] STRAMACCHIA M, COLOMBO C, BERNELLIZZZERA F. Distant retrograde orbits for space-based near earth objects detection [J]. *Adv. Space Res.*, 2016, **58**: 967-988

[12] LIU P, HOU X Y, TANG J S, *et al*. Application of two special orbits in the orbit determination of lunar satellites [J]. *Res. Astron. Astrophys.*, 2014, **14**(10): 1307-1328

[13] BEZROUK C, PARKER J. Long duration stability of distant retrograde orbits [C]//AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. South Carolina: American Astronautical Society, 2013

[14] XU Ming, XU Shijie. Stability analysis and transiting trajectory design for retrograde orbits around moon [J]. *J. Astronaut.*, 2009, **30**(5): 1785-1791 (徐明, 徐世杰. 绕月飞行的大幅值逆行轨道研究 [J]. 宇航学报, 2009, **30**(5): 1785-1791)

[15] HOU Xiyun, LIU Lin. The dynamics and applications of the collinear libration points in deep space exploration [J]. *J. Astronaut.*, 2008, **29**(3): 736-747 (侯锡云, 刘林. 共线平动点的动力学特征及其在深空探测中的应用 [J]. 宇航学报, 2008, **29**(3): 736-747)

[16] LU Songtao, ZHAO Yushan. The improvement of Richardson's three order approximate analytical solution of Halo orbit [J]. *J. Astronaut.*, 2009, **30**(3): 863-869 (卢松涛, 赵育善. Halo 轨道 Richardson 三阶近似解析解的改进 [J]. 宇航学报, 2009, **30**(3): 863-869)

[17] LIU Lin, HOU Xiyun, WANG Haihong. On characteristics of collinear libration points and their applications in deep space exploration [J]. *Progress Astron.*, 2006, **24**(2): 174-182 (刘林, 侯锡云, 王海红. 关于共线平动点的特征及其在深空探测中的应用 [J]. 天文学进展, 2006, **24**(2): 174-182)

[18] XU Ming, XU Shijie. The application of libration points and Halo orbits in the Earth-Moon system to space mission design [J]. *J. Astronaut.*, 2006, **27**(4): 695-699 (徐明, 徐世杰. 地–月系平动点及 Halo 轨道的应用研究 [J]. 宇航学报, 2006, **27**(4): 695-699)