0254-6124/2012/32(4)-555–05 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

Ma Qingtian, Li Junfeng, Baoyin Hexi. Small eccentricity artificial frozen orbit design with transverse continuous low-thrust. *Chin. J. Space Sci.*, 2012, **32**(4): 555-559

横向连续推力小偏心率人工冻结轨道设计 *

马庆甜[1,2] 李俊峰[1] 宝音贺西[1]

1(清华大学航天航空学院 北京 100084)

2(西安卫星测控中心 西安 710043)

摘 要 非临界倾角自然冻结轨道要求近地点幅角为 90°, 偏心率在 1×10^{-3} 量级, 并且偏心率与轨道倾角和半长轴有特定的对应关系, 苛刻的要求极大地限制了轨道根数选择的多样性. 研究表明, 施加常幅值、方向半轨道周期切换的横向连续小推力可以形成任意轨道根数的小偏心率人工冻结轨道, 放宽自然冻结轨道对轨道根数的严苛限制. 维持小偏心率人工冻结轨道的横向连续推力 a_{T} 与半长轴的平方根成正比, 与偏心率大小成反比; 在临界倾角 i_{c} 附近, 推力 a_{T} 与倾角偏置量 Δi 近似成正比, 且长期维持的燃料消耗较小. 此外, 在进行仿真计算时还需考虑拟平均轨道根数与瞬时轨道根数的转换.

关键词 人工冻结轨道, 小偏心率, 连续小推力, 横向, 临界倾角

中图法分类号 V 412

Small Eccentricity Artificial Frozen Orbit Design With Transverse Continuous Low-thrust

MA Qingtian[1,2] LI Junfeng[1] BAOYIN Hexi[1]

1(*School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing* 100084)

2(*Xi'an Satellite Control Center, Xi'an* 710043)

Abstract The non-critical inclination natural frozen orbit requires that the argument of perigee is 90 degrees, the eccentricity e has a magnitude of order 1×10^{-3} and the eccentricity has a corresponding relationship with inclination and semi-major axis, thus the variety of selection of the orbit parameters is greatly restricted by these rigorous requirements. This paper suggests that small eccentricity artificial frozen orbit be presented by applying transverse continuous low-thrust with constant amplitude and half orbit period switching direction, thus the rigorous requirements on orbit elements are relaxed. The transverse continuous thrust a_{T} used to maintain the small eccentricity artificial frozen orbit is proportion to the square root of semi-major axis and in converse proportion to eccentricity. Considering a_{T} near critical inclination, it is proportional to the displaced inclination Δi, and the fuel used to maintain the orbit is small. Moreover the transformational relation between qusai-mean orbit elements and instantaneous orbit elements should be considered during the simulation.

* 国家自然科学基金项目资助 (10832004, 11072122)

2011-05-04 收到原稿, 2012-01-01 收到修定稿

E-mail: mqt03@126.com

Key words Artificial frozen orbit, Small eccentricity, Continuous low-thrust, Transverse, Critical inclination

0 引言

冻结轨道是指拱线不变的轨道 [1], 这个概念最早是 Cutting 在 SEASAT-A 的飞行任务设计中提出的 [2], 这类轨道在高纬度通信和地球资源遥感领域具有广泛应用. 现在使用的冻结轨道有两类. 第一类是利用地球 J_2 项摄动的冻结轨道, 轨道倾角必须为临界倾角 ($i_{\rm c}=63.43^\circ$ 或 116.57°)[3−5]. 采用该类冻结轨道的卫星中, 最具代表性的是俄罗斯的 Molniya 系列通信卫星. 第二类是利用 $J_2\sim J_4$ 项摄动的冻结轨道, 该类型轨道的近地点幅角为 90°, 偏心率在 1×10^{-3} 量级且与轨道倾角和半长轴有特定的对应关系 [6−7], SEASAT, LandSat 和 GeoSat 等对地遥感卫星都采用该类型轨道. 以上两类冻结轨道基本不需要或经过很长时间才需要进行轨道维持, 因此也可称为自然冻结轨道.

自然冻结轨道对轨道根数的苛刻要求极大地限制了轨道选择的多样性, 近些年有研究通过施加连续小推力来设计任意轨道根数的冻结轨道 [8−9], 为与自然冻结轨道进行区分, 将这类型轨道称为人工冻结轨道. 文献 [8] 系统分析了 J_2 项和常加速度推力对轨道根数的长期影响, 并指出可通过施加常加速度径向推力来消除 J_2 项引起的近地点幅角漂移; 文献 [9] 在文献 [8] 的基础上又给出了 3 种控制方法, 并就 4 种控制方法的控制效率进行了分析, 但该文献也仅仅是针对 J_2 项进行分析且未给出控制力与轨道要素的关系.

地球带谐项 J_4 项对自然冻结轨道的影响比较大, 而上述文献均没有进行过讨论, 此外, 对于轨道设计时拟平根数与瞬时根数之间转换关系, 上述文献也均没有考虑, 本文针对这两点进行了深入分析. 首先给出 $J_2\sim J_4$ 摄动下横向常幅值方向半周期切换连续推力冻结轨道的控制策略; 就设计小偏心率人工冻结轨道的控制策略时需要考虑的因素进行深入研究, 分析卫星的质量消耗特性和推力随倾角变化特性; 通过仿真算例验证了所设计的小偏心率冻结轨道控制策略的正确性. 需要说明的是, 这里提到的推力是指作用于卫星单位质量上的推力, 即推力加速度.

1 横向小推力人工冻结轨道

1.1 $J_2\sim J_4$ 项摄动对轨道根数的影响

近地卫星带谐项摄动 $J_2\sim J_4$ 引起轨道根数的变化如下 [1]:

$$\begin{aligned}
&\dot a_J=(f_{1\rm s})_a,\\
&\dot e_J=(f_{1\rm s})_e+(f_{2\rm l})_e,\\
&\dot i_J=(f_{1\rm s})_i+(f_{2\rm l})_i,\\
&\dot\Omega_J=(f_{1\rm c})_\Omega+(f_{1\rm s})_\Omega+(f_{2\rm c})_\Omega+(f_{2\rm l})_\Omega,\\
&\dot\omega_J=(f_{1\rm c})_\omega+(f_{1\rm s})_\omega+(f_{2\rm c})_\omega+(f_{2\rm l})_\omega,\\
&\dot M_J=n+(f_{1\rm c})_M+(f_{1\rm s})_M+(f_{2\rm c})_M+(f_{2\rm l})_M.
\end{aligned}\tag{1}$$

$f_{1\rm c},f_{1\rm s},f_{2\rm c}$ 和 $f_{2\rm l}$ 分别代表一阶长期、一阶短周期、二阶长期和二阶长周期摄动力项, 一阶摄动力项与 J_2 项有关, 二阶摄动力项与 J_3 和 J_4 项有关. 轨道根数 (a,e,i) 的一阶长周期摄动力项为 0, 其他轨道根数的一阶长期摄动力项如下:

$$\begin{cases}
(f_{1\rm c})_\Omega=-\dfrac{3J_2}{2p^2}n\cos i,\\[2ex]
(f_{1\rm c})_\omega=\dfrac{3J_2}{2p^2}n\Big(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\Big),\\[2ex]
(f_{1\rm c})_M=\dfrac{3J_2}{2p^2}n\Big(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\Big)\sqrt{1-e^2}.
\end{cases}\tag{2}$$

其中, $p=a(1-e^2)$ 为半通径. 一阶短周期和二阶项摄动力项不在这里列出, 可参见文献 [1].

1.2 横向连续小推力控制策略

当连续小推力产生的近地点幅角变化率 $\dot\omega_{\rm avg}$ 和 $J_2\sim J_4$ 项产生的近地点幅角变化率 $\dot\omega_J$ 互相抵消时能够形成人工冻结轨道, 对应的冻结方程为

$$\dot\omega=\dot\omega_{\rm avg}+\dot\omega_J=0.\tag{3}$$

文献 [9] 认为施加按如下规律变化的横向常幅值连续小推力 $a_{\rm T}$ 能够形成人工冻结轨道:

①当 $0\leqslant f\leqslant\pi$ 时, $a_{\rm T}$ 取负值 (或正值);

②当 $\pi\leqslant f\leqslant2\pi$ 时, $a_{\rm T}$ 取正值 (或负值).

其中, f 为真近点角, $a_{\rm T}$ 为横向推力. 按照上述控制

策略重写式 (3) 中 $\dot{\omega}_{\rm avg}$, 有

$$C_{\rm T}a_{\rm T}+\dot{\omega}_J=0. \tag{4}$$

其中,

$$C_{\rm T}=\frac{2}{\pi e}\sqrt{\frac{a}{\mu}}(2-e^2). \tag{5}$$

由式 (4) 可得

$$a_{\rm T}=-\frac{1}{C_{\rm T}}\dot{\omega}_J. \tag{6}$$

文献 [8] 和 [9] 中在设计控制力时既没有考虑 $\dot{\omega}_J$ 中的二阶长期摄动力项 $(f_{2{\rm c}})_\omega$ 和二阶长周期摄动力项 $(f_{1{\rm l}})_\omega$, 也没有考虑瞬时根数和拟平均根数的转换关系. 下面给出式 (1) 中 $\dot{\omega}_J$ 的二阶长期、二阶长周期摄动力项 [1]:

$$\begin{aligned}(f_{2{\rm c}})_\omega =&-\frac{35J_4}{8p^4}n\Big[\Big(\frac{7}{12}+\frac{27}{14}e^2\Big)-\\&\sin^2 i\Big(\frac{93}{14}+\frac{27}{4}e^2\Big)+\sin^4 i\Big(\frac{21}{4}+\frac{81}{16}e^2\Big)\Big],\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}(f_{2{\rm l}})_\omega =&\frac{J_3}{p^3}n\frac{1}{e\sin i}\Big[\frac{3}{4}\sin^2 i\Big(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\Big)-\\&\frac{3}{8}e^2(4-35\sin^2 i+35\sin^4 i)\Big]\sin\omega-\\&\frac{35J_4}{3p^4}n\Big[\sin^2 i\Big(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\Big)-\\&e^2\Big(\frac{9}{14}-\frac{15}{4}\sin^2 i+\frac{27}{8}\sin^4 i\Big)\Big]\cos 2\omega.\end{aligned} \tag{8}$$

观察式 (7) 和式 (8) 可以看出, 当偏心率 e 较大时 (0.1 量级), $(f_{2{\rm c}})_\omega$, $(f_{2{\rm l}})_\omega$ 与 $(f_{1{\rm c}})_\omega$ 相差一个量级, 轨道设计时不需要考虑二阶摄动力项; 而当偏心率 e 较小时 (1×10^{-3} 量级), 式 (8) 中第一项 J_3/e 和 J_2 项都处于 1×10^{-3} 这个量级, 在使用式 (6) 进行控制力设计时必须考虑该项的影响. 再看偏心率 e 的一阶短周期摄动力项

$$\begin{aligned}(f_{1{\rm s}})_e =&\frac{3nJ_2}{2a^2e}\sqrt{1-e^2}\Big(\frac{a}{r}\Big)^4\cdot\\&\Big\{-e\sin f\Big[\Big(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\Big)+\\&\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2(\omega+f)\Big]-\\&(1-e^2)\sin^2 i\Big(\frac{a}{r}\Big)\sin 2(\omega+f)+\\&\sin^2 i\Big(\frac{r}{a}\Big)\sin 2(\omega+f)\Big\}.\end{aligned} \tag{9}$$

观察式 (9) 可以看出, 对于小偏心率轨道, 大括号中的

$$\begin{aligned}&-(1-e^2)\sin^2 i\Big(\frac{a}{r}\Big)\sin 2(\omega+f)+\\&\sin^2 i\Big(\frac{r}{a}\Big)\sin 2(\omega+f)\end{aligned}$$

可以简化为

$$\begin{aligned}&\Big[-(1+e\cos f)+\frac{1}{1+e\cos f}\Big]\sin^2 i\sin 2(\omega+f)=\\&-2e\cos f\sin^2 i\sin 2(\omega+f).\end{aligned} \tag{10}$$

结合式 (9) 大括号内的第一项可以看出, $(f_{1{\rm s}})_e$ 的量级为 J_2, 与偏心率量级一致, 因此仿真计算时的初值需考虑拟平均根数与瞬时根数的转换.

1.3 推力、质量消耗与轨道根数的关系

从式 (5) 可以看出维持人工冻结轨道的推力与轨道根数 a 和 e 相关, 即

① $a_{\rm T}$ 与 $\sqrt{a}$ 成正比;

②当 $e\ll0$ 时, $a_{\rm T}$ 与 e 成反比.

特别是 $e\to0$ 时, $a_{\rm T}\to0$, 即当偏心率趋于 0 时, 推力亦趋于 0.

在偏离临界倾角 $i_{\rm c}$ 的 $i_{\rm c}+\Delta i$ 处

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_J\approx&(f_{1{\rm c}})_\omega+(f_{2{\rm l}})_\omega\approx\\&\frac{3J_2}{2p^2}n\Big[2-\frac{5}{2}\sin^2(i_{\rm c}+\Delta i)\Big]+\\&\frac{J_3}{p^3}n\frac{1}{e\sin i}\Big\{\frac{3}{4}\sin^2 i\Big[2-\\&\frac{5}{2}\sin^2(i_{\rm c}+\Delta i)\Big]\Big\}\sin\omega\approx\\&-\Big(\frac{3J_2}{2p^2}n+\frac{J_3}{p^3}n\frac{3\sin i}{4e}\sin\omega\Big)\sin 2i_{\rm c}\Delta i.\end{aligned} \tag{11}$$

即轨道倾角偏离量 Δi 与 $\dot{\omega}_J$ 成正比, 由式 (6) 进一步可得, 推力 $a_{\rm T}$ 与轨道倾角偏离量 Δi 成正比.

虽然维持人工冻结轨道所需的推力 $a_{\rm T}$ 较小, 但长时间作用产生的质量消耗还是比较可观的, 下面分析质量消耗. 质量消耗方程为

$$\dot{m}=-\frac{m|a_{\rm T}|}{gI_{\rm sp}}. \tag{12}$$

其中, m 为卫星的质量, g 为重力加速度, $I_{\rm sp}$ 为发动机比冲. 卫星的初始质量为 m_0, 于是根据式 (12) 可得如下卫星质量与时间的关系式:

$$m=m_0\exp\Big(-\frac{|a_{\rm T}|}{gI_{\rm sp}}t\Big), \tag{13}$$

即卫星的质量呈指数下降.

2 仿真算例

地球摄动模型采用 EGM96 20×20 阶次模型, 积分器采用 7, 8 阶伦格库塔, 积分精度设置为相对误差

$$\Delta \boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} = 1 \times 10^{-13},$$

绝对误差

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{E}_{\mathrm{a}} = [&1 \times 10^{-8}, 1 \times 10^{-8}, 1 \times 10^{-8},\\ &1 \times 10^{-10}, 1 \times 10^{-10},\\ &1 \times 10^{-10}, 1 \times 10^{-10}].\end{aligned}$$

小偏心率轨道的初始轨道根数列于表 1.

可见这时候设计采用的初始轨道根数和瞬时轨道根数的半长轴相差虽然不大, 但是偏心率 e 却有很大差别. 本算例取得的轨道倾角在临界倾角附近, 施加的横向推力大小为 $0.001\,521\,\mathrm{mm\cdot s^{-2}}$, 对于初始质量 1000 kg 的卫星, 推力大小为 1.521 mN, 可采用比冲为 3000 s 的离子发动机, 利用式 (13) 得出卫星运行 1 年消耗的质量为 1.630 kg, 消耗的质量仅占卫星总质量的 0.163%. 图 1 和图 2 分别给出采用横向连续小推力控制策略后近地点幅角 ω 和偏心率 e 随时间的变化.

从图 1 和图 2 可以看出, 虽然近地点幅角和偏心率的变化范围都比较大, 但它们都在给定的轨道根数周围变化, 近地点幅角 ω 和偏心率 e 的大范围振荡是小偏心率轨道的短周期振荡导致的.

在临界倾角 i_{c} 附近, 横向推力 a_{T} 与偏置倾角 Δi 的关系如图 3 所示.

从图 3 可以看出, 在 Δi 的 $\pm 5^{\circ}$ 的范围内 a_{T} 与 Δi 近似成正比, 这与由式 (11) 得出的结论相符.

表 1 小偏心率轨道的初始轨道根数

Table 1 Initial orbit elements for small eccentricity orbit

轨道根数	拟平均轨道根数	瞬时轨道根数
a_0/km	7378.140	7370.174
e_0	0.002	0.0007080
$i_0/(^{\circ})$	70	69.9888
$\omega_0/(^{\circ})$	90	90
$\Omega_0/(^{\circ})$	0	0
$M_0/(^{\circ})$	0	0

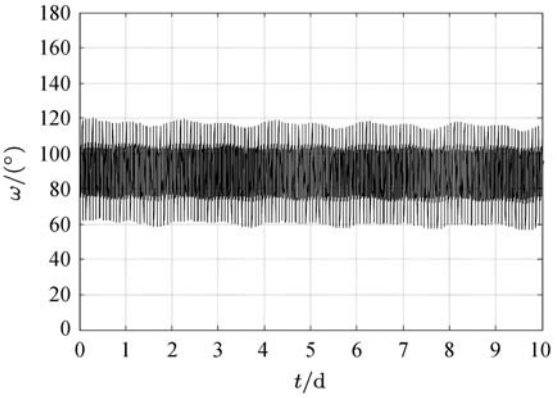


图 1 施加控制 a_{T} 后近地点幅角 ω 的变化

Fig. 1 Variation of the argument of perigee ω after applying control a_{T}

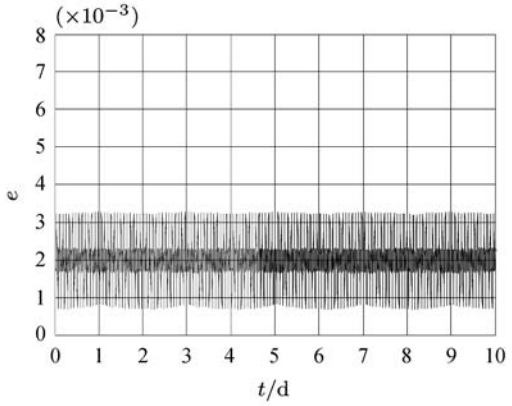


图 2 施加控制 a_{T} 后偏心率 e 的变化

Fig. 2 Variation of eccentricity e after applying control a_{T}

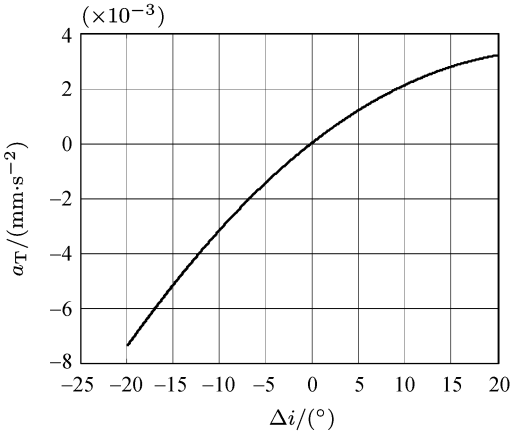


图 3 横向推力 a_{T} 与倾角偏置量 Δi 之间的关系

Fig. 3 Relation between transverse thrust a_{T} and displaced inclination Δi

3 结论

针对自然冻结轨道对于轨道根数的严苛要求, 给出了常幅值、方向半周期切换的横向连续推力人工冻结轨道维持策略. 研究表明, 推力的大小与轨道半长轴平方根成正比, 与偏心率成反比; 尤其是, 对临界倾角附近轨道, 推力与倾角偏置量成正比且长期维持的能量消耗较小, 1 年轨道维持的燃料消耗仅占卫星总质量的千分之几. 仿真计算表明, 所设计的轨道维持策略能够将近地点幅角维持在冻结值附近 $\pm 30^\circ$ 的范围内. 由于偏心率的短周期项与偏心率大小本身处在同一量级, 因此在进行仿真计算时还需考虑拟平均根数与瞬时根数的转换关系.

参考文献

[1] Liu Lin. Orbit Theory of Spacecraft [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2000. 80-219. In Chinese (刘林. 航天器轨道理论 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2000. 80-219)

[2] Cutting E, Frautnick J C, Born G H. Orbit analysis for SEASAT-A [J]. *J. Astronaut. Sci.*, 1978, **26**(4):315-342

[3] Liu Lin. A Solution of the motion of an artificial satellite in the vicinity of the critical inclination [J]. *Acta Astron. Sin.*, 1974, **15**(2):230-240. In Chinese (刘林. 人造地球卫星在临界角附近运动的解 [M]. 天文学报, 1974, **15**(2):230-240)

[4] Coffey S L, Deprit A, Miller B R. The critical inclination in artificial satellite theory [J]. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 1986, **39**(4):365-406

[5] Jupp A H. The critical inclination problem—30 years of progress [J]. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **43**(1):127-138

[6] Yang Weilian. Frozen orbit with its application [J]. *J. Astronaut.*, 1990, **11**(1):23-30. In Chinese (杨维廉. 冻结轨道及其应用 [J]. 宇航学报, 1990, **11**(1):23-30)

[7] Zhao Changyin. GEOSAT and its orbit characteristics [J]. *Public. Purple Mt. Observ.*, 1997, **16**(4):239-244. In Chinese (赵长印. GEOSAT 及其轨道特征 [J]. 紫金山天文台台刊, 1997, **16**(4):239-244)

[8] Wilkins C C, Kapila V. Eliminating perigee rotation in J_2 perturbed orbits with a constant radial acceleration [R]//Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. AIAA 2007-6844

[9] Wang Gongbo, Meng Yunhe, Zheng Wei, *et al.* Artificial frozen orbit control scheme based on J_2 perturbation [J]. *Sci. China*: *E*, 2010, **53**(11):3138-3144