中 国 科 学
1986 年 8 月　　B 辑　　第 8 期

强迫波、自由波和纬向气流的相互作用

——II. 高低指数的转换和振荡的定性分析

金 飞 飞　　朱 抱 真
（中国科学院大气物理研究所，北京）

摘　　要

本文对第一部分所建立的一个近共振强迫波和近斜压不稳定自由波的非线性相互作用模式，用不连续振动的近似分析方法进行讨论. 文中划分混合型动力系统的相空间，从而区分运动的快变和慢变过程，由此分析高低指数环流之间的转换机制，以及指数循环的不均匀周期振荡的形成机制.

一、强迫波自由混合系统不连续振荡数学模型的定性分析

在第一部分[1]最后一节中，我们分析了自由波的斜压不稳定性所造成的 (iii) 类解向 (iv) 类解的可能分支. 但是由第一部分中的图 2 可知，(iii) 类解与 (iv) 类解的存在域并不重合，而且 (iii) 类解具有多解性. 因此必须进一步分析在什么时候，什么样的 (iii) 类解向 (iv) 类解分支，以及 (iv) 类解的不稳定性所引起的新的分支解的特征. 为了清晰地分析问题，将采用一种直观并且有效的分析方法.

由第一部分的(3.15)式可知，式中系数 a_r, R_m 与 ν_m, ν'_m 直接相关，由于

$$O(\nu_m) = O(\nu'_m) = O(|\Delta|^{\frac{r}{2}})$$

是一个小量，所以有

$$O(a_r) = |\Delta|^{\frac{r}{2}}, \quad O(R_m) = |\Delta|^{\frac{r-1}{2}}. \tag{1.1}$$

即 a_r 是一个小参数，而 R_m 不是小量. 在 V 的方程中，R_m 与 $|B|$ 相联系而与方程中各项平衡. 而在 $|B|$ 的方程中，

$$\frac{d}{dT}|B| = a_r(\eta + V)|B|, \tag{1.2}$$

却直接出现了一个与时间导数相联系的小参数 a_r. 令

$$a_r = a_{r0}\varepsilon, \quad \tau = \varepsilon T, \quad \varepsilon = |\Delta|^{\frac{r}{2}} \ll 1. \tag{1.3}$$

那么可把第一部分中的(3.15)式改写成

$$\varepsilon \frac{dA}{d\tau} = iN_s VA - R_{\nu'}A + \theta,$$

本文 1984 年 11 月 12 日收到，1985 年12月11日收到修改稿.

$$\varepsilon\frac{d}{d\tau}V=-b\left[\varepsilon\frac{d}{d\tau}|A|^2+R_\nu|A|^2\right]-b_1R_m|B|^2+\theta_A-R_\mu V,\qquad(1.4)$$

$$\frac{d}{d\tau}|B|=a_{r0}(\eta+V)|B|.$$

由于式中 ε 为一个小参数，只要它充分小，(1.4) 式就构成了一个不连续振动系统的数学模型. 可用“不连续振动理论”中提出的近似方法，分析系统中解的近似行为和极限性质. 近似方法的详细内容可参见文献[2]和 Андронов (1964) 的原著[3].

在(1.4)式中，前两个方程中的导数项都带有小参数 ε，略去这些小参数项，则可得

$$\begin{aligned}&iN_sV-R_{\nu'}A+\theta=0,\\&-bR_\nu|A|^2-b_1R_m|B|^2-R_\mu V+\theta_A=0,\\&\frac{d}{d\tau}|B|=a_{r0}(\eta+V)|B|.\end{aligned}\qquad(1.5)$$

(1.5)式是(1.4)式的一个近似系统，它是以 τ 为时间尺度的相对于 T 的尺度更为缓变的系统. 因而相对地，我们称 T 时间尺度的变化为快变，而 τ 时间尺度的变化为缓变. 这个近似系统表明，强迫波部分 A，V 处于准平衡的准定常状态，而斜压自由波在作缓慢的振幅变化，它相当于一种可变强迫源，在改变着强迫波的状态.

系统 (1.5) 式作为一个近似系统，显然不能自始至终地完全替换 (1.4) 式，后者还有一个(1.5)式根本不能描述的快变近似系统. 令

$$T=\varepsilon^{-1}\tau,$$

代回(1.4)式，同样略去带 ε 的项，可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dT}A=iN_sVA-R_{\nu'}A+\theta,\\&\frac{d}{dT}V=-b\left[\frac{d}{dT}|A|^2+R_\nu|A|^2\right]-b_1R_m|B|^2+\theta_A-R_\mu V,\\&\frac{d}{dT}|B|=0.\end{aligned}\qquad(1.6)$$

系统(1.6)式是以比 τ 较快的时间尺度 T 变化的，相对于 (1.5) 式而言为快变的系统. 这个系统用于描述强迫波的迅速调整阶段的演变特征. 在强迫波的迅速调整阶段，这个系统表明，自由波的振幅是准定常的. 由于考虑了对自由波有一定强度的摩擦作用，而只有弱的不稳定性，这就决定了在整个系统中所考虑的斜压不稳定自由波的振幅变化比较慢. 这是形成 (1.5) 和(1.6)式这样一类动力系统的一个原因.

在(1.5)式中，有两个平衡关系式. 在相空间 ($|B|$, V, $\mathrm{Re}(A)$, $\mathrm{Im}(A)$) 中，它们决定了相空间中的一个平衡子空间.

为了图示方便，仅考察在 ($|B|$, V) 空间中的投影的情况. 对一定的外源 ($|\theta|$, θ_A)，由(1.5)式的前两式，可得准平衡曲线，由

$$y\equiv\theta_A-b_1R_m|B|^2=R_\mu V+bR_\nu|\theta|^2/[R_\nu^2+(N_sV)^2]\qquad(1.7)$$

来描述. 为了简单，进一步用 (y, V) 平面来代替 ($|B|$, V) 平面. 图 1 中给出了平衡曲线的图示.

如以 y 代替 θ_A 作为一个参数，那么用(1.5)式来讨论图 4 中平衡曲线上的状态的稳定性

与我们对纯强迫波平衡态的稳定性分析[4]是完全类似的．用那里的结果同样可以证明图 1 中 $\overset{\frown}{pQ}$ 上的状态是不稳定的．记之为集和 F^-，而其它部分是稳定的，记为 F^+．

定义

$$V_c = -\eta,\quad y_0 = \theta_A,$$
$$y_Q = y|_{V=V_Q},\quad y_P = y|_{V=V_P}, \tag{1.8}$$

其中 V_P，V_Q 是图 1 中 p，Q 二点处的 V 值．注意到 $|B| \geqslant 0$，因而由 y 的定义 (1.7) 式知，在 (y, V) 空间中，只有 $y \leqslant y_0$ 的部分是有物理意义的状态空间，而 $y > y_0$ 的部分不是状态空间．

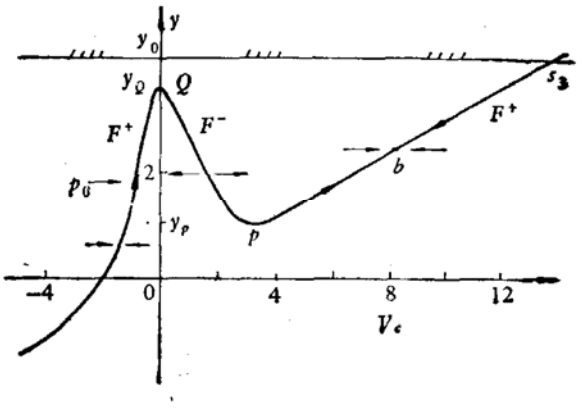

图 1　相空间的划分和定性方向场示意图
(F^+ 的附近为缓变区，其它区为快变区。图中所示曲线对应 $|\theta| = 0.58$，$R_\nu = R_\mu = 0.19$)

当 $|B| = 0$ 时，$y = y(V)$ (由 (1.7) 式表示) 与 $y = y_0$ 的交点就是相空间中 (iii) 类解的状态．对于 (iv) 类解，因 $|B| > 0$，所以位于 $y < y_0$ 的区域中．由第一部分的 (5.2) 式可知，在 (y, V) 相空间中，平衡曲线 $y = y(V)$ 与 $V = V_c$ 的交点就是相空间中 (iv) 类解的状态．

因此，根据 y_0 和 V_c 值，在相空间的平衡曲线上很容易确定 (iii) 类解(记为 s 或 s_1，s_2，s_3) 和 (iv) 类解 (记为 b) 的位置．

确定相空间中的方向场可分两个部分．首先由(1.5)式确定平衡曲线 F^+，F^- 上的方向．

当图 1 中的平衡曲线上的 V 满足

$$V + \eta = V - V_c > 0$$

时，由(1.5)式可知，$\frac{d}{d\tau}|B| > 0$，因此 y 值减少．所以在此曲线上相点具有沿曲线向下变化的方向；而在

$$V - V_c < 0$$

的部分，曲线上相点有沿曲线向上变化的方向．这样由 V_c 值和 (1.5) 式就确定了图 1 中平衡曲线上的方向场．

第二部分就是平衡曲线以外的相空间的方向场，因这些区域中的运动满足 (1.6) 式，而不满足(1.5)式．所以由(1.6)式来确定它的方向场．

在 (y, V) 平面上，由(1.6)式知道，这一部分相空间中 $|B|$ 值不变，因此 y 值不变，所以方向场是水平的．进一步根据 F^+ 和 F^- 的性质，F^+ 上的状态相对于 (1.7) 式而言是稳定的平衡态，而 F^- 上的状态对于 (1.7) 式是不稳定的平衡态．因此相点的运动方向指向 F^+，而背离 F^-．这样由(1.7)式及 F^+ 和 F^- 的性质就得到了快变区中的定性方向场．

通过上述方法，整个相空间 (y, V) 中的方向场就确定了，尽管这个方向场只给出了明确的相点运动的近似方向，而不代表相点的变化速率．但从这个定性的方向场就可以分析解的近似相轨线的走向，并完全确定极限环解的稳定性．同时，根据这样从数学上分析得到的分段相轨线，就可以了解这些解的变化过程所代表的物理过程．从而分析强迫波与自由波的相互制约．

二、作为极限点的极限解与高低指数环流之间的转换

前面所指出的 (iii) 类解属于极限解中的极限点解，在 ($|B|$, V, $\mathrm{Re}(A)$, $\mathrm{Im}(A)$) 相空间中，(iv) 类解也是极限点解.

η 值和 y_0 值的大小直接影响 (iii) 类解和 (iv) 类解的存在和稳定性，对解的极限性质有着本质上的影响. 同时，这两个参数对 (iii) 类解和 (iv) 类解在平衡曲线上所处的位置也有决定作用. 我们知道，无论是 (iii) 类解，还是 (iv) 类解，当它位于左支曲线上同时纬向气流的修正值 V 很弱，尤其是当 V 值接近于零时，强迫波部分就有很大的振幅. 因此，我们可以称位于左支曲线上的 (iii) 或 (iv) 类解分别为低指数的 (iii) 类或 (iv) 类解. 反之，位于右支曲线上的 (iii) 或 (iv) 类解中，纬向气流修正 V 值大，强迫波振幅弱，因而称之为高指数的 (iii) 或 (iv) 类解. 低指数或高指数的两类解的强迫波部分相似，主要差别在于 (iv) 类解中还共存着移动性自由波.

根据 (iii) 和 (iv) 类解的这些物理特征，就可以讨论大气环流指数循环中高、低指数型的强迫波的维持和崩溃.

1. 低指数环流的崩溃和高指数环流的维持

首先讨论 $y_0 > y_Q$, $y_P > V_c$, 且 $V_c < V_0$ 的情况. 其中 V_0 是 $y = y_0$ 与平衡曲线 $y = y(V)$ 交点处的值. y_Q 表示 y 在 Q 点处的取值. $y_0 > y_Q$，表示纬向均匀加热强度较大，系统中的 (iii) 类解只有位于右支高指数曲线上的单解. $V_0 > V_c$ 则表示这样的一个 (iii) 类解对斜压自由波扰动是不稳定的，而 $V_P < V_c$，则表示 (iii) 类解不稳定分支后的 (iv) 类解，也在高指数曲线上. 图 1 中给出了满足上述参数条件的定性相图.

图 1 中 S_3 就是一个满足 $V_0 > V_c$ 的斜压不稳定的 (iii) 类单个解. 当存在自由波扰动时，斜压不稳定发展，从而此 (iii) 类解不能维持，而分支为 (iv) 类解. 如图 1 中所示，S_3 点附近的相点沿右支平衡曲线向 b 点变化.

在相空间中任取一个点 p_0 作为初始点，如图 1 所示. 由图中的方向场就可以确定相轨线的走向. 因 p_0 位于快变区中，首先它沿水平方向所指的路径变向左支 F^+ 曲线，然后沿左支平衡曲线变化到 Q 点，并脱离平衡曲线，最后达到右支 F^+ 曲线上并趋于 b 点. 因此解的整个相轨线就由两段位于快变区及两段位于左、右支 F^+ 上的相轨线组成.

由描述这一相轨线的物理系统(1.5)和(1.6)式可以说明这个解演变的物理过程. 从初始点指向左支 F^+ 曲线的变化过程是由 (1.6) 式描述的强迫运动，这是强迫波向准平衡态的调整过程. 在这一过程中，自由波振幅变化不大，而表现为强迫波对外源的响应. 当相点进入 F^+ 曲线(左支)后，强迫波与外源基本上已适应. 但是，由于初始状态中就存在着有限振幅的自由波，而在此左支曲线上 $V - V_c < 0$，所以状态中的自由波斜压衰减，结果使纬向气流切变的修正 V 增大. 这在相图中就表现为图 1 中左支 F^+ 曲线上沿图示的方向向上的相点运动过程. 可见，这一过程中，自由波扰动能量的释放起到了加大纬向对称加热所起的同样的作用.

自由波减到一定程度，到达 Q 点. 这时由于自由波中释放的能量加强了纬向强迫源，把强迫波状态推到了强迫不稳定的边缘. 于是，强迫波紧跟着就发生一次快速的调整，使状态从左支 F^+ 曲线迅速变到了右支 F^+ 曲线上. 前面已经指出过，在左、右两支曲线上的状态中，强

迫波的性质有很大差异. 从左支曲线上的状态向右支曲线上的调整过程，意味着一次强迫波的低指数型崩溃，并转化为高指数型. 因此，自由波衰减的能量释放，也可以触发两类强迫波状态之间的变更.

当状态在右支 F^+ 曲线上时，由于这时有

$$V - V_c > 0,$$

即状态中的纬向气流是斜压不稳定的，所以自由波开始增幅. 在图 1 中，表现为沿右支曲线相点向 b 点变化，最后趋于终态 b 点. 因而图 1 中以 p_0 为初始点的解，由于自由波与强迫波通过基本气流的相互作用，发生了一次低指数型的强迫波崩溃，随即转化为高指数的强迫波状态. 最终达到一个高指数型的 (iv) 类解的过程.

2. 高指数环流向低指数环流的演变

如图 2 所示的情况，考虑 $y_0 > y_Q$，$V_c < V_Q$ 条件下的相空间方向场和极限点的性质. 这时 b 点位于左支平衡曲线上. 在这样一个 (iv) 类解中，强迫波部分是低指数型的.

从图 2 的定性方向场易知，(iii) 类解 s_3 仍是不稳定的，而 b 点是稳定的，我们将初值点取在 s_3 点的附近，即对 s_3 点作小扰动，最终解状态也将按图中的方向场转变到 b 点. 但是与图 1 中所示的过程不同. 在图 1 和图 2 中同样从 s_3 附近到 b 点的两个变化过程的相轨线差别很大. 在图 2 中，整个解的变化过程经历了强迫波从高指数环流转变为低指数环流的过程. 同时，自由波也增强到有限振幅. 而在图 1 中，当平衡态从 s_3 过渡到 b 时，强迫波部分没有什么质的变化.

在图 2 中，由于任取一个初始点，最终都是达到低指数型的(iv)类 b. 因此，当初始时刻状态中的强迫波为低指数型时，则低指数型强迫波得以维持. 当初始时刻状态中的强迫波为高指数型时，则解的变化过程表示一个高指数型向低指数型的转变过程. 后一情况表明，斜压不稳定发展的自由波把纬向气流调整为中性切变，当这个中性切变气流恰好处于强迫波的次共振且近共振状态时，又促使强迫波共振发展成为低指数型的大振幅波. 因此自由波的斜压不稳定性与强迫波的共振性相互配合是一种内在的物理机制，它是一种低指数强迫波型建立的未被认识的机制.

在图 1 中，由于中性临界斜压切变气流对强迫波而言是超共振的，因此斜压不稳定与近共振性不相配合，所以在极限环解 b 中强迫波在临界斜压切变支配下是一种小振幅波动.

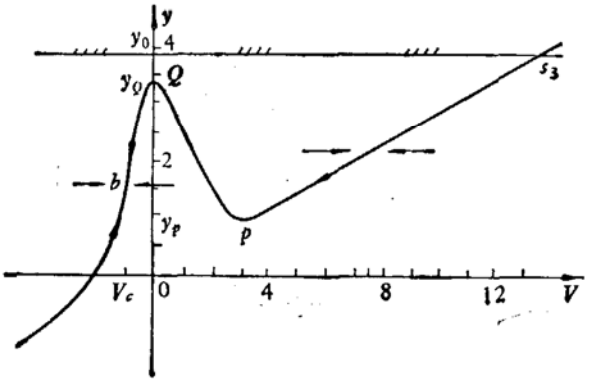

图 2　相平面定性相图
(除 V_c 取值不同外，其余与图 1 相同)

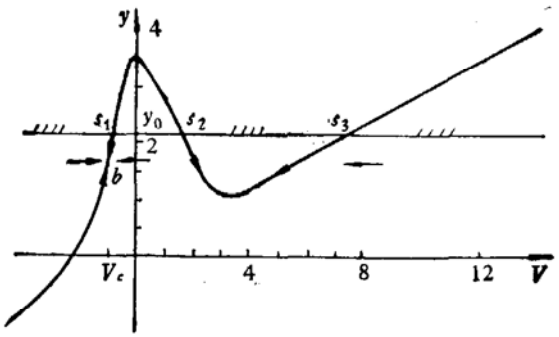

图 3　除 y_0，y_c 取值不同外，其余同图 2

因此，从图 1 和图 2 的分析我们可以得到，自由波的斜压不稳定性对整个解有着决定性的意义．强迫波的共振性依赖于斜压不稳定切变的大小而发挥作用．

图 3 表示 $y_P < y_0 < y_Q$，$V_c < V_{0m}$ 的情况．其中 V_{0m} 为 $y = y_0$ 与左支平衡曲线的交点处的 V 值．与图 2 不同的是，这时系统中有四个极限点、即三个 (iii) 类解 s_1，s_2，s_3，及一个 (iv) 类解 b 点．由图 3 中给出的定性方向场易知，其中只有一个稳定的平衡态解，即 (iv) 类 b，而其余三个 (iii) 类解都是不稳定的．因此，强迫波系统中的多平衡态因自由波的斜压不稳定性，而分成一个低指数型的 (iv) 类解，所以图 3 中的情况也代表着一个低指数型的维持过程．

当 $y_P < y_0 < y_Q$，$V_Q < V_c < V_P$ 时，相图如图 4 所示．与图 3 不同的是，只有一个 (iii) 类解 s 点是稳定的，而 s_2 和 s_3 及 b 都是不稳定的．s_2 和 s_3 的不稳定性与图 4 的情况相似，是由于自由波的不稳定性造成的．b 态的不稳定性是由于它的强迫波是微超共振不稳定的．这种情况下，由于自由波的斜压不稳定性，使高指数型 (iii) 类解 s_3 受扰动后转化为低指数的 (iii) 类解．可见自由波起到了导致这种转换的媒介作用．这是一个非常有趣的结果．

图 5 中表示了 $y_P < y_0 < y_Q$，$V_P < V_c < V_{0M}$ 的相图，其中 V_{0M} 为 $y = y_0$ 与平衡曲线 $y = y(V)$ 的右支曲线交点处的 V 值．与图 3 和图 4 不同的是，有两个稳定的平衡态解．即一个 (iii) 类解 s 和一个 (iv) 类解 b．它们有各自的吸引域，这也可以从定性方向场来加以区分．初始点落在不同的吸引域内时，解也趋于不同的极限解．如图 5 中所示，以 p_0 为初始点的解的相轨线趋于 b 点，而初始点为 p_1 的解的相轨线趋于 s 点．s 和 b 代表着两类截然不同的解，这里的 s 点与图 4 中的 s 点相似，而 b 点与图 1 中的 b 点相似．这就说明图 5 对应的系统中既有低指数 (iii) 类解的维持过程，又有高指数 (iv) 类解的维持过程．而系统中出现哪一类过程完全依赖于初值属于哪个解的吸引域之中．

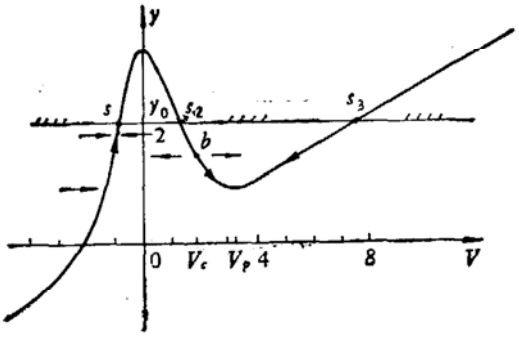

图 4 除 V_c 取值不同外，其余同图 3

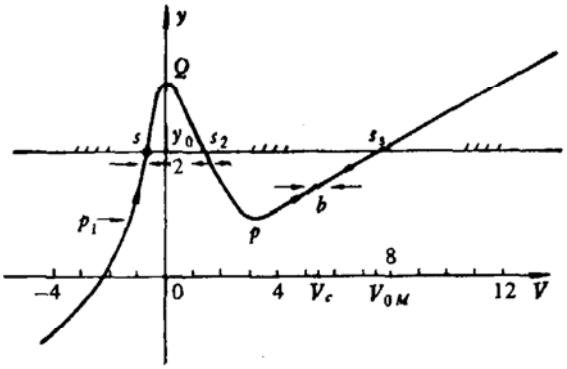

图 5 除 V_c 取值不同外，其余同图 3

对 $V_0 < V_P$，$V_c > V_0$ 和 $V_0 < y_P$，$V_c < V_0$ 的情况也可以作相似的分析，这里不再详述．

上面，我们从 (iii) 类解的维持及其向 (iv) 类解分支的诸类不同情形，分析了通过强迫波与自由波的相互作用而发生的高低指数强迫波型的建立、维持和转换．

三、作为极限环的极限解与指数循环的周期振荡

现在讨论在相空间 $(V, \mathrm{Re}(A), \mathrm{Im}(A), |B|)$ 中，相轨线为极限环的情况.

如图 6 所示，取 y_0, V_c 为

$$y_0 > y_Q, \quad V_Q < V_c < V_p.$$

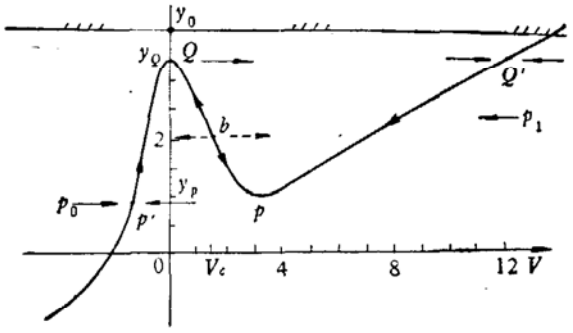

图 6

这时图 6 中所示的两个极限点 b 和 s_3 都是不稳定的. b 点的不稳定性与图 4 中的不稳定性相同. 而 s_3 的不稳定性与图 1 中的 s_3 的不稳定性相同. 由于系统中无稳定的极限点，系统中的初值解在整个变化过程中不可能达到定态. 在图 6 所示的方向场中，实际上表现出一个清楚的闭相轨线. 也就是说系统中的极限解中有一个与时间有关的极限环解. 如图 6 中 $\overset{\frown}{pp'QQ'p}$ 所构成的闭轨线. 这种情况正是文献 [2] 中所分析的结果. 由此可见，文献[2]中所讨论的耦合振荡是混合型平衡态失稳而进一步分析的结果.

我们知道，这里的强迫波状态是定常型的行星波，而自由波是传播性(相速度为 Rossby 波速)的位相瞬变. 振幅慢变的瞬变波动，所以振荡过程中的 $\overset{\frown}{p'Q}$, $\overset{\frown}{Q'p}$ 与大气中的高低指数阶段的环流特征相象. 因此文献[2]中用此解释阻塞现象.

四、总结和讨论

大气环流中长期变化是结构复杂的低频振荡. 它们包括瞬变的 Rossby 行波，准定常的阻塞形势的维持，指数循环等等各种振荡.

探讨大气的这些低频振荡的动力学是研究中长期天气预报和气候变化的物理基础. 由于现象的长期变动性质，必须使用非线性动力学方法. 在这一研究中，我们从非线性动力学系统分析了从简单到复杂的各种振荡.

在无强迫波的纯自由波系统中，由于纬向均匀加热，首先产生 Hadley 环流平衡态，当加热增强到一定的强度时，Hadley 环流发生斜压不稳定，而分支成移动性的恒幅的有限振幅 Rossby 波. 这代表着大气环流运动形态中最简单的一类振荡.

在强迫波与自由波共存的系统中，由于自由波的斜压不稳定性，导致强迫波的多平衡态向定常强迫波与瞬变的恒幅移动性自由波组成的混合型解分支. 混合型解所代表的大气运动是包括准定常强迫波和瞬变移动性波的大气环流振荡，所以这是大气中能观测到的一类较为复杂的振荡运动形态.

在强迫波多平衡态向混合型解分支的基础上，混合型解的强迫波微超共振不稳定时，进一步发生分支，文献 [2] 中所讨论的强迫波、自由波耦合作用的复杂振荡就是这种分支的结果. 在这种振荡中，准定常波和瞬变移动性波的振幅基本上呈相反的而周期性的交替变化，它表示大气环流中一类更为复杂的振荡现象.

利用“不连续振荡分析”方法，把混合系统分解成快变和慢变的两个时间尺度的系统，并在相应划分的快变和慢变相空间中分析解的相轨线及相对应的物理过程. 结果表明，大气环流

强迫波高，低指数型态的建立、维持与强迫波的共振性、自由波的斜压不稳定性及其两者的相互配合，这些内在的物理过程密切相关．当强迫波型相对于自由波扰动发生斜压不稳定时，临界斜压切变的近共振程度决定了混合型态中强迫波的特性．若临界切变对强迫波而言是次共振且共振时，强迫波具有大振幅特征构成低指数型环流，而若临界切变相对强迫波而言是远超共振时，强迫波具有小振幅特征，构成高指数型环流．这揭示了高、低指数建立、维持和转换的一种物理机制．

参 考 文 献

[1] 金飞飞、朱抱真，中国科学 B 辑，1986，6：663—672.
[2] ——，气象学报，44(1986)，38—46.
[3] Андронов, А. А., 振动理论，科学出版社，1981，1—773.