中 国 科 学
1986 年 4 月　　B 辑　　第 4 期

非 地 转 不 稳 定

曾 庆 存
（中国科学院大气物理研究所，北京）

摘　　要

本文讨论旋转正压大气中非地转运动的不稳定问题（简称“非地转不稳定”）．文中采用线性化浅水方程，并取带状基本气流，得到了普遍适用的关于运动失稳的必要条件和运动稳定的若干充分条件；指出有三类不稳定：（1）正压不稳定，其必要条件是有$(\bar{u}_r-\bar{u})/(\partial\bar{q}/\partial y)<0$的区域；（2）惯性不稳定，其必要条件是：既有$(\bar{u}_r-\bar{u})/(\partial\bar{q}/\partial y)<0$的区域，又有$f(f-d\bar{u}/dy)<0$的区域；（3）超高速不稳定，其必要条件是有$(\bar{u}_r-\bar{u})^2/|\bar{\phi}|>1$的区域，其中$\bar{u}$，$\bar{\phi}$和$\bar{q}$分别是基流的流速，自由表面的位势和位涡度；$\bar{u}_r$为任意常数，$f$为科氏参数，坐标$y$指向北方．在浅水方程中，正压不稳定是正压准地转模式或无辐散模式中的正压不稳定的推广．但只在非地转模式中才有惯性不稳定和超高速不稳定，相应的扰动是非地转运动．

大气中的中尺度运动常有较强的非地转风分量．一般认为：产生和维持这样强的非地转风的机理是非地转不稳定、地形强迫、热力激发和非线性相互作用等．由于问题的复杂性，先分别研究各个机理然后再作综合是合适的．因此，本文将对旋转正压大气中的非地转不稳定问题先作尽可能详细的普遍性的分析，以便弄清其机理．斜压大气问题以及地形和热力影响问题将作为以后分析的课题．

一、正压大气中扰动的整体性质

取带状基本气流$\bar{u}(y)$，线性化的浅水方程为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)c_0^2u'-(f-\bar{u}_y)c_0^2v'=-c_0^2\frac{\partial\phi'}{\partial x},\tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)c_0^2v'+fc_0^2u'=-c_0^2\frac{\partial\phi'}{\partial y},\tag{1.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi'+\frac{\partial c_0^2u'}{\partial x}+\frac{\partial c_0^2v'}{\partial y}=0.\tag{1.3}$$

式中f为科氏参数；u'，v'，ϕ'为扰动场；$\bar{u}_y\equiv\partial\bar{u}/\partial y$；$c_0^2\equiv\bar{\phi}(y)$，$\bar{\phi}$为相应于基流$\bar{u}(y)$的流体自由面的折合位势；其余所有符号是常用的．所有坐标和变量既可理解为有量纲的，也可以是无量纲的．本文采用无量纲表示法，于是有$O(f)=O(1)$和$O(c_0^2)=O(1)$．

本文 1985 年 8 月 7 日收到．

设我们所研究的流体层具有厚度$\bar{h}_0$和密度ρ_b，在其上为一具有密度为ρ_a的静止流体，则有折合位势$\Phi_0 = g\bar{h}_0(\rho_b - \rho_a)/\rho_b$. 在实际的大气中，在中尺度系统发展之前，常在850mb层附近有一逆温层. 假若有量纲量$g\bar{h}_0$取为该逆温层底的平均位势，而ρ_a和ρ_b分别取为其上和其下的空气密度，则Φ_0近于或略小于$400m^2/s^2$，故有量纲量$c_0 \approx 20m/s$，而 Rossby 变形半径近于100—200km. 这说明扰动的特征长度属于中尺度范围.

设u'，v'，ϕ'为x的周期函数或为沿x轴平方可积，而$y = y_1$和y_2为两刚壁，则有下面三个积分关系[1]：

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \left[\frac{c_0^2}{2}(u'^2 + v'^2) + \frac{\phi'^2}{2}\right] dxdy = -\iint_S c_0^2 u'v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dxdy, \tag{1.4}$$

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[c_0^2 q']^2}{2}\right) - \frac{\partial \phi' u'}{\partial t}\right] dxdy = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \frac{c_0^2}{2}\left[\left(1 - \frac{\bar{U}^2}{c_0^2}\right)u'^2 + v'^2 + \frac{(\phi' - \bar{U}u')^2}{c_0^2}\right] dxdy + \iint_S \frac{\bar{U}}{\left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\right)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c_0^4 q'^2}{2}\right) dxdy = 0, \tag{1.6}$$

其中

$$\bar{U} \equiv \bar{u}_r - \bar{u}, \tag{1.7}$$

$$\bar{q} \equiv c_0^{-2}\left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right), \quad \frac{d\bar{q}}{dy} = c_0^{-2}\left\{\frac{d}{dy}\left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right) + \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right)\frac{f\bar{u}}{c_0^2}\right\}, \tag{1.8}$$

$$q' \equiv c_0^{-2}\left[\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} - \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right)\frac{\phi'}{c_0^2}\right], \tag{1.9}$$

$\bar{q}$和q'分别为基流和扰动的位涡度，$\bar{u}_r$为任意常数，S表示上述流体充满的区域.

方程(1.6)是 Blumen[2] 结果的推广. 我们这里考虑了地球的旋转，并引入了$\bar{u}_r$.

能量方程(1.4)指明，扰动的演变特性(增强或衰减)依赖于其自身的空间结构及其在基流中的相对位置. 方程(1.5)和(1.6)则分别是加权位涡能 (weighted enstrophy) 守恒律和修正的能量和位涡能 (modified energy-enstrophy) 守恒律[3,4]在非地转运动中的推广. 其实，若取地转风关系$u' = f^{-1}\partial\phi'/\partial y$，则(1.5)式中第二项的积分为零，于是有加权位涡能守恒. 而(1.6)式则表明，在非地转模式中存在着比准地转模式多得多的不稳定类型（详见第二节到第四节).

还需指出，在推导(1.5)和(1.6)式时，我们假定了$\partial\bar{q}/\partial y \neq 0$，否则我们有位涡能守恒：

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_S q'^2 dxdy = 0. \tag{1.10}$$

二、运动失稳的必要条件

由(1.6)式即可得到普遍适用的关于运动失稳的必要条件和运动稳定的若干充分条件[1]. 这些可综合为下列诸定理：

定理 1. 若有常数$\bar{u}_r$，使得$(\bar{u}_r - \bar{u})^4/c_0^2 < 1$和$(\bar{u}_r - \bar{u})/(\partial\bar{q}/\partial y) > 0$在流体内处处成立，则运动为稳定的.

证明方法很简单：因若定理中所列条件成立，则由(1.6)式得到一个守恒的正定二次型的积分，故每一项，即 $c_0^2(1-\bar{U}^2/c_0^2)u'^2/2$，$c_0^2v'^2/2$，$(\phi'-\bar{U}u')^2/2$ 和 $\bar{U}c_0^4q'^2/(2\partial\bar{q}/\partial y)$ 在任何时刻都一致有界（在平方可积意义上），这表明运动是稳定的．注意：$(\phi'-\bar{U}u')^2$ 的有界性意味着或者 ϕ' 和 u' 两者都有界，或者是两者无界，但满足平衡关系 $\phi'-\bar{U}u'\equiv 0$．但满足平衡关系 $\phi'-\bar{U}u'\equiv 0$ 的函数组(u',v',ϕ')不可能是方程(1.1)—(1.3)的解，故 ϕ'，u' 不可能为无界．

定理 2. 关于运动失稳的普遍性的必要条件是：对于任一常数 $\bar{u}_r$，在流体内都有或者是 $(\bar{u}_r-\bar{u})^2/c_0^2>1$ 或者是 $(\bar{u}_r-\bar{u})/(\partial\bar{q}/\partial y)<0$ 的区域．

定理 2 即是定理 1 的反定理．

推论 1. 若在流体内 $d\bar{q}/dy$ 或者 $\bar{u}/(d\bar{q}/dy)$ 不变号，而总切变 $|\bar{u}_{\max}-\bar{u}_{\min}|\leqslant(c_0)_{\min}-\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$ 为小量，则运动是稳定的．

证．先讨论 $d\bar{q}/dy\geqslant 0$ 的情况．取常数 $\bar{u}_r=\bar{u}_{\max}+\varepsilon,\varepsilon>0$，于是 $\bar{u}_r-\bar{u}>0$，$(\bar{u}_r-\bar{u})/(d\bar{q}/dy)>0$，及 $|\bar{u}_r-\bar{u}|^2/c_0^2\leqslant|\bar{u}_{\max}-\bar{u}_{\min}+\varepsilon|^2/c_0^2(y)\leqslant 1$．后者是$|\bar{u}_{\max}-\bar{u}_{\min}+\varepsilon|\leqslant(c_0)_{\min}\leqslant c_0(y)$的结果．故按定理 1 可知运动是稳定的．其次讨论 $d\bar{q}/dy\leqslant 0$的情况．取 $\bar{u}_r=\bar{u}_{\min}-\varepsilon$，于是 $(\bar{u}_r-\bar{u})/(d\bar{q}/dy)>0$，且 $(\bar{u}_r-\bar{u})^2/c_0^2=(\bar{u}-\bar{u}_r)^2/c_0^2\leqslant|\bar{u}_{\max}-\bar{u}_{\min}+\varepsilon|^2/c_0^2\leqslant 1$．故按定理 1 知运动亦是稳定的．

若 $\bar{u}/(d\bar{q}/dy)$ 在流体内不变号，证明方法和上面所述类似，今从略．

推论 1 中所指明的使流体运动为稳定的参数空间内的区域还可以再扩大．其实，我们有：

推论 2. 若在流体内处处有 $d\bar{q}/dy\geqslant 0$ 及 $|\bar{u}_{\max}+\varepsilon-\bar{u}(y)|\leqslant c_0(y)$，或者 $d\bar{q}/dy\leqslant 0$ 和 $|\bar{u}(y)-(\bar{u}_{\min}-\varepsilon)|\leqslant c_0(y)$，其中 $\varepsilon>0$ 为小量，则运动是稳定的．

证明方法与证明推论 1 相类似，从略．

最后指出，若基流为均匀的，即 $d\bar{u}/dy\equiv 0$，则由(2.4)式得到扰动能量守恒；若基流位涡度为均匀的，即 $d\bar{q}/dy\equiv 0$，则由(2.10)式可知扰动位涡能守恒．从而有

定理 3. 若基流为均匀的或有均匀位涡度，则运动是稳定的．

三、三种不稳定类型·广义正压不稳定

按照准地转理论，在正压流体中只有一种不稳定类型，称为“正压不稳定”，其必要条件是在流体内有 $(\bar{u}_r-\bar{u})/(\partial\bar{q}/\partial y)<0$ 的区域，其中 $\bar{q}$ 为基流的准地转位涡度，即

$$\bar{q}\approx\bar{q}_g=c_{00}^{-2}\left[\left(f-\frac{d\bar{u}}{dy}\right)-\frac{f(\bar{\phi}-c_{00}^2)}{c_{00}^2}\right],\tag{3.1}$$

而 c_{00}^2 为 $\bar{\phi}$ 的空间平均值．但在非地转模式中(即用原始方程)，当 $\bar{q}$ 不能用准地转近似，即在 $d\bar{q}/dy$ 中不能略去 $-c_0^{-4}f\bar{u}d\bar{u}/dy$ 这一项，则和条件 $(\bar{u}_r-\bar{u})/(\partial\bar{q}/\partial y)<0$ 相对应的有两类不稳定，其一为上述正压不稳定的推广，其二为“惯性不稳定”．后者被准地转模式排除了，相应的扰动是非地转的(即不满足准地转平衡关系，详见下节)．必须指出，当 $\bar{q}$ 不能作准地转近似时，即使和广义正压不稳定相对应的扰动也可能与由准地转理论得到的相差很大．

其次，在非地转模式中，还可有和 $(\bar{u}_r-\bar{u})^2/c_0^2>1$ 相对应的不稳定类型，此时基流 $\bar{u}$ 相对于 $\bar{u}_r$ 来说超过了其临界值 c_0(重力波的局地传速)，因此我们称这类不稳定为“超高速不稳

定”.它也被准地转理论排除了,相应的扰动也是非地转的(详见第五节).

四、惯性不稳定和对称不稳定

若扰动是对称的,即不依赖于 x,这时的不稳定常称为“对称不稳定”. 下面我们将表明,对称不稳定其实是惯性不稳定的特殊情况,即在扰动为带状对称情况下的退化. 换言之,惯性不稳定乃是对称不稳定的推广.

在扰动为对称情况下,由(1.1)—(1.3)式可得关于 $\phi \equiv c_0^2 v$ 的方程如下:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f\left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right) - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\} \phi = 0. \tag{4.1}$$

令

$$\phi = F(y) e^{i\sigma t}, \tag{4.2}$$

得

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} - P(y)\right] F = -\lambda S(y) F, \tag{4.3}$$

其中 $\lambda \equiv \sigma^2$, $P(y) \equiv f(f - d\bar{u}/dy)/c_0^2$, 和 $S(y) \equiv c_0^{-2}(y)$. 而边界条件就是 $F(y_1) = F(y_2) = 0$. 这是一个经典的特征值问题. 因为 $S > 0$, 故只当在区间 (y_1, y_2) 内有使 $P < 0$ 的区域才可有某些负的特征值 λ. 这表明,不稳定的一个必要条件是存在着 $f(f - d\bar{u}/dy) < 0$ 的区域. 但显然还必须满足定理 2 中所指出的必要条件,运动才可能是不稳定的,故有[1]:

定理 4. 对称不稳定的必要条件是在流体内既有 $f(f - d\bar{u}/dy) < 0$ 的区域,又有 $(\bar{u}_r - \bar{u})/(d\bar{q}/dy) < 0$ 的区域,其中 $\bar{u}_r$ 为任意常数.

必须指出,单有 $f(f - d\bar{u}/dy) < 0$ 不能保证存在对称不稳定. 其实,我们有:

推论 3. 设在流体内处处有 $f(f - d\bar{u}/dy) < 0$. 但: (1) $f - d\bar{u}/dy$ 为一常数, (2) $f(f - d\bar{u}/dy)\bar{u} \leqslant 0$ 和 $|\bar{u}(y) - (\bar{u}_{\min} - \varepsilon)| \leqslant c_0(y)$; 或者 $f(f - d\bar{u}/dy)\bar{u} \geqslant 0$ 和 $|\bar{u}_{\max} + \varepsilon - \bar{u}(y)| \leqslant c_0(y)$, 其中 $\varepsilon > 0$ 为小量, 则运动为稳定的,从而不可能有对称不稳定.

证.若 $f - d\bar{u}/dy$ 为常数,而 $f(f - d\bar{u}/dy)\bar{u} \leqslant 0$, 就有 $d\bar{q}/dy = f(f - d\bar{u}/dy)\bar{u}c_0^{-4} \leqslant 0$; 但如 $f(f - d\bar{u}/dy)\bar{u} \geqslant 0$,就有 $d\bar{q}/dy \geqslant 0$. 故由推论 2 即证明了推论 3.

注 1. 若 $(c_0)_{\min}$ 足够大,以致 $(c_0)_{\min} > |\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}|$, 则条件 $|\bar{u}(y) - (\bar{u}_{\min} - \varepsilon)| \leqslant c_0(y)$ 或 $|\bar{u}_{\max} + \varepsilon - \bar{u}(y)| \leqslant c_0(y)$ 总是满足的(参见推论 2).

注 2. 和定理 4 及推论 3 不同,在动力气象学教本和某些研究工作中常常把 $f(f - d\bar{u}/dy) < 0$ 当作惯性不稳定的充分条件. 这是由于在那里已预先引入了某些近似的缘故. 例如,若在(1.1)—(1.2)式中略去气压梯度力,这时我们得到的不是(4.1)式,而是

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f\left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right)\right\} v' = 0. \tag{4.4}$$

又如,若在(1.1)—(1.3)式中略去 c_0^2 沿空间的变化,即用常数 c_{00}^2 代替 $c_0^2(y)$, 则得到的也不是(4.1)式, 而是

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f\left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right) - c_{00}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\} v' = 0. \tag{4.5}$$

显然,若 $f(f - d\bar{u}/dy)$ 为一负常数,则由(4.4)式总有不稳定解,它随时间指数增长;而(4.5)式的解乃是下列特征波动

$$V_n(y,t)=e^{i\sigma_n t}\sin\left(\frac{n\pi}{y_2-y_1}y\right),\quad n=1,2,\cdots \tag{4.6}$$

的线性组合，其中 σ_n 由下列公式定出：

$$\sigma_n^2=f\left(f-\frac{d\bar{u}}{dy}\right)+c_{00}^2\left(\frac{n\pi}{y_2-y_1}\right)^2. \tag{4.7}$$

如果 y_2-y_1 足够大，以致于 $\pi^2c_{00}^2(y_2-y_1)^{-2}<|f(f-d\bar{u}/dy)|$，则至少有 σ_1^2 为负，从而运动是不稳定的. 但若基流还满足推论 3 中所述条件的话，运动本应是稳定的. 可见，过多地引入近似会导致不正确的结果.

推论 4. 若在区间 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 上 $f-d\bar{u}/dy$ 为常数，且 $df/dy>0$，则惯性不稳定只当下述三条件同时满足时才有可能：(1)在某区间 $y_1'\leqslant y\leqslant y_2'$ 有 $f(f-d\bar{u}/dy)<0$，其中 $y_1'\geqslant y_1, y_2'\leqslant y_2$；(2) f 在区间 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 上变号；(3) $f\bar{u}$ 在区间 $y_2\geqslant y\geqslant y_0$ 或 $y_0\geqslant y\geqslant y_1$ 上变号，其中 $f(y_0)=0$ 且 $y_0\neq y_1$ 或 y_2.

证. 这里我们只给出 $f(y_2')>0$ 时的证明. 这时在区间 $y_0<y<y_2'$ 内 $f>0$，且因在区间 $y_1'<y<y_2'$ 有 $f(f-d\bar{u}/dy)<0$，故有 $f-d\bar{u}/dy<0$. 再由：在区间 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 上 $f-d\bar{u}/dy$ 为常数，推知此区间上该常数为负，且在 $y_0\leqslant y\leqslant y_2$ 有 $d\bar{u}/dy>0$. 从而 $y>y_0$ 时 $f(f-d\bar{u}/dy)<0$，以及 $y<y_0$ 时 $f(f-d\bar{u}/dy)>0$. 今若 $f\bar{u}$ 在区间 $y_0\leqslant y\leqslant y_2$ 变号，则有 $\bar{u}(y^*)=0$，其中 $y_0<y^*<y_2$；$y>y^*$ 时 $\bar{u}>0$；和 $y^{**}<y<y^*$ 时 $\bar{u}<0$，其中 $y_1\leqslant y^{**}<y_0$. 故在 $y^*<y<y_2$ 内有 $d\bar{q}/dy=f\bar{u}(f-d\bar{u}/dy)c_0^{-4}<0$，在 $y_0<y<y^*$ 有 $d\bar{q}/dy>0$，而在 $y^{**}<y<y_0$ 有 $d\bar{q}/dy<0$. 取 $\bar{u}_r\geqslant 0$，则在 $y^{**}<y<y_0$ 有 $\bar{u}_r-\bar{u}>0$ 和 $(\bar{u}_r-\bar{u})/(d\bar{q}/dy)<0$；而若取 $\bar{u}_r<0$，则在 $y_3<y<y^*$ 有 $\bar{u}_r-\bar{u}<0$ 和 $(\bar{u}_r-\bar{u})/(d\bar{q}/dy)<0$，其中 $\bar{u}(y_3)\geqslant\bar{u}_r$，且 $y_3\geqslant y_0$. 这些说明：不可能有任何一个常数 $\bar{u}_r$ 使得在区间 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 上处处有 $(\bar{u}_r-\bar{u})/(d\bar{q}/dy)\geqslant 0$. 故按定理 2 知运动有可能为不稳定的.

若 $f\bar{u}$ 在区间 $y_1\leqslant y\leqslant y_0$ 变号，证明方法与上述类似.

注 3. 若在推论 4 中条件(2)不满足，例如 $f\geqslant 0$，即 $y_0\leqslant y_1$，则即使 $f\bar{u}$ 变号，运动也是稳定的(如果 $c_{0\min}$ 够大的话). 其实，这时有 $\bar{u}(y^*)=0$，其中 $y_1<y^*<y_2$. 取 $\bar{u}_r=0$，于是 $(\bar{u}_r-\bar{u})/(d\bar{q}/dy)\geqslant 0$ 在 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 上处处成立.

注 4. 若只在 $y=y_0$ 处，$\bar{u}=0$，则运动也是稳定的(如果 $c_{0\min}$ 够大的话). 其实，这时 $d\bar{q}/dy$ 也不变号.

最后指出，和对称不稳定相对应的运动在本质上是非地转的. 其实，(4.1)式是关于 t 为二阶的偏微分方程，从而其解乃是两类重力-惯性波的线性组合. 和一般二维空间问题的 Rossby 波或涡旋波相对应的"慢波"在这里退化为常定运动 ($v'=0$, $fu'=-\partial\phi'/\partial y$)，这是方程(1.1)—(1.3)的一些特解，已经预先从(4.1)式中排除掉了.

五、 超高速不稳定

为了展示超高速不稳定，我们先求解一个简化问题，即设扰动 (u', v', ϕ') 和基流 $\bar{u}$ 不依赖于 y. 于是有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'-fv'+\frac{\partial\phi'}{\partial x}=0, \tag{5.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)v'+fu'=0, \tag{5.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi'+c_0^2\frac{\partial u'}{\partial x}-f\bar{u}v'=0. \tag{5.3}$$

令

$$(u',v',\phi')=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\phi})e^{im(x-ct)}, \tag{5.4}$$

就有

$$\xi^3-(c_0^2+\eta^2)\xi+\bar{u}\eta^2=0, \tag{5.5}$$

其中 $\xi\equiv\bar{u}-c$，$\eta^2=(f/m)^2$. 若下列不等式

$$\frac{1}{\eta^4}(c_0^2+\eta^2)^3<\frac{27}{4}\bar{u}^2 \tag{5.6}$$

满足，则(5.5)式的一根为实，其余二根为共轭复数，从而运动是不稳定的. 条件 (5.6) 式只当 $c_0^2<\bar{u}^2$ 时可满足；同时，当 $c_0^2<\bar{u}^2$ 时总有一些 m 使(5.6)式满足. 可见，$c_0^2<\bar{u}^2$ 是不稳定的充要条件[1].

必须指出，若 $f\neq 0$，且 $\bar{u}\neq 0$，则设扰动不依赖于 y 是不合理的，因这时 $f\bar{u}=-\partial\bar{\phi}/\partial y\neq 0$，从而 c_0^2 不为常数. 而且代替(1.4)式的是下列能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\frac{1}{2}\left[c_0^2(u'^2+v'^2)+\phi'^2\right]dx=\int_0^l f\bar{u}v'\phi'dx, \tag{5.7}$$

其中 l 为扰动的波长. 但即使如此，当 $c_0^2<\bar{u}^2$ 时我们仍得到超高速不稳定.

在二维空间问题中，单是 $c_0^2<\bar{u}$ 并不能保证超高速不稳定的存在. 其实，不管 $|\bar{u}|$ 如何大，只要 $\bar{u}$ 为常数，则扰动总是稳定的. 可见，$d\bar{u}/dy\neq 0$，即基流具有一定切变是必须的. 这是因为在二维空间问题中，我们设在 $y=y_1,y_2$ 处有两刚壁，从而跨过基流的扰动速度分量以及基流位能向扰动位能的转换在某种程度上是受到限制的. 但在一维空间问题 (5.1)—(5.3) 式中却没有这种限制.

前面已经指出：当 $d\bar{q}/dy$ 不变号时，既没有正压不稳定，也没有惯性不稳定，这时只可能有超高速不稳定. 我们有：

推论 5. 若在流体内处处有 $d\bar{q}/dy\geqslant 0$，运动不稳定(纯粹的超高速不稳定)的必要条件是 $|\bar{u}_{\max}-\bar{u}_{\min}|>c_0(y_m)$，其中 $\bar{u}(y_m)=\bar{u}_{\min}$；而当 $d\bar{q}/dy\leqslant 0$ 时超高速不稳定的必要条件为 $|\bar{u}_{\max}-\bar{u}_{\min}|>c_0(y_M)$，其中 $\bar{u}(y_M)=\bar{u}_{\max}$.

证. 这里我们只给出推论 5 前半部的证明. 取 $\bar{u}_r\geqslant\bar{u}_{\max}$，记 $\bar{u}(y_m)=\bar{u}_{\min}$，则因 $|\bar{u}_r-\bar{u}(y_m)|^2\geqslant|\bar{u}_{\max}-\bar{u}_{\min}|^2>c_0^2(y_m)$，故在 $y=y_m$ 近旁有 $|\bar{u}_r-\bar{u}(y)|^2>c_0^2(y)$. 取 $\bar{u}_r<\bar{u}_{\max}$，记 $\bar{u}(y_M)=\bar{u}_{\max}$，则因 $\bar{u}_r-\bar{u}(y_M)<0$，且因 $d\bar{q}/dy\geqslant 0$，故在 $y=y_M$ 近旁有 $(\bar{u}_r-\bar{u})/(d\bar{q}/dy)<0$. 从而按定理 2 知，运动有可能不稳定.

最后指出，在实际大气中，当有很强的低空急流时，往往有 $\bar{u}/(d\bar{q}/dy)$ 变号，$f(f-d\bar{u}/dy)$ 在某区域为负，且 $|\bar{u}_{\max}-\bar{u}_{\min}|$ 超过临界值，三种不稳定可同时存在，或者存在某些混合类型的不稳定.

我们针对上述各推论作了许多数值试验，结果将在另文发表.

参 考 文 献

[1] 曾庆存，数值天气预报的数学物理基础，第一卷，科学出版社，1979.
[2] Blumen, W., *J. Fluid Mech.*, **40**(1970), Part 4, 769—781.
[3] Zeng Qing-cun, *J. Meteo. Soc. Japan*, Ser. II, 60(1982), 1: 24—31.
[4] Zeng Qing-cun, *J. Atmos. Sci.*, 40(1983), 1: 73—84.