中 国 科 学
1986 年 12 月　　B 辑　　第 12 期

大气环流模式动力框架对初值的敏感性研究

张学洪　包 宁　袁重光　曾庆存
（中国科学院大气物理研究所，北京）

摘　　要

本文是为建立一个大气环流数值模式而进行的一系列基础性研究的一部分，主要叙述模式的动力框架对 Haurwitz 波型初值的三种敏感性试验的结果，同时，对 Haurwitz 波的稳定性也作了一些讨论.

一、引　　言

为了建立一个可用于气候模拟和预测的大气环流模式，首先需要对模式的动力学框架和计算方案进行严格的检验，敏感性试验正是进行这种检验的主要手段之一.

狭义的敏感性通常是指气候系统的渐近状态(据认为是和初值无关的)，对于其边界条件、大气成份和参数的依赖程度[1]，这也就是 Lorenz[2] 所定义的“第二类可预报性”. 不过，初始状态至少对于月际气候变化还是有影响的，而且可预报性的具体界限也和初值有关[3]，所以研究模式对初值的敏感性(即“第一类可预报性”)也很重要. 本文所叙述的就是这一类敏感性试验.

解对初值的敏感性反映了动力方程组的某种不稳定性. Lorenz[4] 和 Hoskins[5] 曾分别研究过 β 平面上 Rossby 波的稳定性和球面上 Haurwitz 波的稳定性，给出了一些富有启发性的结果. Hoskins 还具体指出，当振幅足够大时，纬圈波数大于 5 的 Haurwitz 波可能是不稳定的.

Haurwitz 波是检验球面大气数值模式的传统工具，它们是正压涡度方程的准确解，其中一部分是原始方程组的近似解，对此我们曾进行过理论分析和数值试验验证. 特别是，我们还找到了一类具有弱斜压结构的线性和非线性 Haurwitz 波，试验表明它们是球面上斜压原始方程模式的近似波解[6]. 这些结果已用于对在文献[7]中提出的大气环流模式计算精度的检验. 在此基础上，本文用数值试验的方法研究了模式的动力框架对 Haurwitz 波型初值的振幅差别、“系统”误差和随机误差的敏感性，并对 Haurwitz 波的稳定性和模式大气的可预报性进行了一些讨论.

二、浅水波模式对 RH6 振幅的敏感性

1959 年，Phillips[8] 首次将 Haurwitz 波用于球面浅水波模式，他给出的公式是

本文 1986 年 5 月 8 日收到，1986 年 8 月 3 日收到修改稿.

$$\psi = -a^2\omega\cos\theta + a^2K\sin^m\theta\cos\theta\cos m(\lambda - ct), \tag{1}$$

$$c = [m(m+3)\omega - 2\Omega]/[(m+1)(m+2)], \tag{2}$$

其中ψ是流函数，c是理论角相速度，Ω是地球自转角速度．相应的位势高度ϕ由非线性平衡方程求出，其平均值为 $\tilde{\phi} \equiv g\tilde{z}$．这组公式中包含4个参数，即：纬圈波数$m$，超旋转角速度$\omega$，波振幅$K$和平均水深$\tilde{z}$，分别取为

$$m = 4,$$

$$\omega = K = 7.848 \times 10^{-6}\mathrm{s}^{-1} \sim \frac{1}{10}\Omega,$$

$$\tilde{z} = 8000\mathrm{m}.$$

在以后的20多年中，Phillips 给出的这组公式(包括参数取值)多次被用于浅水波模式计算格式的检验，并被称为 Rossby-Haurwitz 波，通常简记为 RHm．除 RH 4 外，不少作者还使用过 RH6，RH8 和 RH1，其中参数ω，K和$\tilde{z}$大多沿用 Phillips 所取的值．

大量的数值试验结果[8-13]都表明，RH4 是浅水波方程组的一组较好的近似波解；RH1 可用来模拟行星尺度的穿极气流，但其变形较大，且理论相速公式(2)失效[11,13-14]；至于 RH 6 和 RH8，积分5天以后就完全崩溃[5,12,13-15]，因而是不稳定的，不能被看作浅水波方程组的波动解．图1(a)是 Kasahara[15] 用 Hough 谱模式对 RH6 初值积分到第6天的高度场，是一个有代表性的结果．就波数而言，RH6 满足 Hoskins关于 Haurwitz 波发生不稳定的条件；就振幅而言 $K \sim \frac{1}{10}\Omega$ 也是相当大的．一个自然的问题是：减小振幅能否得到稳定的 RH6?

另一方面，Lorenz 和 Hoskins 的理论是针对涡度方程模式的，而关于 RH 6 的数值试验几乎都是用原始方程模式作的，这就产生了另一个问题：在什么条件下，这两种模式以及它们的解才具有相近的性质?

在文献[6]中，我们讨论了后一个问题，得到的一个主要条件是

$$\varepsilon = U^*/2\Omega L^* \ll 1, \tag{3}$$

其中U^*和L^*分别是运动的特征速度和特征水平尺度．注意到U^*大体上与波的振幅成正比，可看出：当水平尺度较小而振幅较大时，(3)式可能不再成立．这就是说，作为涡度方程波动解的 Haurwitz 波发生不稳定的条件，同时也是它作为原始方程的近似波解被破坏的条件．对 RH6 而言，由于波数已经取定，振幅就是一个决定性的因子．为了证实这一点，我们用文献[7]中提出的浅水波模式作了对于 RH6 振幅的敏感性试验．

取 $\omega = K = 3.924 \times 10^{-6}\mathrm{s}^{-1}$ (这比它们的传统取值减小了一半)，以相应的 RH6 为初值作时间积分，积分区域为球面的六分之一．图1(b)给出了积分到第22天的高度场(虚线为其初始分布)．同图1(a)相比可看出，两者非常相似，说明它仍然是不稳定的，只不过增长率要小一些，第17天才发生切断，以后切断一直维持．

将ω和K各自再减小25%，即取为 $2.943 \times 10^{-6}\mathrm{s}^{-1}$，用相应的 RH6 为初值作时间积分，图1(c)给出了积分到第84天的高度场(虚线为其初始分布)．与图1(a)，(b)迥然不同，在这样长的时间内，波的变形很小，基本上保持为行波．84天的平均移速是4.97°/天，十分均匀．

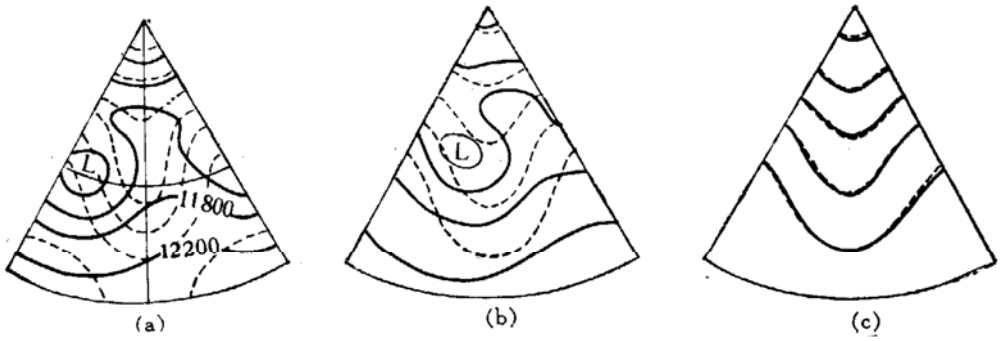


图 1 (a)　用 $\omega = K = 7.848\times10^{-6}s^{-1}$ 的 RH6 积分到第 6 天的高度场 (Kasahara, 1977)
(b)　用 $\omega = K = 3.924\times10^{-6}s^{-1}$ 的 RH6 积分到第 22 天的高度场
(c)　用 $\omega = K = 2.943\times10^{-6}s^{-1}$ 的 RH6 积分到第 84 天的高度场

图 2 给出了本文使用的两种 RH 6 各自的变形误差随时间的变化(将每一时刻的高度场旋转到其初始位置,再计算它与初始场之差的标准差——见附录).再次看出:初始振幅相差25%的两种 RH6,其变形误差的演变完全不同,振幅较大的 RH 6 变形误差迅速增长,几天之内就已经超过了它的初始变化幅度;而振幅较小的 RH 6 则在长时间内只有很小的变形误差.

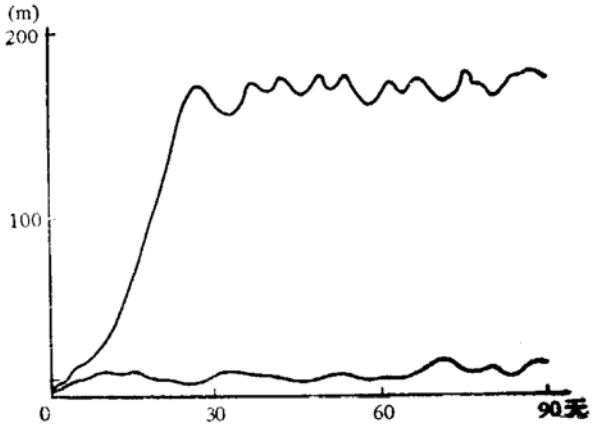


图 2　RH6 的变形误差随时间的变化
(上——$\omega = K = 3.924\times10^{-6}s^{-1}$; 下——$\omega = K = 2.943\times10^{-6}s^{-1}$)

为了计算不同振幅的 RH6 所对应的 Rossby 数 ε,按文献[16]的方法,取

$$L^* = a/\sqrt{(m+1)(m+2)},\quad U^* = \Psi^*/L^*,$$

$$\Psi^* = \|\phi\| = \frac{2^m\cdot m!}{\sqrt{2(2m+3)(2m+1)!}}a^2K,$$

其中 $\|\phi\|$ 代表 RH6 的波动部分在球面上 L_2 空间中的范数(见附录),可得

$$\varepsilon = \frac{2^{m-1}\cdot(m+2)!}{\sqrt{2(2m+3)(2m+1)!}}\cdot\frac{K}{\Omega}. \tag{4}$$

当波数 m 固定时, Rossby 数 ε 与波的振幅 K 成正比,表 1 给出了上述三种 RH6 的 ε 值.

上述数值试验的结果说明,第三种 RH6 是稳定的(至少,相对于前两种 RH6 是稳定的),因而,RH6 发生不稳定是有条件的.以往的试验中都取了较大的振幅 (相应的 Rossby 数也较大),所以只揭示了 RH6 可能发生不稳定的一面. 由于 RH6 的稳定性对振幅(或 Rossby 数)

相当敏感，我们有理由推测：初始场上某些波动振幅的误差可能使模式可预报性的界限大大缩短.

表 1 三种 RH6 的振幅 K 和 Rossby 数 ε

$K(10^{-6}s^{-1})$	7.848	3.924	2.943
ε	0.33	0.16	0.12

三、两层模式对 RH4 "系统"误差的敏感性

我们在文献[6]中研究了将 Haurwitz 波用于斜压模式的问题，得到的主要结果是：

1. 在弱斜压性、弱非线性及"深水"条件下，对大尺度低速流慢过程而言，斜压原始方程组的零级近似仍是涡度守恒方程；

2. 在上述条件下，具有弱垂直切变的 Haurwitz 波可看作是斜压原始方程组一类慢波解的零级近似；

3. 用摄动法可以求出弱斜压 Haurwitz 波的一级修正，从而得到包含散度、垂直运动和非地转涡度的非线性斜压 Haurwitz 波；

4. 针对文献[7]中提出的全球两层原始方程模式，具体给出了一组纬圈波数为 4 的两层 Haurwitz 波(仍记为 RH4)和相应的非线性波 (记为 NRH4)，并用数值试验证实了 NRH4 比 RH4 更准确.

相对于 RH4 而言，我们可以把 NRH4 看作是两层模式的一个准确解，于是 RH4 就是相应的近似解，其误差就是由摄动法给出的一级修正，实际上是摄动级数的"截断"误差. 为了区别于差分格式的截断误差，也为了区别于带有随机特征的观测误差和舍入误差，我们称之为 RH4 的"系统"误差. 表 2 给出了模式下层(用下标"2"表示) RH4 诸分量及其"系统"误差的球面 L_2 范数.

表 2 RH4 下层诸分量 (F) 及其"系统"误差 (δF) 的球面 L_2 范数

F	$\frac{1}{g}\phi_2'$	T_{a2}'	$\triangle\psi_2$	$\triangle\chi_2$
$\|F\|$	671m	1.02℃	$2.12\times10^{-5}s^{-1}$	0
$\|\delta F\|$	11m	0.22℃	$0.08\times10^{-5}s^{-1}$	$0.19\times10^{-6}s^{-1}$

为了检验两层模式对 RH4 "系统"误差的敏感性，分别以 NRH4 和 RH4 为初值，作了 100 天以上的时间积分，积分区域取球面的四分之一.

图 3 中的曲线 A 和曲线 B 分别代表 NRH4 和 RH4 下层高度场的变形误差(估计方法见本文第二节)的时间变化. 在积分的头几天内，两者的变形误差都在增长，以后则呈现出随时间的振荡. 10 天之内 RH4 的变形误差比 NRH4 的变形误差大一倍，以后这种差别逐渐减小，但在第 65 天之前，RH4 的变形误差仍明显大于 NRH4 的变形误差. 在这之后 NRH4 的变形误差迅速增长，从第 80 天开始明显超过了 RH4 的变形误差. 表 3 给出了 NRH4 和

RH4 的变形误差的月平均值.

这些结果表明，在积分的头两个月，NRH4 的确比 RH4 更精确地满足两层模式，因而可以看作是相对准确的解，但从更长的时段看来则并非如此. 对于这样一个矛盾现象，一种可能的解释是: 同 RH4 相比，NRH4 中包含了较多的短波成份（尤其是沿子午线方向的短波，可参看文献[6]中一级修正量的附图 4,6—8），它们一方面提高了解的精度（这表现在积分的前两个月），另一方面也容易引起计算不稳定（这表现在积分两个月以后）. 据此可以推测：精确的初值有助于改善较短时期预报的效果，而经过适当滤波的初值则可能有利于作出较长时期的合理预报. 事实上，RH4 可以积分到200 天，其波形仍可辨认.

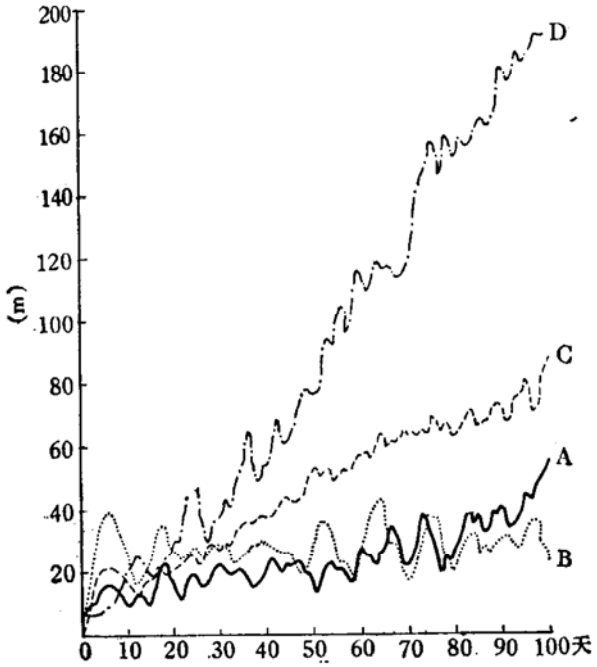


图 3　NRH4（曲线 A）和 RH4（曲线 B）的变形误差随时间的变化；RH4 与 NRH4（曲线 C）和 RH4(R) 与 RH4（曲线 D）的标准差随时间的变化

（所用资料是逐日的下层高度场）

表 3　NRH4，RH4 和 RH4(R) 下层高度场的月平均变形误差

时　段　（天）	1—30	31—60	61—90
NRH4 的平均变形误差(m)	15.0	20.3	29.7
RH4 的平均变形误差(m)	26.7	26.1	29.1
RH4(R) 的平均变形误差(m)	24.6	49.7	122.0

图 3 中的曲线 C 是NRH4 和 RH4 下层高度场之差的标准差随时间的变化，它是缓慢增长的，但对照表 2 中给出的下层高度场的范数可看出，在 100 天之内还远未达到 RH4 的初始变化幅度，这说明模式对于 RH4 初值的“系统”误差不很敏感. 比较曲线 A，B，C 还可看出，在积分大约 40 天之后，NRH4 和 RH4 之差的标准差超过了它们各自的变形误差之和，这

是因为 RH4 和 NRH4 之间还有位相上的差别. 图 4 给出 NRH4 在 40°N 处的逐日角相速度和 RH4 与 NRH4 的位相差随时间的变化,位相差是缓慢增长的,100 天时达到 5 个经度. NRH4 的 100 天平均移速为 7.38 经度/天,与理论值(见文献[6])之差为 0.32 经度/天; RH4 的 100 天平均移速为 7.33 经度/天. 从图 4 看出,尽管 NRH4 和 RH4 的角相速度差别很小,但在 100 天积分过程中一直存在,反映了 RH4 的确有系统性的误差.

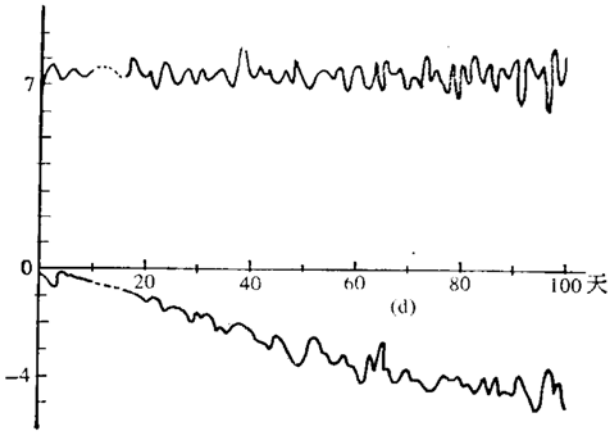


图 4 NRH4 下层高度场在 40°N 处的逐日相速度(上图,经度 1 天); RH4 和 NRH4 下层高度场在 40°N 处的逐日位相差(下图,经度)

图 5 中的曲线 C 给出了 RH4 和 NRH4 下层温度场之差的标准差随时间的变化,同样反映出模式对 RH4 的系统误差不很敏感.

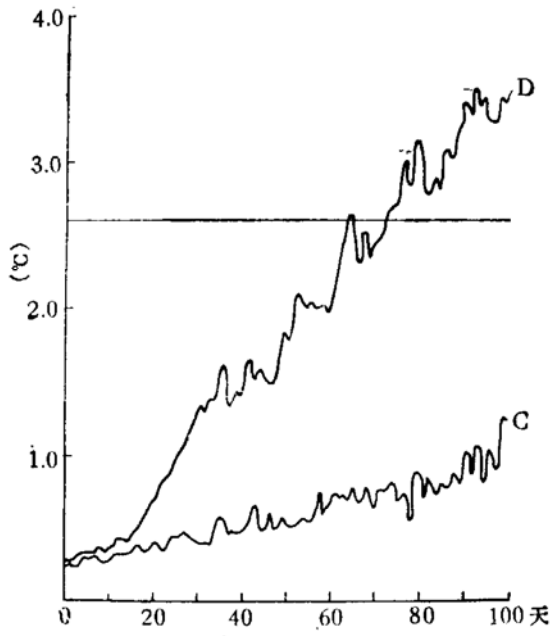


图 5 RH4 与 NRH4 (曲线 C) 和 RH4 (R)与 RH4 (曲线 D) 的标准差随时间变化 (说明同图 3,但所用资料是逐日的下层温度场)

四、两层模式对 RH4 随机误差的敏感性

数值计算中的舍入误差和初始资料的观测误差都带有随机分布的性质. 单个的舍入误差

量级很小，但其积累效果不容忽视．观测误差有比较显著的量级，可以看作叠加在初始场上的随机扰动，它随着时间增长的速度对模式可预报的界限有直接影响．本文主要研究两层模式对于叠加在 RH4 初始场上的和观测误差量级相当的随机误差的敏感性，类似于以往对天气尺度系统的可预报性所作的研究．

1969 年，Smagorinsky[17] 对天气图资料的各层温度分别叠加上标准差为 0.5℃ 的随机误差，用 GFDL 的九层模式作了预报试验，发现 7 天以后误差呈指数增长，大约每 5 天翻一番．据此，Smagorinsky 认为天气尺度运动的可预报期约为 3 周．其后一些类似的试验也都给出大体相同的结果．

由于大气是一个非线性的动力系统，初始误差影响大尺度预报的一个重要途径是不同尺度运动之间的非线性相互作用，因此，可预报性的具体界限应当和初始状态的特点有关．丑纪范[18]曾经指出，准静止的超长波系统，或者大气活动中心，其可预报性界限可能比天气尺度的可预报性界限长得多．作为一种理想化的情形，本文用文献[17]的方法研究了 RH4 的可预报性，或者叫做两层模式对 RH4 的随机误差的敏感性．

独立选取几组 [0,1] 区间上均匀分布的随机变量，先将它们的均值化为零，再按照事先规定的方差分别将它们"有量纲化"后叠加在 RH4 的初始温度、地面气压和风场上，这样就构成了带有随机误差的 RH4 初值(以下将这样的 RH4 初值及其时间演变简记为 RH4 (R))．为了不破坏两半球的对称性，还规定温度、地面气压及风的带状分量的误差关于赤道对称，而风的子午分量的误差关于赤道反对称．表 4 给出了 RH4(R) 中所含随机误差的标准差数值，大体和"系统"误差的球面 L_2 范数数值相当，其中温度误差比文献[17]中取的值小一半．

表 4　RH4(R) 在两层上的初始随机误差标准差

随机误差场	$\delta T'_1$	$\delta T'_2$	$\delta p'_s$	δu_1, δv_1	δu_2, δv_2
均 方 根	0.27℃	0.23℃	0.5hpa	$1m\cdot s^{-1}$	$0.5m\cdot s^{-1}$

用两层模式将 RH4(R) 积分到 100 天，计算它与 RH4 的逐日差别的标准差就得到 RH4 随机误差随时间的变化，这就是图 3 和图 5 中的曲线 D．从长时期来看，随机误差大体上是线性增长的，增长速度比文献[17]中给出的结果慢得多，但比 RH4 "系统"误差的增长速度快得多，到第 100 天，随机误差是系统误差的 2.5—3.5 倍．

图 6 (a)—(c) 分别是 RH4 (R) 下层高度场的初值和积分到第 55 天和第 100 天的结果，为了对照，图 6(d) 中给出了 RH4 积分到 100 天的相应结果．同系统误差不同，随机误差对波动有很强的破坏作用，到第 100 天，RH4(R) 已完全崩溃，只剩下了带状流和短波扰动，而 RH4 的波形则基本完好无损．尽管如此，第 55 天的 RH4(R) 的波形仍然清晰可辨 (虽然小扰动已经比初始场明显)，这就表明，RH4 的可预报性界限要比一般天气尺度的可预报性界限长得多．

为了进一步了解 RH4(R) 崩溃的过程，我们计算了上层高度场(它随时间的演变和下层高度场十分相似)的带状部分，纬圈波数为 4 的部分以及短波部分 (纬圈波数为 $4m'$, $m'=2$, 3, $\cdots$9) 的球面 L_2 范数 (见附录)．图 7 给出了它们随时间的变化 (时间间隔取 5 天)．可以看出，初始随机误差主要有两个作用，一方面它使得短波部分缓慢增长，另一方面它使得 4 波

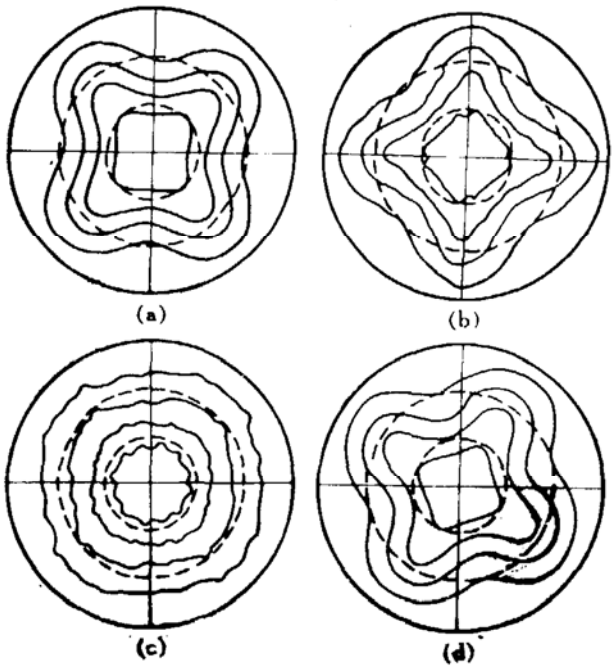


图 6 (a) RH4(R) 下层高度场初值；(b) 由(a)积分到第 55 天的结果；(c) 由(a)积分到第 100 天的结果；(d) RH4 积分到第 100 天的下层高度场

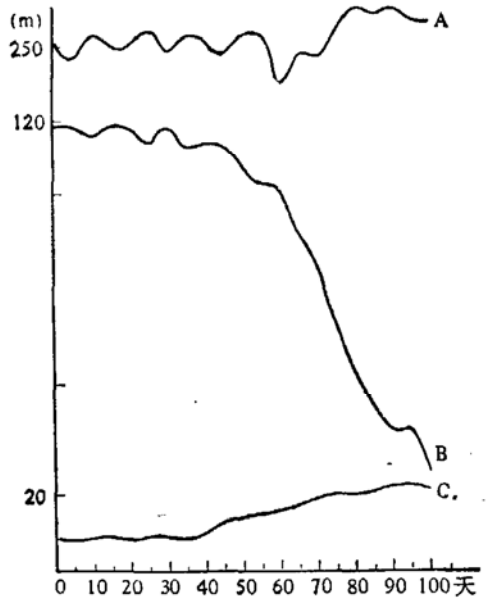


图 7 RH4(R) 上层高度场的不同尺度部分随时间的变化

(A——带状部分；B——波数为 4 的部分；C——其它短波部分的总和)

部分在积分 50 天之后急剧衰减，后者才是造成 RH4(R) 崩溃的直接原因. 鉴于数值模式的计算不稳定或计算紊乱常常采取爆发的形式，对于类似 RH4(R) 的崩溃这样一些现象是值得深入研究的.

五、结 语

在以上各节中，我们用数值试验的方法研究了文献 [7] 中提出的球面浅水波模式和两层

原始方程模式对 Haurwitz 波型初值的敏感性．我们希望从 Haurwitz 波的稳定性的角度进一步概括和解释这些数值试验的结果．

迄今为止人们还没有找到原始方程组的准确解，然而，有关 Haurwitz 波的大量数值试验表明，有理由相信原始方程组存在波动解，其近似形式就是某些适当选择的 Haurwitz 波，如本文所使用的小振幅的 RH6 和两层 RH4．正如 Hoskins 所指出的，取 R-H 波作为原始方程模式的初值，意味着在原始方程组的波动解中引进了初始误差，本文称之为“系统”误差，例如散度场、非地转涡度场等等．考察在时间积分过程中“系统”误差的变化趋势，可以判断解对于“系统”误差的稳定性．

用浅水波模式对 RH6 初值所作的数值试验表明，浅水波方程组存在以小振幅的 RH6 为近似形式的波动解，而且它对于“系统”误差是稳定的．至于大振幅的 RH6，情形就比较复杂：作为正压涡度方程的准确解，它可能是动力不稳定的；作为原始方程组的近似解，与其说它是不稳定的，不如说它所造成的“系统”误差太大，以致超过了稳定性所能容许的限度．类似地，我们可以说两层模式存在以 RH4 为其近似形式的波动解，它对于 RH4 所产生的“系统”误差也是稳定的．

和经典的稳定性概念不同，我们所说的是解在一个长时间范围内的稳定性，这当然是由数值试验方法本身的局限性所决定的，不过这种局限性并不比解析方法中使用线性化和粗糙截谱所造成的局限性更严重，而且考虑到第一类可预报性的界限和稳定性的相互联系，讨论解在一定时间范围内的稳定性也是有实际意义的．

数值试验方法的另一个局限性是计算过程中可能引入新的误差和产生计算不稳定，所以，当数值试验的结果表现为不稳定时，要严格区分它是动力性的还是计算性的是很困难的（这主要是指非线性方程）．例如，对于 NRH4 在积分两个月后误差显著增加这一点，我们只能推测它是由于计算原因造成的．

更重要的问题是初始误差的形式．经典的稳定性概念并不特别关心初始扰动的类型，然而我们的数值试验却表明，随机误差对解有更大的破坏性．例如，对“系统”误差稳定的 RH4，对随机误差却是不稳定的，尽管两种误差的整体量级是相当的．数值计算中的舍入误差往往是随机分布的，在长时间积分中它可能积累起来，达到比较显著的量级．根据我们的经验，这可能是导致计算失效的重要原因，因而也是建立大气环流数值模式过程中需要进一步研究的一个问题．

附　　录

1．函数 $F(\theta,\lambda)$ 的球面 L_2 范数 $\|F\|$

$$\|F\|\equiv\left[\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}F^2(\theta,\lambda)\sin\theta d\theta d\lambda\right]^{1/2}. \tag{A.1}$$

2．函数 $F(\theta,\lambda)$ 的球面均值 EF 和标准差 DF

$$EF\equiv\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}F(\theta,\lambda)a^2\sin d\theta d\lambda, \tag{A.2}$$

$$DF=\|F-EF\|. \tag{A.3}$$

当 F 以格点值形式给出时，上三式中积分用矩形求积公式代替．

3．$F(\theta,\lambda)$ 中纬圈波数 $m\in[m_1,m_2]$ 部分的范数 $\|F_{m_1\sim m_2}\|$

先将 F 沿纬圈作 Fourier 展开:

$$F(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{M} [a_m(\theta)\cos m\lambda + b_m(\theta)\sin m\lambda], \tag{A.4}$$

再计算展开式中 $m_1 \leqslant m \leqslant m_2$ 部分的范数,可得

$$\|F_{m_1 \sim m_2}\| = \left\{ \sum_{m=m_1}^{m_2} \left[\frac{1}{2g_m} \int_0^{\pi} (a_m^2(\theta) + b_m^2(\theta))\sin\theta d\theta \right] \right\}^{1/2}, \tag{A.5}$$

其中 $g_0 = 1$, $g_m = 2$ (当 $m \neq 0$ 时).

当 F 以格点值形式给出时,可用 FFT 算法计算每一纬圈的 a_m, b_m, (A.5) 式中的积分用矩形求积公式代替.

参 考 文 献

[1] Smagorinsky, J., *GARP Publications Series*, 1979, No. 22, 1—12.

[2] Lorenz, E. N., *ibid.*, 1975, No. 16, 132—136.

[3] WCRP, Report of the WMO/ICSU Study Conference on Physical Basis for Climate Prediction on Seasonal, Annual and Decadal Time Scales, Leningrad, 1982.

[4] Lorenz, E. N., *J. Atmos. Sci.*, 29(1972), 258—264.

[5] Hoskins, B. J., *Quart J. Roy. Meteor. Soc.*, 99(1973), 723—745.

[6] Zhang Xuehong, Zeng Qingcun and Bac Ning, *Proceedings of the International Conferece on Nonlinear Mechanics*, Science Press, Shanghai, 1985, 840—846.

[7] 曾庆存、袁重光、张学洪、包宁, 气象学报, **43**(1985), 441—449.

[8] Phillips, N. A ,*Mon. Wea. Rev.*, **87**(1959), 335—345.

[9] Grimmer, M. and Shaw, D. B., *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **93**(1967), 337—349.

[10] Bourke, W., *Mon. Wea. Rev.*, **100**(1972), 683—689.

[11] Umscheid, L. and Bannon, P. R., *ibid.*, **105**(1977), 618—635.

[12] Nakamura, H., *J. Meteor. Soc. Japan*, **56**(1978), 175—186.

[13] Merilees, P. E., *Atmosphere*, **12**(1974), 77—96.

[14] Holloway, J. L., Spelman, Jr. M. J. and Manabe, S., *Mon. Wea. Rev.*, **101** (1973), 69—78.

[15] Kasahara, A., *J. Atmos. Sci.*, **34**(1977), 687—701.

[16] 曾庆存, 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷, 科学出版社, 北京, 1979.

[17] Smagorinsky, J., *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **50**(1969), 286—313.

[18] 丑纪范, 大气动力学的新进展, 兰州大学, 1985.