

清代数学家傅九渊对招差术的研究

高红成[✉] 任祎柔

(天津师范大学 科学技术史与文化遗产研究院, 天津 300387; 天津师范大学 数学科学学院, 天津 300387)

摘要 傅九渊, 江西上高人, 清代数学家。根据新的史料考证, 他生于1791年, 卒于1845年。1821年考中举人, 1823年进士及第, 1837至1838年任湖北远安县知县。1845年他被任命为山东长山县知县, 但未及到任便去世了。他对算学颇有研究, 著有《有不为斋算学》(4卷), 其中卷一《招差术解》和卷二《招差算例》, 完成于1822至1823年间。从现有史料来看, 这两卷是首次专门讨论招差术的文献。傅九渊先是明确界定了“积”、“积差”以及“招差”等核心概念, 指出招差术是用高阶等差数列的首项和各阶差分首项线性表示通项(多项式)的算法。随后, 他清晰归纳出该表达式中“首项”的系数与贾宪三角形相应横行数字的对应关系, 并指出了这些数字互求的算法及贾宪三角形的基本堆积性质。最后, 他明确给出高阶等差数列的通项算法与求和算法。这一成果相当于认识到招差术实际上是将多项式转化为差分表达式的算法。可以说, 傅九渊准确、完整且清晰地阐明了招差术的数学原理。

关键词 傅九渊; 《招差术解》; 招差术; 数学原理

中图分类号 N092

文献标识码 A **文章编号** 1000-0224(2025)04-0429-13

招差术是我国数学史上的重要成就,《授时历》(1280)和《四元玉鉴》(1303)就明确用到它。《授时历》用招差术来推算太阳逐日运行的速度和它在黄道上的经度, 以及月球在近地点周内逐日运行的速度, 即著名的“平立定三差法”。^[1]朱世杰《四元玉鉴》“如像招数”门5问, 讨论的都是高阶等差数列求和问题(其中最为著名是“立方招兵”题), 核心算法也是招差术。即便如此, 宋元以及更早的算学文献中没有发现对招差术的数学原理给出直接的、明确的论述。当今学者运用各种相关的史料、从不同角度进行推测, 发表了很多成果。^[1-6]明代传统数学式微, 宋元及其以前的古算书以及代表性的成

收稿日期: 2025-06-13; 修回日期: 2025-11-24。

作者简介: 高红成, 1976年生, 湖北麻城人, 教授, 主要研究中国数学史和中国数学教育史, Email: 2115678669@qq.com。任祎柔, 1999年生, 四川绵阳人, 硕士研究生, 主要研究中国数学史。

基金项目: 国家社会科学基金重大项目“17—20世纪国外学者研究中国宋元数理科学的历史考察和文献整理”(项目编号: 20&ZD228)。

果都处于“失传”的状况,这种状况一直持续到18世纪后期(清乾隆中后期)传统数学的复兴时期。^[7]这400多年的时间里,中算家对招差术不怎么了解,仅从《大统历》(即《授时历》)里了解只言片语,比较深入讨论的,也就是清初梅文鼎(1633—1721)《平立定三差详说》(1704年自序),这篇著作是梅氏为了给《明史·历志》初稿阐释《授时历》以及解答门人有关《授时历》平立定三差的疑问而作,其中对招差术的数学原理有所阐释。^[8]清代中后期宋元数学著作重现后,垛积术与招差术等宋元时期的数学成果得到了进一步的研究和发展。本文要讨论的傅九渊《招差术解》与《招差算例》是专论招差术的著作,包含了傅九渊对招差术内涵的解读以及数学原理的阐释,值得深入研究。

以往学界对傅九渊的研究不多,《畴人传》三编卷二有傅九渊9字简介,附在纪大奎(1746—1825)传后。^[9]李兆华《招差术略论》注意到傅九渊工作的理论价值,指出“傅氏所指招差术是运用各阶差分推导高阶等差数列(包括等差数列)通项公式的方法。”^[10]但对于傅氏的具体工作并未展开论述。本文先基于傅九渊的“行述”以及传记等史料对他的生平进行考证和简介,然后讨论傅氏对招差术的研究,重点解析他对招差术数学原理的解读,最后对傅氏这一成果进行评述。

1 傅九渊生平以及研究招差术的缘起

1.1 傅九渊生平

根据傅九渊之子傅寿朋撰写的“拙斋府君行述”^[11]、《上高县志》中的《傅九渊传》^[12]以及其他资料^[13],本文对傅九渊的生平介绍如下。

傅九渊,字深甫,号拙斋,江西上高人士。生于清乾隆五十六年六月二十五日(1791年7月25日),卒于道光二十五年四月二十一日(1845年5月26日)。1806年,15岁的他补为县学生,次年拜同邑李祖陶^①为师。1815年,24岁时补为廪膳生员。1821年,30岁中举。1823年,32岁高中进士,名列三甲第八名,其时座师为两位通儒汪廷珍和王引之,随后以知县身份归吏部铨选。1836年,补任山东长山知县(现属山东省邹平市),因母亲身体欠佳,改任较近的湖北远安知县。1837年初他一到任,立即以振兴文教为己任,鼓励读书,考课学子,“不数月,一县生童毕集,咸以不兴课为耻,读书之声溢于荒城”。同年,担任乡试(丁酉科)同考官。乡试还未结束,其母病逝,傅九渊本应立即丁忧守制,但因继任者拖延交接,直至1838年底他才得以扶母柩回乡。此后数年在籍。1843年冬,其子傅寿朋将参加转年的会试,傅九渊一同赴京,同时也去吏部回复问训。1844年11月,他再度补任山东长山知县,却不幸身患重病,被迫推迟赴任。1845年3月,病情稍愈后前往长山就任,途中病情加剧,5月未到任

① 李祖陶(1776—1858),字钦之,号迈堂,江西上高人。年少丧父,家境贫寒,靠母亲织布为生,发奋读书,1808年中举。傅九渊与李祖陶、郑秉恬、黄懋材合称“上高四哲”。

所便离世，享年 54 岁。

其子傅寿朋，字鲁骀，号絜士，1834 年选为优贡生候选儒学训导，1840 年中举，1844 年考取宗学教习拣选知县。

据傅寿朋记载，傅九渊年少时关注汉注唐疏诸子百家之说，在研读《考工记》时，“布算多窒”，对于“保氏九数”^①不得其解，遂悟“明经必先通算”，于是开始自学《数理精蕴》、《历象考成》以及梅文鼎的算书，逐渐对算学产生浓厚的兴趣。侯试京师期间（1822 到 1823 年间），与罗士琳（1789—1853）、徐有壬（1800—1860）等算学名家有交往探讨，读到《九章算术》、《周髀算经》、《数书九章》、《四元玉鉴》等算书，算学功力日深。

当时，戴震认为江永的历算成就不亚于梅文鼎。对此，钱大昕持不同观点。他认为江永的成就源于西学，实则是在宣扬西学，为西人服务，被西人所利用了；梅文鼎则是在利用西学发展中学。^[14]他评论道：“宣城（梅文鼎）能用西学，江氏（江永）则为西人所用而已。”^[15]对于钱氏这个评价，傅九渊为江永感到不平，认为：“江氏之学固逊于宣城之专门家，然钱氏所议未免过当。”傅九渊还通过推算金、水二星的度数，订正了江永“金水二星发微”中的错误。^[11]

傅九渊“著书谨慎”，他曾说：“读书以裨益身心，怡悦神志而已，非以表暴好名也。必能于古人之义发所未显，补所未备，始可著书，否则蹈袭前言，直屋下屋耳。”其数学著作有《有不为斋算学》四卷：卷一为《招差术解》，卷二为《招差算例》，卷三有《对数表开方用较省算法解》、《月道距差求容阔术》、《堆垛图说》，卷四包括《大衍约分定术》和《大衍求一术解》。“有不为斋”是其书斋名，取自孟子语“人有不为也，而后可以有为。”当时的好友御史陈庆镛^②还为其题写了“有不为斋”匾额。

《有不为斋算学》现存有同治九年（1870）的家刻本（附有“行述”）^[16]、《木犀轩丛书续刻》本（1887）^{③[17]}。还有，《招差术解》与《堆垛图说》亦被收录于周毓英主编的《中西

① “保氏九数”语出《周礼·地官司徒·保氏》，原文为：“保氏掌谏王恶，而养国子以道，乃教之六艺：一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五御，五曰六书，六曰九数。”“保氏”是古代官职名，负责教育贵族子弟。“九数”是“六艺”之一，指九类数学知识或技能。“保氏九数”在这里可以解释为算学知识。

② 陈庆镛（1795—1858 年），字乾翔、笙叔，号颂南，福建泉州人，1832 年进士，初选翰林庶吉士，后授户部主事，迁员外郎，官至监察御史。

③ 《木犀轩丛书》是汇印本，有正编和续编，一共 33 种。正编 27 种，依经史子集排列，其中 17 种有明确的刊刻时间，在光绪九年（1883）至十五年之间。续编（即“续刻”）6 种。《有不为斋算学》为续编的第 4 种，书中有“光绪丁亥冬李氏犀轩重雕”的刊印牌记，光绪丁亥为 1887 年。这个版本后来还被影印收入台湾新文丰出版公司《丛书集成续编》第 76 册（1989 年）以及上海书店出版社《丛书集成续编》第 83 册（1994 年），目录均有“木犀轩”的标注。值得注意的是，很多图书馆藏有《有不为斋算学》的单行本，书内没有明确的版本信息，馆藏一般依据《中国丛书综录》的记载注录为“1882 年刊”。（上海图书馆编：《中国丛书综录·总目》，上海：上海古籍出版社，2007 年，第 221 页。）比如，湖北省图书馆收藏的单行本就是这样的标注。从断口大小、换版痕迹来看，单行本与丛书（续刻）本应为同一版本，并且单行本在前。推测认为：单行本《有不为斋算学》1882 年刊刻，1887 年同版后印，汇入“续刻”。

算学集要》^①卷八(1881)中^[18]。

1.2 研究缘起和完成时间

傅寿朋介绍其父傅九渊研究招差术的缘起时称:

府君在京,与徐户部有壬交,得读《四元玉鉴》,因推究招差之术。招差者,郭氏授时术之“布七政盈缩立成”,朱氏书算“招兵还原”,皆此术也。顾布算家多不得其立法之意,府君因古有开方作法本原图,互易其纵横之位,即成招差衰率,乃为“招差总率图”。又因堆垛为招差所必用,就图中各位详列诸分子、母相与之率,则取数、立法出于自然,可不烦言而解。著《招差术解》一卷、《招差算例》一卷。([11], 12b-13a 页)

又,傅寿朋还称其父“壬午(1822)在京,邮寄家书,教诲不孝以读书敦行之法。”按,徐有壬为清代杰出数学家之一,道光九年(1829)中进士,授职户部主事,后擢升为郎中,故有“徐户部”之称。还有,徐有壬曾自称“壬午(1822)获读是书(指《四元玉鉴》),积思三昼夜,以意步为细草。”这里的“细草”就是徐有壬的《四元算式》(未刊刻)。^[19]

综合上述几点,可以推知,傅九渊是候试京师期间在徐有壬处看到《四元玉鉴》,并开始研究招差术的,《招差术解》和《招差算例》完成于 1822 至 1823 年间。这两卷采用经传式书写体例,正文顶格排版,注文低一格编排,与正文文字大小一样,有的注文还夹杂双行小注。“解”主要在说理,正文给出定义或者判断,相当于命题或推论,注文进行解释或者示例。“算例”给出 6 个用招差术求数列和的例题对其内容解读如下。

2 招差之法:“累初见之差”

傅九渊称“方面乘得之数,通谓之积”,也就是把数列的项称为“积”,数列和为“共积”。他指出“招差以差为用,故须相较以取各位之差。”即求原数列的差分。“以差减差,相等者其差必尽。不平等者递减至相等,其差亦尽。”即求差分的差分,直至某一阶差分都为 0,这意味着傅氏讨论的原数列可以用现在数学中的高阶等差数列来对应。文中他用自然数列、平方数列、立方数列、四次方数列为例来说明招差术的概念和用法。比如 $\{a_n\}$ 是 4 阶等差数列,依次求得“一差”、“二差”、“三差”至“四差”后差尽。这里的“各差”对应数列的各阶差分。要强调的是,文中还注明“位多易淆,故以号别之”,就是用天干、地支、八卦等符号代替数字,并多次出现“仿此推之”、“余并仿此”的字样,这些表明傅氏的说理和举例具有一般性。因此不妨设原数列 $\{a_n\}$ 为 p 阶等差数。“一差”为 $\Delta_r^1 = a_{r+1} - a_r, r = 1, 2, 3, \dots, n$, 即一阶差分;“二差”为 $\Delta_r^2 = \Delta_{r+1}^1 - \Delta_r^1, r = 1, 2, 3, \dots, n-1$, 即二阶差分; $\Delta_r^3 = \Delta_{r+1}^2 - \Delta_r^2, r = 1, 2, 3, \dots, n$

① 《中西算学集要》是一个摘录合集,依次包含天文学、数学和力学内容,有 14 卷本(分成五种)和 10 卷本(分成三种),内容其实一样。

-2 为三阶差分; $\Delta_r^4 = \Delta_{r+1}^3 - \Delta_r^3 \neq 0, r = 1, 2, 3, \dots, n-3$ 为四阶差分; ……。 $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4, \dots$ 为各层差分的首项, 傅氏称它们为“初见之差”, 数列的首项 a_1 以及各层差分的首项称为“首位之数”。各阶差分以及“首位之数”, 如图 1 所示。

项数 r	1	2	3	4	5	6	...	
“积” a_r	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...	高阶等差数列
“一差” Δ_r^1	Δ_1^1	Δ_2^1	Δ_3^1	Δ_4^1	Δ_5^1	...		一阶差分
“二差” Δ_r^2	Δ_1^2	Δ_2^2	Δ_3^2	Δ_4^2	...			二阶差分
“三差” Δ_r^3	Δ_1^3	Δ_2^3	Δ_3^3	...				三阶差分
“四差” Δ_r^4	Δ_1^4	Δ_2^4	...					四阶差分
“差尽” Δ_r^5	0	0	...					

图 1 4 阶等差数列及其各阶差分示例

为了表述方便, 也可以记初始数列 $a_r = \Delta_r^0, a_1 = \Delta_1^0$ 。傅氏的论述(楷体文字为原文)可以解读为如下系列命题。

命题 1 “加差于首位之数得次位之数, 递加差即得以后各位之数”。

这个命题指出了每一层的差分数列的各项相对于下一层数列各项的关系, 用现在的数学符号可以表示为:

$$\Delta_1^i + \Delta_1^{i+1} = \Delta_2^i, \Delta_r^i + \Delta_r^{i+1} = \Delta_{r+1}^i$$

$$\Delta_1^i + (\Delta_1^{i+1} + \Delta_2^{i+1} + \Delta_3^{i+1} + \dots + \Delta_{n-1}^{i+1}) = \Delta_n^i$$

这个命题是显然的, 也是基本命题。由此得到下面的判断。

命题 2 “并各位之差为首末两位之差, 谓之积差”。

本层数列的“末位”和“首位”即为“末项”和“首项”。这个命题给出了“积差”的定义, 这里的“差”是“较”的意思, “积差”就是数列相邻两项的总和, 等于末项与首项的较, 即“积差=末位-首位”。每一层的数列都是系列的“积”, 相应的“积差”显然等于下一层各差分的和。因此“积差”可以表示为:

$$\text{积差} = \Delta_n^i - \Delta_1^i = \Delta_1^{i+1} + \Delta_2^{i+1} + \Delta_3^{i+1} + \dots + \Delta_{n-1}^{i+1}$$

对于初始数列而言有:

$$a_n - a_1 = \Delta_1^1 + \Delta_2^1 + \Delta_3^1 + \dots + \Delta_{n-1}^1$$

命题 3 “累初见之差为首末两位之差, 谓之招差。”

根据命题 2 中“积差”的定义, 这个命题给出了“招差”的定义和算法, 即“招差”就是累加各阶差分的首项(“初见之差”)得到积差的算法, 可表示为

$$\Delta_n^i - \Delta_1^i = \sum (\Delta_1^{i+1}, \Delta_1^{i+2}, \dots, \Delta_1^{i+p})$$

对于 p 阶等差数列来说, 招差算法可表示为

$$a_n - a_1 = \sum (\Delta_1^1, \Delta_1^2, \dots, \Delta_1^p)$$

傅氏这时给出注文:

积差不可径求, 故立招差之法。招差者, 以初见之差求隔位之数。差本远,

而引之使近，故谓之招。所招或隔一位、隔数位、隔十、百位，皆一以贯之。法之最妙，实本于数之自然也。

这里傅氏再次强调，“招差”中的“差”指的是“初见之差”，即各阶差分的首项，“招差”的目的是求积差，也就是用各阶差分的首项表示积差。因而进一步，傅氏得到下面两个推论。

推论 3.1 “凡以积差加首位之数即得末位之数。”即末项(通项)= 首项+积差，对于初始数列有：

$$a_n = a_1 + (a_n - a_1) = a_1 + \sum (\Delta_1^1, \Delta_1^2, \dots, \Delta_1^p)$$

推论 3.2 对 p 阶等差数列而言，招差术则是用各“首位之数”表示通项的算法，即：

$$a_n = \sum (a_1, \Delta_1^1, \Delta_1^2, \dots, \Delta_1^p)$$

因为都是“累加”，所以这个表达式是各“首位之数”的线性表达。傅氏称这里的系数为“招差衰率”。“衰率”是他后面要解决的主要问题。

3 招差图：“招差衰率”即“廉隅之数”

接续前面的论述，傅氏以 4 阶等差数列为例得到“招差图”(如图 2)，归纳出“招差衰率”的规律。

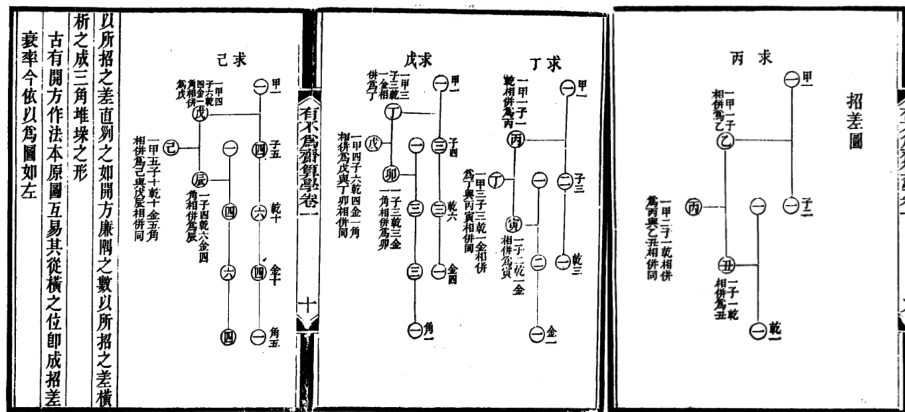


图2 傅九渊“招差图”

“招差图”中符号对应如下，甲(a_1)、乙(a_2)、丙(a_3)、丁(a_4)、戊(a_5)、己(a_6)依次是 4 阶等差数列的前 6 项；子(Δ_1^1)、丑(Δ_2^1)、寅(Δ_3^1)、卯(Δ_4^1)是一阶差分的前 4 项，乾(Δ_1^2)、金(Δ_1^3)、角(Δ_1^4)依次是二阶、三阶、四阶差分的首项，即“初见之差”。招差图就是运用递推法得到通项与各行“首位之数”的关系的示意图，解决“招差衰率”的问题。如求乙的招差法为：

$$a_2 = a_1 + \Delta_1^1 \quad (1)$$

又 $\Delta_2^1 = \Delta_1^1 + \Delta_1^2$, 所以求丙的招差法为:

$$a_3 = a_2 + \Delta_2^1 = (a_1 + \Delta_1^1) + (\Delta_1^1 + \Delta_1^2) = a_1 + 2\Delta_1^1 + \Delta_1^2 \quad (2)$$

同理可得 $\Delta_3^1 = \Delta_1^1 + 2\Delta_1^2 + \Delta_1^3$,

则求丁的招差法为:

$$a_4 = a_3 + \Delta_3^1 = (a_1 + 2\Delta_1^1 + \Delta_1^2) + (\Delta_1^1 + 2\Delta_1^2 + \Delta_1^3) = a_1 + 3\Delta_1^1 + 3\Delta_1^2 + \Delta_1^3 \quad (3)$$

同理可得 $\Delta_4^1 = \Delta_1^1 + 3\Delta_1^2 + 3\Delta_1^3 + \Delta_1^4$,

则求戊的招差法为:

$$a_5 = a_1 + 4\Delta_1^1 + 6\Delta_1^2 + 4\Delta_1^3 + \Delta_1^4 \quad (4)$$

因为 5 阶差分为 0, 求己的招差法为:

$$a_6 = a_1 + 5\Delta_1^1 + 10\Delta_1^2 + 10\Delta_1^3 + 5\Delta_1^4 \quad (5)$$

可以看出, 式(1), (2), (3), (4) 右边“首位之数”的系数(“招差衰率”)分别与贾宪三角形第 2、3、4 横行各数刚好一样。

傅氏指出“七位以后仿此推之”, 他归纳得出“以所招之差直列之如开方廉隅之数, 以所招之差横析之成三角堆垛之形。”“古有开方作法本原图, 互易其纵横之位, 即成招差衰率。”这里的“廉隅之数”就是贾宪三角形(“开方作法本原图”)的横行各数。这样, 傅氏就推导出数列的通项算法就是“廉隅之数”与各“首位之数”对应乘积的和。借用组合符号表示贾宪三角形横行各数, 则数列通项算法可以表示如下形式。

命题 4 高阶等差数列通项算法为

$$a_n = C_{n-1}^0 \Delta_1^0 + C_{n-1}^1 \Delta_1^1 + C_{n-1}^2 \Delta_1^2 + C_{n-1}^3 \Delta_1^3 + C_{n-1}^4 \Delta_1^4 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} \Delta_1^{n-1} \quad (5)$$

如果原等差数列的阶数是 p , 则 $\Delta_i^i = 0, i \geq p + 1$, 这时有

$$a_n = C_{n-1}^0 \Delta_1^0 + C_{n-1}^1 \Delta_1^1 + C_{n-1}^2 \Delta_1^2 + C_{n-1}^3 \Delta_1^3 + C_{n-1}^4 \Delta_1^4 + \cdots + C_{n-1}^p \Delta_1^p$$

这就解决了推论 3.2 的各层首项“衰率”(系数)的问题。随即, “招差衰率”组成的“招差总率图”(如图 3 圆圈中的数字组成的三角形)成为单独的研究对象。

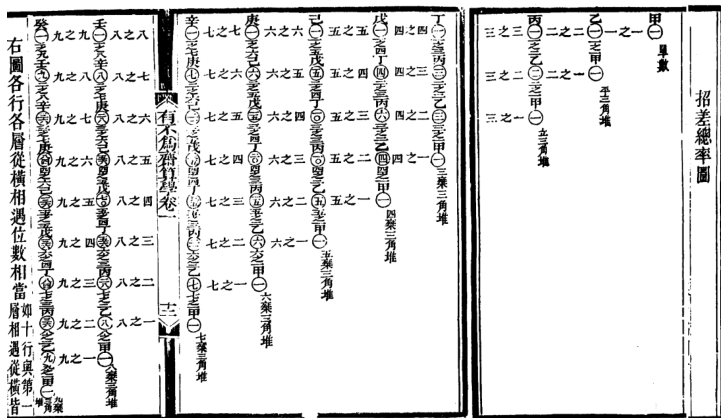


图 3 傅九渊“招差总率图”(“堆垛图”)原图

4 招差总率图(堆垛图): 诸乘三角垛的“各位之数”与“各位并数”

为了表述方便, 将傅氏招差总率图逆时针旋转 90° , 原图“上下”两数变为“左右”, 原图“右左”两数变为“上下”, 原图“竖行”变为“横行”, “横层”变为“竖列”, 如图 4。

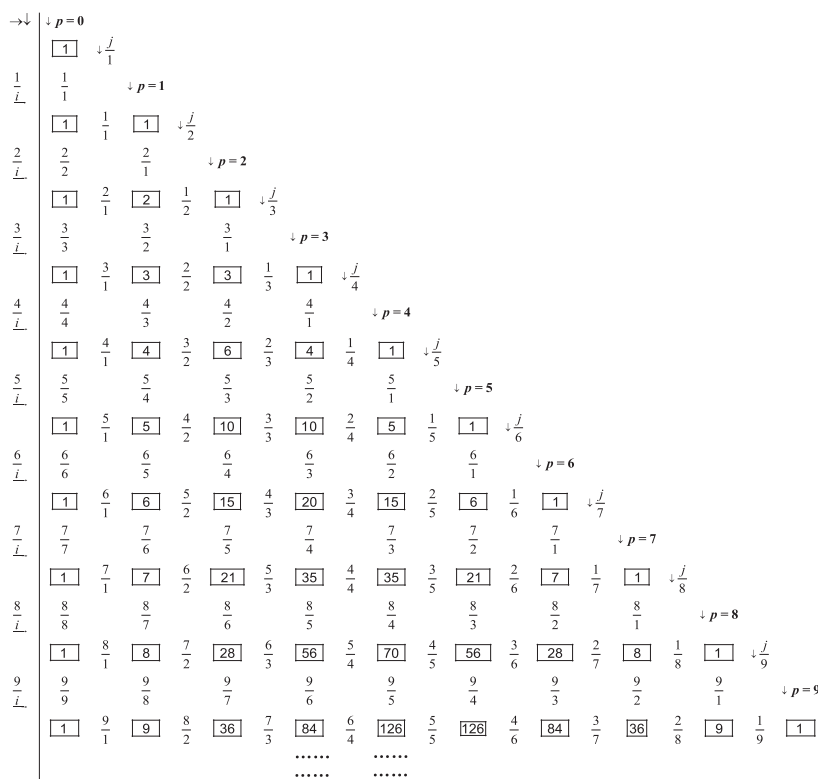


图 4 招差总率图(堆垛图)

图 4 中带方框的数字呈直角三角形形状, 就是贾宪三角形。傅氏原图图示列出 10 行 10 列, 他指出“十位以上图所不载者, 累求之可至无穷”。傅氏称各横行数列为“开方廉隅之数”, 各竖列数列为“诸乘三角堆”, 从左至右的各列依次为“单数”、“平三角堆”、“立三角堆”、“三乘三角堆”、……。为表述方便, 各列的列号用 p 表示, p 从 0 开始。 $p=0$ 时, 对应“单数”列。各列即为 p 乘三角堆。及至晚清, 一般称它们为 p 乘三角垛。为表述方便, 用 $v_{p,r}$ 表示 p 竖行第 r 个数。

4.1 “相与之率”: 贾宪三角形各数之间的关系

如图 4 中, $p=0$ 或 $r=1$ 时, $v_{p,r}=1$ 。竖行(p 乘三角堆)上下两数 $v_{p,r-1}$ 与 $v_{p,r}$ 之间的分数(如 $\frac{6}{1}$, $\frac{8}{1}$ 等), 横行(“开方廉隅之数”)左右两数 $v_{p-1,r+1}$ 与 $v_{p,r}$ 之间的分数(如 $\frac{j}{2}$, $\frac{j}{6}$ 等), 傅九渊称之“相与之率”。这些“相与之率”是上下两数、左右两数之间的

比值。如上下两数 $v_{3,4} = 20$, $v_{3,5} = 35$ 之间的分数为 $\frac{7}{4}$, 表明 $v_{3,5} = \frac{7}{4}v_{3,4}$; 左右两数 $v_{2,6} = 20$, $v_{3,5} = 35$ 两数之间的分数为 $\frac{5}{3}$, 表明 $v_{3,5} = \frac{5}{3}v_{2,6}$ 。这样, 傅氏相当于给出了关系式: $p \geq 1, i \geq 2$ 时, 上下两数有关系: $v_{p,r} = \frac{p+r-1}{r-1}v_{p,r-1}$; 左右两数有关系:

$$v_{p,r} = \frac{r}{p}v_{p-1,r+1}。$$

图 4 中任意两数之间可以通过“相与之率”连乘建立联系, 此即“乘法分”, 有“顺求”(从左至右)、“旁求”(从上到下)、“逆求”(从右至左)三法。对照总率图, 如从 $v_{1,6}$ 到 $v_{5,4}$ 的顺求、旁求为:

$$v_{1,6}(6) \times \frac{7}{6} \times \frac{8}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{6}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = v_{5,4}(56),$$

和

$$v_{1,6}(6) \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{5} \times \frac{7}{2} \times \frac{8}{3} = v_{5,4}(56)。$$

傅氏指出“堆垛立法, 以顺求为本也”, 即第 1 个算法是主要的、常用的。逆求法从右至左, 乘以相与率的倒数, 表达式与旁求法相同。

4.2 “各位之数”: p 乘三角堆(垛)通项算法

图 4 中, $p = 0$ 或 $r = 1$ 时, $v_{p,r} = 1$ 。由上文的“相与之率”, 用顺求法和旁求法, 即用递推的方法, 傅氏给出了 p 乘三角堆(垛)通项的两个算法:

$$v_{p,r} = \frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1) \quad (6)$$

$$v_{p,r} = \frac{1}{(r-1)!}(p+1)(p+2)\cdots(p+r-1) \quad (7)$$

借用组合符号, 它们可以表示为 $v_{p,r} = C_{p+r-1}^p = C_{p+r-1}^{r-1}$, 即组合性质 $C_m^k = C_m^{m-k}$ 。

进一步, 傅氏得到 p 乘三角堆求和算法, 如下。

4.3 “各位并数”: p 乘三角堆(垛)前 n 项和算法

命题 5 “行内各位之数, 即各层末位之数, 又为行前上一层各位相并之数也。”

此即 $p+1$ 乘三角堆第 n 个数($v_{p+1,n}$) 是 p 乘三角堆前 n 项和($\sum_{r=1}^n v_{p,r}$), 和记为 $V_{p,n}$, $p \geq 0, r$ 从 1 到 n 。傅氏这个命题可以表示为:

$$v_{p,1} + v_{p,2} + v_{p,3} + \cdots + v_{p,n} = \sum_{r=1}^n v_{p,r} = V_{p,n} = v_{p+1,n}$$

即

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1) = \frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)$$

这个性质是贾宪三角形的基本性质,若借用组合符号改写,这个性质即为现今所称的

$$\text{朱世杰恒等式 } \sum_{r=1}^n C_{p+r-1}^p = C_{p+n}^{p+1} \circ$$

式(6)与式(7)两个算法以及命题5,相当于给出了 p 乘三角垛的基本性质,所以傅氏也称图3为“堆垛图”,这在卷三中有论述。

5 傅氏招差术的结论:“一位之数”和“各位并数”

有了前面的论述,傅九渊最后回到了高阶等差数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 以及求和问题(设 A_n 为数列前 n 项和),给出了高阶等差数列通项以及求和的算法,如下。

命题6 “以廉隅为衰,而乘各首位之数^①,得所求一位之数。”

这里的“一位之数”指的是数列的通项,结合上文“廉隅”以及“首位之数”的解释,这个命题相当于给出了 p 阶等差数列的通项公式如下:

$$\begin{aligned} a_n &= \Delta_1^0 v_{0,n} + \Delta_1^1 v_{1,n-1} + \Delta_1^2 v_{2,n-2} + \Delta_1^3 v_{3,n-3} + \cdots + \Delta_1^p v_{p,n-p} \\ &= \Delta_1^0 + \Delta_1^1 \cdot (n-1) + \Delta_1^2 \cdot \frac{1}{2!} (n-2)(n-1) \\ &\quad + \Delta_1^3 \cdot \frac{1}{3!} (n-3)(n-2)(n-1) + \cdots + \Delta_1^p \cdot \frac{1}{p!} (n-p)(n-p+1) \cdots (n-1) \end{aligned}$$

式中 $\Delta_1^i (i=0, 1, 2, \cdots, p)$ 即为“首位之数”(参考图1)。

这样,命题6阐明了数列通项转化成数列首项以及各阶差分首项的线性表达式的系数问题,彻底解决了推论3.2。 p 阶等差数列通项是 p 次多项式,这个命题相当于指出了招差术实际上是将多项式转化为差分表达式的算法。这是招差术的数学本质。^[10]

命题7 “以堆垛为衰,而乘各首位之数,得所求各位并数。”

这里的“各位并数”指的是数列的和,结合命题5和命题6,这一句相当于给出高阶等差数列求和的算法,表示如下:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{r=1}^n a_r = \Delta_1^0 \sum_{r=1}^n v_{0,r} + \Delta_1^1 \sum_{r=1}^{n-1} v_{1,r} + \Delta_1^2 \sum_{r=1}^{n-2} v_{2,r} + \Delta_1^3 \sum_{r=1}^{n-3} v_{3,r} + \cdots + \Delta_1^p \sum_{r=1}^{n-p} v_{p,r} \\ &= \Delta_1^0 v_{1,n} + \Delta_1^1 v_{2,n-1} + \Delta_1^2 v_{3,n-2} + \Delta_1^3 v_{4,n-3} + \cdots + \Delta_1^p v_{p+1,n-p} \\ &= \Delta_1^0 \cdot n + \Delta_1^1 \cdot \frac{1}{2!} (n-1)n + \Delta_1^2 \cdot \frac{1}{3!} (n-2)(n-1)n \\ &\quad + \Delta_1^3 \cdot \frac{1}{4!} (n-3)(n-2)(n-1)n + \cdots \\ &\quad + \Delta_1^p \cdot \frac{1}{(p+1)!} (n-p)(n-p+1) \cdots (n-1)n \end{aligned}$$

① “各首位之数”原文作“诸差”,依傅氏举例和前文招差图说明校改。下同。

至此,从命题 1 到命题 7,傅九渊解析招差术的思路很清晰。他先是明确界定了“积”、“积差”以及“招差”等核心概念,指出招差术是用高阶等差数列的首项和各阶差分首项线性表示通项(多项式)的算法。随后,他归纳出该表达式中“首项”的系数与贾宪三角形相应横行数字的对应关系,并指出了这些数字互求的算法及贾宪三角形的基本垛积性质。最后,他明确给出高阶等差数列的通项算法与求和算法。这一成果相当于认识到招差术实际上是将多项式转化为差分表达式的算法。

6 评述与结论

如文章开始所述,宋元传世数学文献中没有发现有对招差术的数学原理有明确阐述的文献。明代数学式微,对此更不清楚。直到清初,梅文鼎揭示出平方数、立方数的垛积意义,最后一阶差分为非 0 的相等常数,即所谓的“齐”,从各阶差分“逆推累加”得到太阳积差(盈积)的差分表达式。^[8]局限于问题的背景以及几何模型的直观性,梅氏的论述藏在历法问题论述中,数列阶数没有超过 3。但他的研究工作应该对傅九渊有启发。如梅氏认识到,“以齐其不齐,可得每日细差及积差。其理则出于垛积招差之法也”,“借彼易见之差,以显难真之数,此立法之意也”,“差之积类于平方、立方者,……。欲明其理,仍当求诸少广。”^[20]加之复现的《四元玉鉴》中“招兵”类问题反映出的信息,傅氏认识到“积差”是各“首位之数”的线性表达。“立方招兵”题术文中的“上差”、“二差”、“三差”、“下差”就是傅氏所称的“首位之数”。相对于梅文鼎的“逆推”,傅氏则是顺推归纳(见第 3 节)。他所构造的招差图(图 3)很清晰地归纳出这个线性表达的系数“衰率”就是贾宪三角形的横行数,而且“累求之可至无穷”,突破了几何图形示意的限制。进而他通过贾宪三角形每两数之间的“相与之率”得到 p 乘三角垛的通项算法以及求和算法。他之前的汪莱研究组合时(约 1798—1799)也得到过这个结果,即“三角堆求积通法”。^[21]但傅氏的论述要清晰、自然得多。同时代的沈钦裴、罗士琳、徐有壬、戴煦(1805—1860)对《四元玉鉴》都有研究,但对招差术没有专门的论述。傅九渊《招差术解》、《招差算例》是将招差术独立出来当成数学问题进行研究的专著。傅氏的工作,后世学者也有评价。

晚清周毓英收录《招差术解》时说:

垛积招差乃中法至精之诣,步天等术所用最广。曩年读梅氏书,不明其立法之源,嗣得傅九渊算草而始悟。([18],凡例)

这里的“立法之源”指的是招差术的数学原理。

数学家周达(1878—1949)在日本访问时与数学家上野清谈论有限差分时评论道:

我国元代郭守敬氏著《授时历》,其“平立定三差”,已具有积较之理。后朱松庭氏作“招差”、“垛积”,罗茗香氏诠释之。观罗氏之《细草》,似亦用积较之术,但未明揭于篇耳。至傅九渊氏作《招差术解》,则直用积较之术,大畅其旨,而无

所隐。^[22]

综上,从目前所见史料来看,傅九渊《招差术解》与《招差算例》是首次专门讨论招差术的文献。可以说,傅氏准确、完整且清晰地阐明了招差术的数学原理,他在中国招差术的发展史上应该有一席之地。

致 谢 匿名评审专家、中国科学院自然科学史研究所邹大海研究员、姚大志研究员、天津师范大学李兆华教授、内蒙古师范大学郭世荣教授、湖北省图书馆夏金波先生提供了宝贵的修改意见,在此谨致谢忱!

参 考 文 献

- [1] 钱宝琮,主编. 中国数学史[M]. 北京: 科学出版社, 1992: 191.
- [2] 李兆华, 程贞一. 朱世杰招差术探原[J]. 自然科学史研究, 2000(1): 30-39.
- [3] 李俨. 中算家的内插法研究[M]//李俨, 钱宝琮. 李俨钱宝琮科学史全集. 第2卷. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1998.
- [4] 严敦杰. 中算家的招差术[J]. 数学通报, 1955(1): 4-13.
- [5] 刘钝. 等差级数与插值法[J]. 自然科学史研究, 1995(4): 331-336.
- [6] 刘钝. 大哉言数[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1995: 311-320.
- [7] 郭书春, 主编. 中国科学技术史·数学卷[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 517-520.
- [8] 李兆华. 《平立定三差详说》的一点注记[J]. 中国科技史杂志, 2014, 35(3): 281-288.
- [9] 阮元, 等, 撰. 冯立昇, 邓亮, 等, 校注. 畴人传合编校注[M]. 郑州: 中州古籍出版社, 2012: 516.
- [10] 李兆华. 招差术略论[C]//古算今论(第2版). 天津: 天津科技翻译出版公司, 2011: 282.
- [11] 傅寿朋. 显考拙斋府君行述[M]//傅九渊. 有不为斋算学(四卷). 刻本, 1870(同治九年).
- [12] 傅九渊传[M]//陈卿云, 纂. 冯兰森, 修. 同治重修上高县志. 刻本, 1870(同治九年).
- [13] 何振作. 傅九渊[M]//李放, 主编. 江西历代杰出科技人物传. 南昌: 江西科学技术出版社, 2000: 211-213.
- [14] 郭世荣. 梅穀成对江永:《翼梅》引起的中西天文学之争[J]. 自然辩证法通讯, 2005(5): 81.
- [15] 钱大昕. 与戴东原书[G]//钱大昕, 著. 陈文和, 主编. 嘉定钱大昕全集: 第九册[Z]. 南京: 凤凰出版社, 2016: 536.
- [16] 傅九渊. 有不为斋算学(四卷, 附行状)[M]. 刻本, 1870(同治九年).
- [17] 傅九渊. 有不为斋算学(四卷)[M]. 木犀轩丛书续刻本, 1887(光绪丁亥).
- [18] 傅九渊. 招差术解[C]//周毓英, 等. 中西算学集要: 卷八. 聚文堂刊本, 1881(光绪七年).
- [19] 王海林. 清代著名数学家徐有壬[J]. 咸阳师专学报, 1995(3): 54-60.
- [20] 梅文鼎. 平立定三差详说[M]//梅文鼎, 著. 韩琦, 整理. 梅文鼎全集: 第五册. 合肥: 黄山书社, 2019: 482-486.
- [21] 李兆华. 衡斋算学校证[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1998: 161-162.
- [22] 周达. 日本调查算学记[M]. 上海通社《通社丛书》本, 1903: 39.

A Study on Fu Jiuyuan's Research on *Zhaocha Shu* (the Finite Difference Method)

GAO Hongcheng , REN Yirou

(Institute for Cultural Heritage and History of Science & Technology, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China;

School of Mathematics, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China)

Abstract Between 1822 and 1823, the Qing dynasty official Fu Jiuyuan (傅九渊, 1791—1845) completed a 4-volume work on mathematics, *Youbuwei Zhai Suanxue* (有不为斋算学, *Mathematics Youbuwei Studio*). Volume 1 explains *zhaocha shu* (招差术, finite difference method) while Volume 2 gives examples of finite difference calculations. These two volumes represent the first specialized work to discuss this method. Fu first clearly defines core concepts such as *ji* (积, term of a sequence), *jicha* (积差, the difference between the first and last terms of a sequence), and *zhaocha* (招差, expressing a certain term using the differences of a sequence). He points out that *zhaocha shu* is an algorithm that linearly expresses the general term (a polynomial) of a higher-order arithmetic sequence using the first term of the sequence and the first terms of its various order differences. Subsequently, he clearly summarizes the corresponding relationship between the coefficients of the first term in this expression and the numbers in the corresponding horizontal row of Jia Xian's Triangle (贾宪三角形, Jia Xian's Diagram similar to Pascal's Triangle), and proposes the mutual calculation algorithm for these numbers as well as the basic stacking properties of Jia Xian's Triangle. Finally, he explicates the general term algorithm and summation algorithm for higher-order arithmetic sequences. This achievement is equivalent to recognizing that *zhaocha shu* is essentially an algorithm that converts polynomials into difference expressions. Thus, Fu Jiuyuan accurately, comprehensively and clearly elaborates the mathematical principles of *zhaocha shu*.

Keywords Fu Jiuyuan (傅九渊); *Explanation of the Method of Finite Differences* (《招差术解》, *Zhaocha Shu Jie*); *zhaocha shu* (招差术, finite difference method); mathematical principles