《自然科学史研究》 第42卷 第4期（2023年）：405—417
Studies in the History of Natural Sciences Vol. 42 No. 4(2023)

邹伯奇关于日影观测“椭圆影心非日心”的数学解读

廖运章[1]✉ 李杰民[2]
（1. 广州大学 数学与信息科学学院，广州 510006；2. 岭南师范学院 数学与统计学院，湛江 524048）

摘 要 元代郭守敬用装有景符的四丈高表测量日影，改测表端投影为测横梁投影，将“仅如米许”的太阳像中心视为日面中心。《崇祯历书》认为太阳透过小孔斜射到密室地面的投影是椭圆，此后天文学家都认为椭圆光影之中心即太阳中心的投影。1844年前后，邹伯奇发现“椭圆影心非日心”，并从数学上予以解读，其说因未刊行而迄今少为人知。邹伯奇这一成果，是郭守敬圭表测影理论的完善，为日影测量之误差分析等提供了新判据，对圭表测影研究亦具有重要意义。

关键词 邹伯奇；日影测量；椭圆影心非日心；数学解读
中图分类号 N092
文献标识码 A **文章编号** 1000-0224(2023)04-0405-13

圭表测影历史悠久，为使测量更精确，古人不断改进圭表测影技术和方法。元代郭守敬(1231—1316)用装有景符的四丈高表测量日影，改测表端投影为测横梁投影，将“仅如米许”的太阳像中心视为日面中心[1]。《崇祯历书·交食历指》(1632)认为，太阳透过小孔斜射到密室地面的投影，“所得形必长圆(即椭圆)”[2]。此后，天文学家大都认为椭圆光影之中心即太阳中心的投影。其实，在清道光二十四年(1844)前后，岭南科学家邹伯奇(1819—1869)就已发现“椭圆影心非日心”这一郭守敬及后人没有意识到的问题[3]，并从数学上予以解读。因邹伯奇没有正式发表该论述(只有手稿存家，内容收入其遗著《测量备要》)[4]，近现代天文史家对此并不知悉。事实上，邹伯奇关于日影观测“椭圆影心非日心”的论述，建立了“椭圆影心非日心”的数学模型，是对郭守敬圭表测影理论的完善，为日影测量之误差分析等提供了新判据，对圭表测影研究具有重要意义。

收稿日期：2019-03-10；**修回日期**：2019-06-14。
作者简介：廖运章，1964年生，广西罗城人，教授，主要研究数学教育与数学史，Email：lyzdyx@sina.com；李杰民，1973年生，湖南平江人，博士，主要研究数学教育与数学史。
基金项目：2019年度《广州大典》与广州历史文化研究资金资助重点项目“晚清广州本土学者微积分著述的整理与研究”(项目编号：2019GZZ04)。

1 日心观测及其发展

1.1 元明清的日心观测

元代开始使用圭表顶端横梁测影,太阳光通过景符微孔在圭面上形成米粒大小的太阳像,横梁平分日像时可测得日心影值。《元史·历志·授时历议上》描述,“旧法以表端测晷,所得者日体上边之景,今以横梁取之,实得中景,不容有毫末之差”[5]。

《崇祯历书·交食历指》卷 7“以长圆形求日食方法”节,称“正对太阳,其景(影)必圆。今以斜对之平面,亦在密室中受景(影),孔仍小如前,则所得形必长圆”。此处“长圆”即椭圆,椭圆知识明末清初始传入我国。([2],10-11 页)

《历象考成》(1722)中载有太阳视径观测法,称“中表系横梁,上下皆空,太阳上边之光射横梁之下面,太阳下边之光射横梁之上面,其所生之影必当太阳之中心”;“太阳上边之光从孔南界射入,至案为椭圆形之前界,与正表之理同。太阳下边之光从孔北界射入,至案为椭圆形之后界,与倒表之理同,故两高度之较即为太阳之径也”。[6]

欧洲也有晷影观测的传统,或在教堂,或在天文台。“西洋人每观测日影,向南立高墙数丈,凿孔以通日影于地,铺一铜板于平地,分为万分之数观之,则见之甚易。比较铜板之日光照在何宫,则较目视日晷,极其清晰。”[7]“18 至 19 世纪法国也注意日晷改良。它不重视日景的长短,常在屋宇墙壁穿孔以通日光,求取太阳高度。度量日景长短,则以孔的中心为起点。这类日晷多设在教堂内……”。[8]

《钦定大清会典》史部卷 86 记载:“史云何承天始立表候日影,前明观象台下设晷影堂,南北平置铜圭于石台上……南端植铜表高八尺,上设横梁用影符以取中影。本朝加二尺,表高一丈,上端安铜片,中开圆孔径二分。午正太阳之影自圆孔射至圭面成椭圆形,南界为日体上边影,北界为日体下边影,中心为中影。”[9]

邹伯奇认为,“国朝晷影堂之法,则于表端置铜片,开小孔,使漏光于圭面,成椭圆形,北为日下边影,南为日上边影。伯奇尝仿此二术,精心测量窥几之下,现出小圆光亦为椭形面,而圆心非即日心”;“谨按以椭圆影揆日高度。国朝测候度越前古之一端也,而会典载以中心为中影云云,殊欠分明,故撰此图说明之。又按此不过设数以明椭圆影心非日心,其实日近地平,其上下边及日中心之清蒙气差多少不同,故视日纵横径亦微异,虽以仪器折中取日心,亦非真视度也”。[10]

直至晚清,除了邹伯奇,人们一直认为,太阳透过小孔斜射到地面的投影为椭圆、投影椭圆的中心即日心——“椭圆影心即日心”,以致近现代天文史家亦没有意识到邹伯奇“椭圆影心非日心”的论断,仍沿用《大清会典》的观点。如陈遵妫按照郭守敬和清代天文学家的思路,认为“正午时候,太阳影子经过圆孔射到圭面成椭圆形状;南界是日面上边缘的影子,北面是它的下边缘的影子,中央是日面中心的影子”([8],1275 页)。

1.2 日心观测的现代模拟

现当代,有学者对郭守敬圭表测影进行数据分析或模拟测量[11],因邹伯奇“椭圆影心

非日心”不为世人所知，相关诸多研究文献依旧沿袭“椭圆影心即日心”的“郭法”①来计算影长，这样计算的影长存在系统误差②，但几乎没有引起研究者注意，仅从测量误差或测量的客观条件不佳等角度去归因，导致对误差产生的原因界定不清。

比如，肖尧、孙小淳用北京古观象台的圭表进行模拟测量，得到 29 组影长数据[12]；崔石竹、李东生同样用北京古观象台的圭表进行仿古测量，得到 181 组影长数据[13]。理论值大于或等于测量值的，前者有 9 组(31.0 %)、后者有 124 组(68.5 %)；理论值小于测量值的，前者有 20 组(69.0 %)、后者有 57 组(31.5 %)。如果没有系统误差和人为过失误差，而且理论值计算正确，则测量值与理论值的比较，偏大偏小的数据占比应该均接近五成，然而上述两组研究者的测量数据分布均不符合预期。

王玉民认为，“冬至圭表测影是一种倒退的技术”，“即使采用景符，测量冬至影长的误差仍远远高于测夏至时的误差”，将测量误差归因于“冬至投射角太低造成的弥散度问题”等客观因素。[14]其实，邹伯奇“椭圆影心非日心”能清晰地说明，存在系统误差才是内因。

2　邹伯奇“椭圆影心非日心”的数学解读

邹伯奇，号特夫、特生，又号征君，广东南海人，是清末百科全书式学者[15]，我国近代科学先驱[16]，在数学、物理学(力学、光学)、天文学、测绘学和仪器制造等方面造诣精深，生前未能刊行论著，留下大量科学手稿。

2.1　“椭圆影心非日心”史料的发现

同治十三年(1874)，亲友选出部分手稿刊刻《邹征君遗书》，“复有未定之书、《测量备要》二册”等由后人保存。([3]，222 页) 1954 年，邹伯奇曾孙邹孟才将“另手抄邹氏遗稿贰本”捐献给广州博物馆，并用竖行印有“广州市文一教育用品有限公司印售(纸 12)”绿格“稿纸(20 × 20)”抄辑，送交邹伯奇后裔保存至今。1962 年，邹孟才将“最近捡得的手稿一部分”散稿和实物赠给梁恒心，2009 年，邹伯奇后裔整理保存和搜集到的遗稿，出版《邹伯奇遗稿》一书，其中披露了从未面世的“椭圆影心非日心”的具体内容。2011 年起笔者先后数次到邹伯奇故居访问，邹伯奇玄孙邹忠廉赠与笔者他保存的《测量备要》等 4 本抄辑本之复印件，为邹伯奇遗稿的转抄本。“椭圆影心非日心”具体内容，包括“[圆锥斜剖成椭圆面]，圆窖斜截成椭圆算草并图”，收录于《测量备要》辑本 A 和无书名但页码连续的 B1 本(页码由三至七三)，内容相同，抄写笔迹不同。每叶左上格外均有“NO.”英文字母，用于编页码，每页的右叶用汉字数字编码，如 NO. 三十一、NO. 三十二等。([4]，90-92 页)

事实上，邹伯奇关于“椭圆影心非日心”的论断，早有提及。陈澧《东塾集》卷 3“邹特

---

① 为行文简洁，本文称《元史 · 历志》郭守敬圭表测影改进之前的方法为“旧法”，郭守敬的方法为“郭法”，邹伯奇的方法为“邹法”。严格地说，“邹法”并非具体方法，只是“郭法”理论上的完善。

② 正态分布是数学家高斯研究误差时发现的，正态分布又称为误差分布，测量误差近似服从正态分布，系统误差不服从正态分布。通常情况下，若无系统误差和人为过失误差，测量值与真实值的比较，偏大偏小的数据占比均应接近 50%。

夫《学计一得》序”称：

> 又尝在余斋中论测日旧法未密，日光穿表端之孔而下为圆锥形，斜射平版而成椭圆，椭圆心非圆锥心，即非日心，乃创椭圆求圆锥心法。时梁南溟、侯子琴、徐子远同在座，三君与余皆疑圆锥斜截之面，两端不等，非真椭圆也。余遂设数以算之，两端正相等，乃叹此法为中西天算诸书所未及也。[17]

《邹征君遗书》拾芥园刻本记载：

> 《学计一得》者，吾友南海邹君特夫所作也。……特夫又尝过余，斋中论测日法未密，日光穿表端之孔而下为圆锥形，斜射平版而成椭圆，乃立法以椭圆面求圆锥心为日心。是时梁南溟、侯子琴、徐子远皆在座，余皆疑圆锥斜截之面，两端不等，不得为椭圆，三君以为然。余乃设数(以)算之，两端竟相等，乃皆叹服此法为中西天算诸书所未及也。……旧事历历在目，而俯仰之间，不觉十余年矣。……特夫昔以此编属余为序。余爱其精识神解，读之不倦，顾连年夷乱，屡欲为序，逡巡不成，不觉又三年矣。……咸丰八年九月陈澧书于横沙之崇雅楼。

陈澧谈及“椭圆影心非日心”这两段话，内容稍有出入，但均认为：一是“日光穿表端之孔而下为圆锥形，斜射平版而成椭圆”；二是“椭圆心非日心”。这正是邹伯奇“椭圆影心非日心”的两个核心观点。

梁恒心在《邹伯奇摄影史料初探》(1963)中抄录了一段邹孟才赠与的散稿原文，并分析认为这是发明“摄影之器”的证据和理论基础：

> 孔若小则光道系圆锥体，以孔为其顶点，以纸从直角遮断其光道，则其被照部分作圆形，纸距孔益远，则圆形亦大焉。又若以纸从横遮其光，或使光射于地上，则被照部分乃成椭圆形而非圆形矣。旭日初升，而见树木之影倒影于寝室之壁者，以日光自户隙而入故也。[18]

梁恒心又从陈澧作序的时间(咸丰八年，1858)推测，“从陈澧作序上推十余年，约在道光廿余年，这和摄影之器制成的时间(道光甲辰年，1844)相近，他的理论根据，从这里可以看到，而送来的手抄稿亦可以断定确定为邹伯奇原作。”

综合陈澧“邹特夫《学计一得》序”、邹达泉有关“《测量备要》二册”识记、广州博物馆“另手抄邹氏遗稿贰本”接收遗物清单、梁恒心抄录的散稿原文、《测量备要》抄辑本等史料，我们认为，梁恒心的推测较为合理，故推知邹伯奇发现“椭圆心非日心”的时间约在1844年前后。

邹伯奇遗稿转抄本中的“椭圆影心非日心”史料，存在错漏，特别是数字、图标等缺失，在不影响原意的情形下，经反复推算后予以合理修正。

对于“椭圆影心非日心”问题，邹伯奇首先论证“轴线不过椭圆心定理”，继而以之建构“椭圆影心非日心模型”，从而订正前人“椭圆影心为日心”之误。

2.2 “椭圆影心非日心”数学模型

邹伯奇首先在《测量备要》遗稿转抄本B1本(“NO. 三一”页，图1)中，概要式地描述平面斜截圆锥的“轴线不过椭圆心定理”、“椭圆影心非日心模型”及其历史渊源和存在问题，主旨是“圆锥斜剖成椭圆面，其椭圆中心非锥心，必谆谆致辨者，为测影故也”。

邹伯奇在简述郭守敬圭表测影方法和“国朝晷影堂之法”等的基础上，依这两种测影

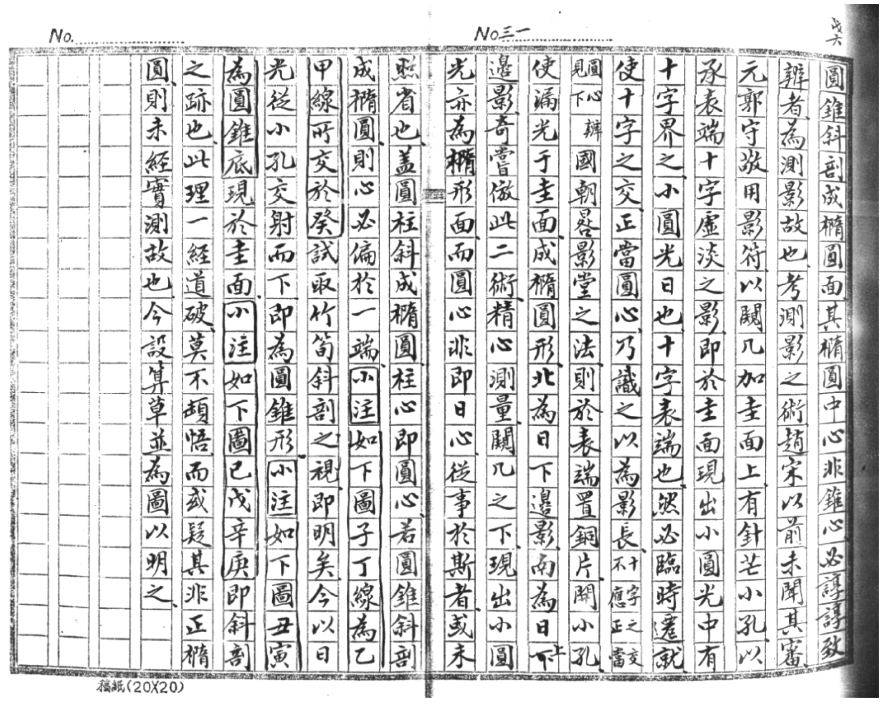


图 1　遗稿转抄本“三一”页

之术，开展实地观测，“精心测量”发现“椭圆心非即日心”，有悖传统结论，于是，给出原因：“盖圆柱斜[剖]成椭圆，柱心即圆心。若圆锥斜剖成椭圆，则心必偏于一端。试取竹笋斜剖之，视即明矣。”即借助圆柱斜截成椭圆轴线过椭圆心、圆锥斜截成椭圆而椭圆心偏移的数学结论，建构“椭圆影心非日心”的数学模型。

事实上，“轴线不过椭圆心”定理的天文意义，就是“日光从小孔交射而下，即为圆锥形，现于圭面，即斜剖之迹也（椭圆）。此理一经道破，莫不顿悟，而或疑其非正椭圆，则未经实测故也”。“椭圆中心非锥心”（不妨称邹伯奇椭圆影心非日心模型），用现代数学语言描述为：

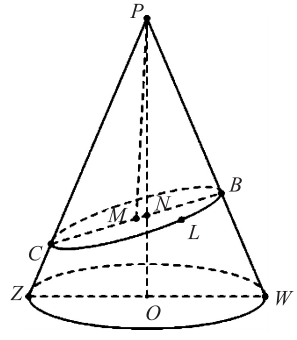


图 2　椭圆影心非日心图

[轴线不过椭圆心定理]如图 2，在圆锥 PZW 中，沿不平行于圆锥底面的平面斜截圆锥，所得截口 BLC 是椭圆，且 PM 与圆锥的轴线 PO 不共线（M 是椭圆中心、O 是圆锥底面圆心）。

[椭圆影心非日心模型]如图 2，太阳光穿过天文仪器景符的小孔 P 后形成阳光圆锥 PZW，阳光圆锥 PZW 在地面上的投影是椭圆 BLC，太阳中心的投影点为 PO 与椭圆 BLC 长轴 BC 的交点 N，而不是椭圆影心 M。

对于轴线不过椭圆心定理，邹伯奇用斜截竹笋的实例进行直观诠释，其中蕴含着椭圆的两种形成方法（“圆柱斜[剖]成椭圆”、“圆锥斜剖成椭圆”），反映出邹伯奇对椭圆知识的掌握情况。明末清初，西方椭圆知识逐渐传入我国，利玛窦最早带来椭圆知识，罗雅谷

与汤若望《测量全义》(1631)、邓玉函《测天约说》(1633)分别给出椭圆形成方法——斜割圆柱、截圆锥法,南怀仁《灵台仪象志》(1674)传入椭圆的拉线画法;《测量全义》传入椭圆面积的阿基米德求法,张诚和白晋翻译巴蒂的著作《几何原本》,又给出一种新的求椭圆面积的方法——比例法[19];《交食历指》、《历象考成后编》(1742)先后传入椭圆基本定理等([8],39-42页)。相继传入的椭圆第一定义、椭圆基本定理、面积公式等知识,受到中算家的重视与研究,邹伯奇是熟知这些知识的。

值得注意的是,阳光通过景符小孔在圭面上形成椭圆影已是常识,但该椭圆影是否为"正椭圆"则存有疑问,邹伯奇认为"未经实测",于是"今设算草并为图以明之",即下述"圆窖斜截成椭圆算草并图"。

2.3 例证轴线不过椭圆心定理

邹伯奇借助一个具体几何模型"圆窖"(圆台),以"圆窖斜截成椭圆算草并图"(图3)为题([10],32-34页),论证"圆窖者,即圆锥之下体也,圆窖斜截面既成正椭圆,则圆锥亦然",得出结论"圆窖之中线与椭圆面长径线交于辰,非长径之一半,故知圭面椭圆影长径之半非日心所射也,再设数核之"。

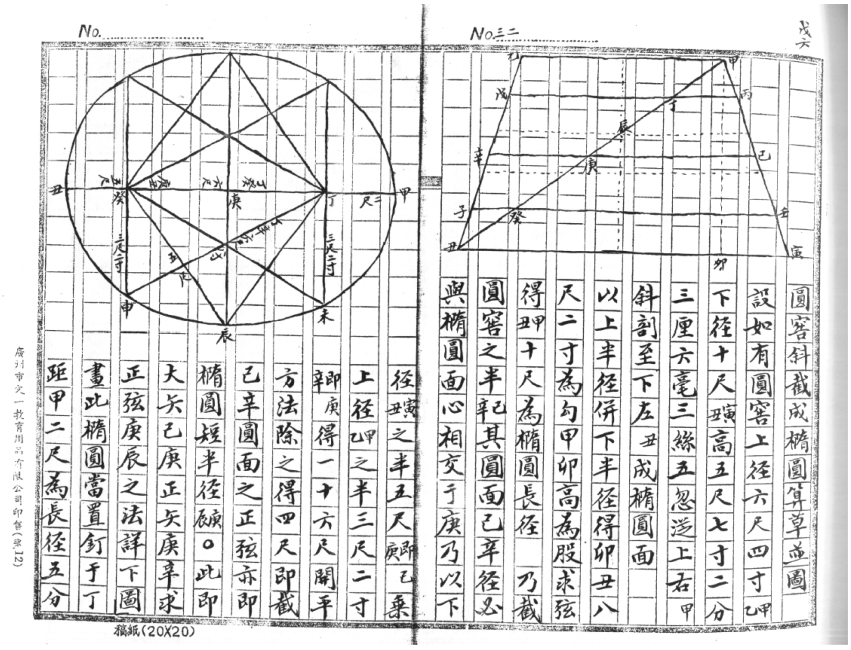


图3 遗稿转抄本"三二"页

该圆窖的具体数据是:"设如有圆窖,上径六尺四寸(甲乙),下径十尺(寅丑),高五尺七寸二分三厘六毫三丝五忽,从上右(甲)斜剖至下左(丑),成椭圆面。"

邹伯奇例证(具有一般性)的思路是"圆锥斜截面是正椭圆,椭圆心非日心(投影)"。如图2,先论证椭圆 BLC 为正椭圆,再证明 N 与 M 不重合,从而 PM 与 PO 不共线。

设图3遗稿转抄本中天干地支图标对应的字母依次为:A 乙、B 甲、C 丑、D 寅、E 辛、F 己、G 卯、J 未、K 子、L 壬、M 庚、N(图3辰出现两次,标记有误,这里 N 对应图3右上方的辰,左下方的辰对应 S)、Q 申、R 午、U 丁、V 癸、X 丙、Y 戊;原文无标注的,为

行文方便，加标字母 I 、O_1、O_2、O_3、P 等，如图 4—6。

由图 4，设圆台 $ABCD$ 的上底直径 $AB=6.4$、下底直径 $CD=10$、高 $BG=5.723635$。[①] BC 是斜截面椭圆的长轴，知 $GD=1.8$，$CG=8.2$，在 $Rt\Delta BGC$ 中，由勾股定理得 $BC=10$。EF 是圆台中截面的直径，与 BC 交于 M，知 $MF=CD/2=5$，$EM=AB/2=3.2$，由勾股比例（射影定理）$MF\cdot EM=MS^2$（图 6），故椭圆半短轴 $b=MS=4$。同理，可求 $VQ=3.2=UJ$（图 5）。

另由图 5，椭圆内含两个面积相等的 $Rt\Delta UVQ$ 、$Rt\Delta UVJ$ 以及等腰 $Rt\Delta UVS$，其中垂线 $MS=b=4$，由椭圆定义（到两个焦点的距离之和为 $2a$）得 $US+VS=2a=10$，同理 $UQ+VQ=10$；在 $Rt\Delta UVQ$ 中，$UV=2c=6$，由勾股定理 $UQ^2=VQ^2+6^2$，解方程组亦可得 $VQ=3.2$。

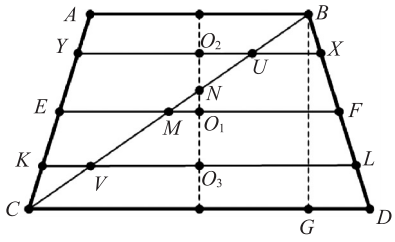


图 4　圆台纵截面图

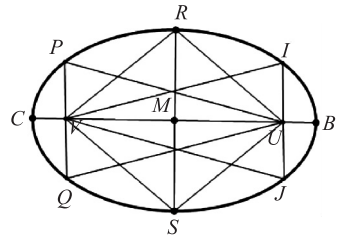


图 5　圆台斜截面图（椭圆）

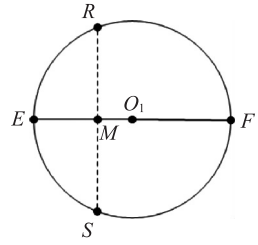


图 6　中间横截圆面

简而言之，若知圆台的高与上下底面直径，可求斜截面椭圆的长径；作圆台的中截面，可求斜截面椭圆的短半径；作与圆台中截面对称的两个横截面或用椭圆定义与勾股定理，可求得椭圆的其他弦长，且对称的弦长相等。于是，斜截面椭圆是“正椭圆”。

因圆台是圆锥的一部分，圆台的斜截面是椭圆，则圆锥的斜截面也是椭圆，圆台的中轴线与椭圆面的长轴交点为 N，由图 4 可知，$2BN\neq BC$，即 N 不是 BC 的中点，从而 N 与 M 不重合，PM 与 PO 不共线。故由图 2，圭面上投影椭圆的中心 M 并非日影点 N。

邹伯奇没有定义“正椭圆”，可能是一种通俗说法，从上下文看，指“过两焦点并垂直于轴的弦长相等”之椭圆，就是常规的标准椭圆（关于主轴对称），以此回应陈澧等“圆锥斜截之面，两端不等，不得为椭圆”的疑虑。

2.4　椭圆影心非日心模型的观测实例

椭圆影心非日心模型（邹法），实质是轴线不过椭圆心定理在日影测量上的应用。郭法测日影，将椭圆中心 M 视为日影点，而邹法证实日影点是 N，郭法测日影存在系统误差 NM。

邹伯奇的论证，基于一个具体日心观测实例（图 7），原文与“圆窖斜截成椭圆算草并图”一一对应，沿袭轴线不过椭圆心定理的证法，推理步骤几乎一致，因已知条件不同，推理略有差异：

① 原文此处单位为尺，长度单位有丈、尺、寸、分、厘、毫、丝、忽等，为十进制，所以直接用数字表示，省略单位，对推理与结论均无影响。

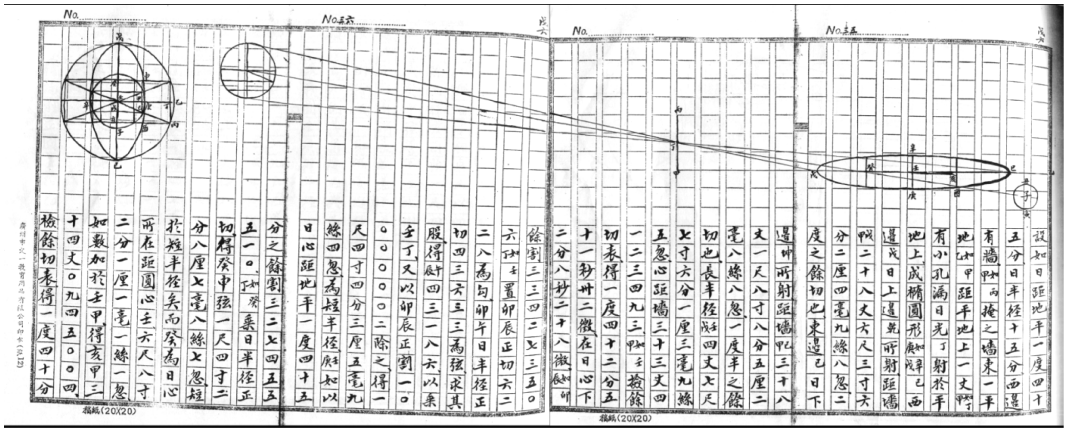


图7 遗稿“三五”、“三六”两页拼接①

设如日距地平一度四十五分,日半径十五分,西边有墙(如丙甲),掩之墙东一平地(如甲乙),距平地上一丈(如丁甲),有小孔漏日光(丁)射于平地上,成椭圆形(如辛己庚戊)。西边(戊),日上边(乾)所射,距墙(戊甲)二十八丈六尺三寸六分二厘四毫九丝八忽,二度之余切也;东边(己),日下边(坤)所射,距墙(己甲)三十八丈一尺八寸八分五厘二毫八丝八忽,一度半之余切也。长半径(壬戊),四丈七尺七寸六分一厘三毫九丝五忽;心距墙三十三丈四尺一二三四九三(如壬甲),检余切表,得一度四十二分五十一秒卅二微,在日心下二分八秒二十八微(如卯辰);余割三三四二七三五零六(如壬丁)。([10],35页)

图7的右、左两图分别对应图8和图9,其中字母与遗稿天干地支图标相对应,即甲 O、乙 S_1、丙与丁(各出现两次,笔误,现将图7右上图的丙、丁分别记为 T、P,左上图的丙、丁依次记为 K_1、S_2)、戊 B、己 C、庚 S、辛 R、壬 M、癸 N;子 W、巳 K_3、申 Q、酉 K、戌 G、亥 V;乾 B_1、坤 C_1。原文未标注的,为对称与行文方便,加标字母。

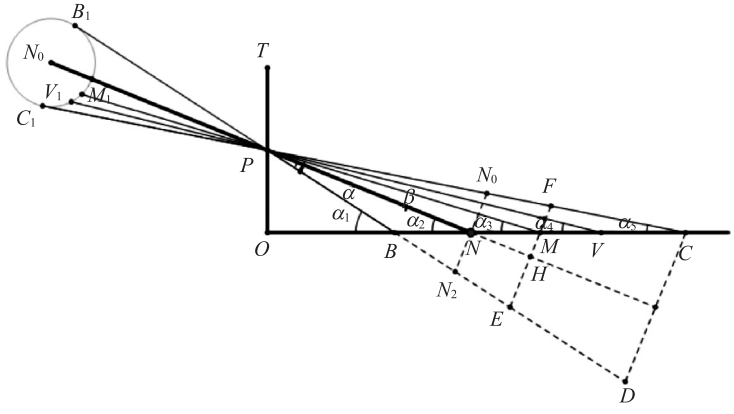


图8 日影投射及作辅助线求椭圆短半径示意图

① 图7中太阳示意图没有标字母,遗稿“三八”页后另附一页,为另一人笔迹,文字内容相同,但太阳示意图标有字母,将其拼接到图7中。

如图 8，设日高 $\alpha_2=1$ 度 45 分，日半径角 $\alpha=15$ 分，即角 $\angle B_1PN_0$ 或 $\angle BPN$。N 为日心 N_0 的射影，B，C 分别为日上、下边沿射影，BC 即投影椭圆的长轴。$OP=1$[①]，$\cot\alpha_1=OB=28.6362498$，查表知 $\alpha_1=2$ 度，$\cot\alpha_5=OC=38.1885288$，查表得 $\alpha_5=1.5$ 度。M 是 BC 的中点，因此 $BM=(OC-OB)/2=4.7761395$。$cot\ \alpha_3=OM=OB+BM=33.4123493$，查表得 $\alpha_3=1$ 度 42 分 51 秒 32 微。

现求椭圆的半短轴 b（图 9 中 MS）。记 $\angle NPM=\beta$，由射影定理可知 $MS=\sqrt{ME\cdot MF}$

$=\sqrt{(MH+HE)\cdot(HF-HM)}=\sqrt{HE^2-HM^2}=\sqrt{(PH\tan\alpha)^2-(PH\tan\beta)^2}$

$=PH\sqrt{(\tan\alpha)^2-(\tan\beta)^2}=\sqrt{(\tan\alpha)^2-(\tan\beta)^2}PM/\sec\beta$。

又 $\beta=\alpha_2-\alpha_3=2$ 分 8 秒 28 微，查表得 $\tan\beta=0.0006228$，$\alpha=15$ 分，$\tan\alpha=0.0043633$，所以 $\sqrt{(\tan\alpha)^2-(\tan\beta)^2}=0.0043186$。$PM=\csc\alpha_3=33.4273506$，$\sec\beta=\sqrt{1+(\tan\beta)^2}=1.000002$，代入上式得 $b=MS=0.1443594$。

另 $PN=\csc\alpha_2=32.7455510$，$NN_1=PN\tan\alpha=0.1428787$，$NQ=NN_1<b$；日心投影 N 到椭圆中心 M 的距离 $NM=OM-ON=\cot\alpha_3-\cot\alpha_2=0.6821511$。

再求椭圆的弦 VK。记 $\angle NPV=\gamma$，与 MS 的计算方法一样，$VK=\sqrt{(\tan\alpha)^2-(\tan\gamma)^2}PV/\sec\gamma$。

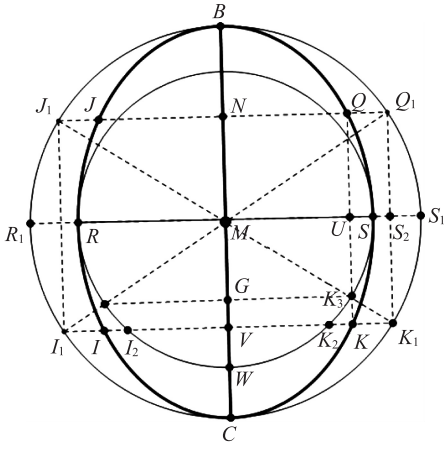


图 9　投影椭圆及辅圆

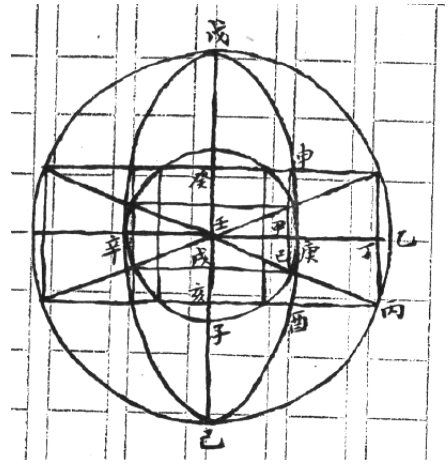


图 10　图 9 之原图

因 $\cot\alpha_4=OV=OM+MV=OM+NM=34.0945004$，查表知 $\alpha_4=1$ 度 40 分 48 秒 10 微；而 $\gamma=\alpha_2-\alpha_4=4$ 分 11 秒 50 微，查表得 $\tan\gamma=0.001221$，从而 $\sqrt{(\tan\alpha)^2-(\tan\gamma)^2}=0.0041889$；又 $PV=\csc\alpha_4=34.1090986$，$\sec\gamma=\sqrt{1+(\tan\gamma)^2}=1.000008$，将数据代入得弦 $VK=0.1428795$。

如图 9，以椭圆中心为圆心，分别以椭圆的半长轴 a、半短轴 b 为半径的圆称为辅圆。

① 原文此处单位为丈，与前述一样，长度系十进制，直接用数字表示，涉及长度的数字单位略。

考虑椭圆的横弦与横径之比。记 $\angle K_1MS_1 = \theta$，$\cos\theta = GK_3/MK_3$，又 $GK_3/MK_3 = VK/MS$，将前已算出的 VK、MS 数据代入，得 $\cos\theta = 0.9897491$，查表得 $\theta = 8$ 度 12 分 39 秒 4 微。

考虑椭圆的纵弦与纵径之比。$\sin\theta = MV/MK_1$，又 $MV/MK_1 = UK/MC$，而 $UK = MV = MN$，$MC = BM$，将前已算出的 MN、BM 数据代入，得 $\sin\theta = 0.142816$，查表亦得 $\theta = 8$ 度 12 分 39 秒 4 微。

“以幂积论”采用计算面积的方法，验证等式 $S_{CMS_1}/S_{S_1MK_1} = S_{CMS}/S_{SMK}$ 成立，证实“椭圆形面圆锥斜剖所成与圆柱斜剖所成，其边周无所盈缩，其同为正椭圆审矣”。从这句话来看，时人有可能认为“圆柱斜截面”是“正椭圆”、“圆锥斜截面”是“不正的椭圆”。事实上，由椭圆面积公式，有 $S_{CMS_1} = \pi a^2/4$、$S_{CMS} = \pi ab/4$，故 $S_{CMS_1}/S_{CMS} = a/b$；又根据椭圆基本定理 $S_{S_1MK_1}/S_{SMK} = a/b$，等式成立，说明邹伯奇知晓椭圆基本定理、面积公式等内容。

“谨按以椭圆影揆日高度”，说明太阳的天顶距或地平高度与其晷影长度可以互求[20]，影长值计算时还需考虑蒙气正（清蒙差）。

3 邹伯奇椭圆心非日心模型的意义

郭守敬从测影工具、测影方法方面改进圭表测影技术，景符与横梁的结合使用，确实大大提高了测量精度。然而，真的是“不容有毫末之差”吗？邹伯奇发现郭氏测量理论存在瑕疵，或许源于对数学与光学的研究，熟悉椭圆知识与小孔成像原理等数理知识，敏锐地意识到投影椭圆的中心并非日心，并进行实证与论述。20 世纪 80 年代初，郭盛炽等在实际测量中也发现了这一问题[21]，意识到按郭法所测的影长并非 $h\cot\theta$，而是 $h\cot(\theta-\delta)$（图 8，$\angle ONP = \theta$，$\angle OMP = \theta - \delta$），并借助一个纸屏辅助测量以获得 δ 的近似值，从而使测量值近似等于 $h\cot(\theta-\delta)$，但未能从理论层面深入分析，目前有关圭表测影研究文献并未采用该法，仍没有意识到它的重要性。可见，邹伯奇的订正成果没有广为人知，除了传播工具落后等历史原因，成果的理论意义与应用价值未被挖掘也是重要因素。

3.1 郭守敬圭表测影理论的完善

如图 8，不失一般性，设 P 为小孔，BC 表示射影椭圆的长轴，M 为 BC 的中点即椭圆中心，N 为日心 N_0 在地面的射影。

显然，PN 是 $\angle BPC$ 的角平分线，记 $\angle BPN = \alpha$，则 $\angle CPN = \alpha$；记 OB、ON、OM、OC 的长度分别为 x_a、x_c、x_m、x_b，OP 的高度记为 h；$\angle OBP$、$\angle ONP$、$\angle OMP$、$\angle OCP$ 分别简记为 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4，$\angle NPM$ 记为 δ，θ_2 即日距地平高度简记为 θ，故 $\theta_1 = \theta + \alpha$，$\theta_2 = \theta$，$\theta_4 = \theta - \alpha$。以 l 表示影长，旧法取 OB 为影长，即 $l = x_a$；郭法取 OM 为影长，即 $l = x_m$；邹法取 ON 为影长，即 $l = x_c$。

旧法选择的测影点为 B，在日心射影点 N 的左边（南边），郭法选择的测影点为 M，在点 N 的右边（北边），即旧法偏左、郭法偏右、邹法适中。若 θ 与计算理论影长的太阳地平高度（考虑大气蒙气差）相等，则 $x_c = h\cot\theta$ 正是理论影长，影长表达式与系统误差如表 1。因此，邹伯奇日心观测模型是对郭守敬圭表测影理论的完善。

表 1　三种日影测量方法的影长表达式与系统误差

方法	影长表达式 1	影长表达式 2	系统误差
旧法	$h\cot(\theta+\alpha)$	$l=x_a$	x_a-x_c
邹法	$h\cot\theta$	$l=x_c$	0
郭法	$h\cot(\theta-\delta)$	$l=x_m$	x_m-x_c

不难发现，该三种影长满足关系：

$x_m=\dfrac{x_a+x_b}{2}$ ①，$x_c=\dfrac{h^2-(\sqrt{x_a^2+h^2}-x_a)(\sqrt{x_b^2+h^2}-x_b)}{\sqrt{x_a^2+h^2}-x_a+\sqrt{x_b^2+h^2}-x_b}$ ②。

因 M 为 BC 的中点，$x_m-x_a=x_b-x_m$，①式成立。又 $\theta=(\theta_1+\theta_4)/2$，故 $x_c=h\cot\theta=h/\tan\theta=h/\tan[(\theta_1+\theta_4)/2]=\dfrac{h[1-\tan(\theta_1/2)\tan(\theta_4/2)]}{\tan(\theta_1/2)+\tan(\theta_4/2)}$ ③。

又 $\tan\theta_1=h/x_a$，$\tan\theta_4=h/x_b$，用正切二倍角公式，得

$\tan(\theta_1/2)=(\sqrt{x_a^2+h^2}-x_a)/h$，$\tan(\theta_4/2)=(\sqrt{x_b^2+h^2}-x_b)/h$ ④。

将④式代入③式，即得②式。②式看似复杂，计算系统误差 x_m-x_c 也不便捷，但可清晰看到真实值并非以椭圆心为测影点。事实上，x_c 可化为 $x_c=x_m-a\tan\alpha\cot\theta$ ⑤，其中 $a=(x_b-x_a)/2$ 表示投影椭圆的半长轴。

由三角形角平分线性质，$PB:BN=PC:NC$，即 $\dfrac{h}{(x_c-x_a)\sin\theta_1}=\dfrac{h}{(x_b-x_c)\sin\theta_4}$，因此 $(x_c-x_a)\sin\theta_1=(x_b-x_c)\sin\theta_4$，变形得

$x_c=\dfrac{x_a\sin\theta_1+x_b\sin\theta_4}{\sin\theta_1+\sin\theta_4}=\dfrac{x_a\sin(\theta+\alpha)+x_b\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)+\sin(\theta-\alpha)}$，利用两角和与差的展开式，上式化为 $x_c=\dfrac{x_a+x_b}{2}+\dfrac{x_a-x_b}{2}\tan\alpha\cot\theta$，从而 $x_c=x_m-a\tan\alpha\cot\theta$，其中 $a=\dfrac{x_b-x_a}{2}$。因此，郭法的系统误差 $x_m-x_c=a\tan\alpha\cot\theta$。

3.2　日影测量误差分析的新判据

邹伯奇椭圆影心非日心模型，既是郭守敬“圭表测影”测量理论的完善化，也为日影测量的误差分析提供新的重要判据。

从定性角度看，若测量误差为零，则 $x_a<x_c<x_m$，即采用郭法的测量值应当大于理论值。文献[12]的测量数据，测量值大于理论值的占 69%，测量精度较高，测量误差较小。事实上，文献[12]的横梁中心影长，是通过取横梁上沿影长与横梁下沿影长的平均值得到的。“因为实测中光斑内的横梁影的中心位置不易读准，只能凭感觉判断，相比之下，读上下沿影长数值更加准确。”[12]

从定量角度看，记采用郭法测得影长为 $x_m^0=x_m+\varepsilon$，这里 ε 表示测量误差。此时，影长的测量值与理论值之差为 $x_m^0-x_c=x_m-x_c+\varepsilon=a\tan\alpha\cot\theta+\varepsilon$ ⑥。可见，误差分为系统误差、测量误差两部分。

从⑥式可知，在固定的测量地点，日半径角 α 不变，冬至时投射角 θ 达到最小，$\cot\theta$

达到最大值,投影椭圆的长径 $2a$ 也达到最大值,此时系统误差 $a\tan\alpha\cot\theta$ 达到最大值,夏至测量时反之。这就是“即使采用景符,测量冬至影长的误差仍远远高于测夏至时的误差”之原因。

郭法虽不完美,但取椭圆中心进行测量,实践中较易施行,但采用冬至圭表测影导致郭法的“缺陷”部分被放大,为何由夏至测影改为冬至测影,典籍中没有记载,好在横梁的使用,使测影点落在以椭圆中心为心的小邻域 $U(x_m,\varepsilon)$ 内,测量误差控制较好。

4 结 语

研究发现,约在 1844 年前后,邹伯奇采用具体实例数值与一般性算法相结合推演结论的论证方法,基于轴线不过椭圆心定理,建立椭圆影心非日心模型,订正了长期以来“椭圆影心即日心”的认知错误,并指出日心投影的正确位置,但囿于未刊行而迄今少为人知。邹伯奇这一成果,是郭守敬圭表测影理论的完善,为日影测量误差分析等提供了新视角。

致 谢 邹伯奇玄孙邹忠廉先生惠赠相关资料,内蒙古师范大学郭世荣教授、中国科学院自然科学史研究所邹大海研究员、天津师范大学高红成教授及匿名专家悉心指点,谨致谢忱!

参 考 文 献

[1] 关增建. 登封观星台与郭守敬对传统立竿侧影的改进[J]. 郑州大学学报(哲学社会科学版),1998,31(2):63-67.

[2] 高红成. 此算与彼算:圆锥曲线在清代[M]. 广州:广东人民出版社,2018:11.

[3] 邹伯奇. 邹征君遗书[M]. 广州拾芥园刻本. 清同治十二年(1873)//广州大典:第 377 册. 广州:广州出版社,2015:223.

[4] 廖运章. 邹伯奇科学论著《测量备要》新探[J]. 广州大学学报(自然科学版),2015,14(1):94.

[5] 宋濂,等,撰. 阎崇东,等,校点. 元史. 上[M]. 长沙:岳麓书社,1998:625.

[6] 允禄,何国宗,梅毂成,等. 御制历象考成[M]//文渊阁四库全书:子部第 790 册. 台北:台湾商务印书馆,1983:261-263.

[7] 韩琦. 科学、知识与权力——日影观测与康熙在历法改革中的作用[J]. 自然科学史研究,2011,30(1):1-18.

[8] 陈遵妫. 中国天文学史. 下[M]. 上海:上海人民出版社,2006:1230.

[9] 允祹. 钦定大清会典:卷 84—86[M]. 钦定四库全书:史部第 13 册. 22-24.

[10] 邹伯奇. 测量备要[R]. 书稿转抄本 B1 本(抄本存于广州博物馆),1954:31、38.

[11] 陈美东. 郭守敬等人晷影测量结果的分析[J]. 天文学报,1982,23(3):299-305.

[12] 肖尧,孙小淳. 郭守敬圭表测影推算冬至时刻的模拟测量研究[J]. 中国科技史杂志,2016,37(4):397-412.

[13] 崔石竹,李东生. 仿古测影探索[J]. 自然科学史研究,1987,6(4):332-341.

[14] 王玉民. 冬至圭表测影新探[J]. 中国科技史杂志,2013,34(4):453-459.

[15] 王维. 百科全书式的学者邹伯奇[M]. 广州:广东人民出版社,2007:1-26.

[16] 李迪,白尚恕. 我国近代科学先驱邹伯奇[J]. 自然科学史研究,1984,3(4):378-390.

[17] 陈澧. 东塾集六卷 附申范一卷[M]. 菊坡精舍刻本. 清光绪十八年(1892)//广州大典:第 56 辑集部别集类第

46 册. 广州：广州出版社,2015：759.
[18] 广东省南海市政协文史和学习委员会等. 近代科技先驱——邹伯奇[G]. 南海文史资料：第 35 辑,2002：71.
[19] 杨泽忠. 明末清初西方椭圆知识在我国的传播[J]. 数学教学,2004(4)：47-49.
[20] 曲安京. 中国数理天文学[M]. 北京：科学出版社,2008：233-234.
[21] 郭盛炽,全和钧,张家泰,等. 古观星台测景结果精度初析[J]. 自然科学史研究,1983,2(2)：139-144.

A Mathematical Interpretation of Zou Boqi's Assertion on Solar Shadow Measurement that "The Center of the Projection Ellipse is Not the Shadow of the Sun's Center"

LIAO Yunzhang[1], LI Jiemin [2]

(1. *School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou* 510006, *China;*
2. *School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang* 524048, *China*)

Abstract During the Yuan dynasty, Guo Shoujing (郭守敬) greatly improved gnomon shadow measurement. One of the improvements he made was measuring the projection of the beam instead of the top of the gnomon. For a long time, people then mistakenly thought that the center of the projected ellipse was the shadow of the Sun's center. What is not previously known is that around 1844 Zou Boqi (邹伯奇) pointed out this mistake and the correct position of the shadow of the Sun's center. In this paper, through a study of the contents concerning "the center of the projected ellipse is not the shadow of the Sun's center", Zou's research conclusion is refined as follows: the measuring location of the "old method" is on the left, and "Gou Shoujing's method" is on the right, "Zou Boqi's method" pursues the real position; in addition, we have derived the mathematical formula of the length of the sundial shadow; and finally the application of Zou's research conclusion on the error analysis of solar shadow measurement is given. All in all, Zou's work is not only the theoretical perfection of Guo Shoujing's work on gnomon shadow measurement, but also provided a new important criterion for error analysis in the study of solar shadow measurement. His work is thus of great significance to the study of gnomon shadow measurement.

Keywords Zou Boqi (邹伯奇); solar shadow measurement; center of the projection ellipse is not the shadow of the sun's center; mathematical interpretation.