

战国楚王铜衡功能蠡测

——兼论《鲁久次问数于陈起》中的“以物起之”

周博群[✉]

(香港大学 中文学院, 香港 999077)

摘要 中国国家博物馆藏有两件带有“王”字刻文的战国楚铜衡杆。由于衡杆上带有刻度,学界通常认为两器标志着由天平向杆秤发展的中间阶段,是一种过渡型的衡器。至于铜衡的具体用法,目前的认识还比较模糊,并且存在共时和历时两个方面的疑点。本文试图结合简牍数学资料对此提出新的假说,即它们并不依赖单位砝码重量的叠加,而是用于单位重量的分割,即出土算数书中所谓的“毁”或者“破”。这一功能可能有两种具体的应用方式,一是用于确立或者检验砝码的重量,二是在最小单位砝码依然精度不足的情况下,进行更加精确的测量。在此基础上,本文还将重新思考北大秦简《鲁久次问数于陈起》篇中的“以物起之”一句,认为其所讨论的对象是度量衡与分数的关系。

关键词 王铜衡;楚砝码;度量衡;鲁久次问数于陈起

中图分类号 N092

文献标识码 A

文章编号 1000-0224(2024)04-0404-14

中国国家博物馆藏有两件带有“王”字刻文的战国楚铜衡杆(以下简称“王铜衡”)。由于衡杆上带有刻度,学界通常认为两器标志着由天平向杆秤发展的中间阶段,是一种过渡型的衡器,刘东瑞非常形象地比喻为“带尾的幼蛙”^[1],孙机也持相同看法^[2]。

至于铜衡的具体功能,目前的认识还比较模糊,并且存在一些疑点。迄今为止的研究几乎都认为王铜衡在称量时依赖砝码的叠加来计算被测物体的重量,与楚墓中出土的其他无刻度天平无异。然而无刻度天平横杆配备的成套砝码已经可以组合出较大范围内的所有整数数值,计算也只需要简单的加法,完全能够满足实测的需求。在这一技术背景下,王铜衡的称量方式不仅多余,而且更加繁琐,缺乏存在的合理性。本文试图结合简牍数学资料对这一问题提出新的假说,认为王铜衡的功能并不依赖单位重量的叠加,而是用于单位重量的分割,也即出土算数书中所谓的“毁”或“破”。这一功能可能有两种具体的应用方式,一是用于确立或者检验砝码的重量,二是在最小单位砝码依然精度不足的情况下,进行更加精确的测量。在此基础上,本文还将重新思考北大秦简《鲁久次问数于陈起》篇中的“以物起之”一句,认为其所讨论的对象是度量衡与分数的关系。

收稿日期: 2024-06-11; 修回日期: 2024-10-14。

作者简介: 周博群,1986年生,江苏南京人,助理教授,主要从事思想史与科技史研究,Email: zhouboq@hku.hk。

1 楚王铜衡的功能

现存两件王铜衡在形制上有两点值得注意,在分析其功能之前需要稍作讨论。第一,铜衡的尺寸几乎完全一致,而且长度正好等于战国中晚期铜尺的长度,其十等分刻度中的每分相当于一寸。([3],2 页)丘光明已经敏锐地观察到,衡杆本身很可能就是直接利用铜尺制成的:“可以设想制作者是受到尺度的启发,也可能最初就是用尺作代用品,后来才逐步制成专用的衡秤。”([3],83 页)与此相较,楚墓中的无刻度天平则通常没有固定长度,因其称重时不涉及力臂的计算,只需要两边等长即可。第二,两件衡杆的测量精度不同。衡杆甲只有十等分刻线,而衡杆乙除中间两寸外,其余每半寸都有刻线(图 1)。我们可以将甲衡视为脱胎于铜尺的标准器,而乙衡则是为了满足更加精细测量的需要在甲衡基础上制造而来。

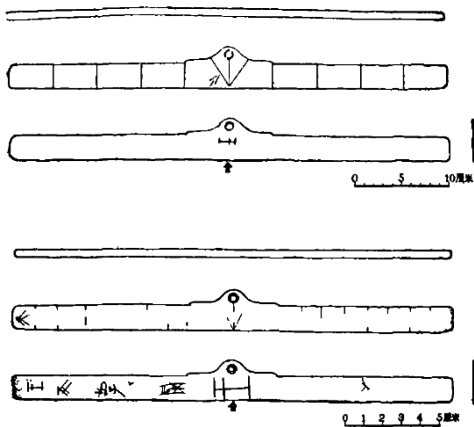


图 1 刘东瑞所绘不等臂王铜衡(上图:甲衡;下图:乙衡)

最早讨论王铜衡功能的刘东瑞,将铜衡的使用方法区分为特殊和一般两种情况。特殊情况与普通无刻度等臂天平无异,而一般情况则是砝码与重物距离衡杆中央刻度不等的天平:

这种横梁配备一个适当重量的权,可以构成一具不等臂衡秤。使用时,物和权分别悬挂在两臂,找得一定的悬挂位置使之衡平,如图四(引者注:即本文图 2)所示。在特定情况下,物和权的悬挂位置距离横梁中心刻度相等,衡秤的作用等于天平,权的标重等于物重。在一般情况下,二者距离不等,从悬挂位置的刻度和权的标重,可以计算出所称物的重量。([1],74 页)

刘先生所谓的特殊情况是不需要考虑的,因为等臂天平上的刻度没有任何作用,而且操作中由于物和权都可以移动,反而比无刻度的等臂天平更容易产生误差。至于一般情况下的用法,丘光明进一步将其解析为一端刻度固定和两端刻度皆不定的两种方式:

关于这种衡秤的使用,我们作了两种设想。其一是将被称物挂在左边距悬纽一寸的刻线处,选用已知量的砝码挂在悬纽的右边,移动砝码使衡杆保持平稳,以悬纽

下的中心线为零点,将砝码所挂刻度在线标定的数字乘已知砝码的重量,得到被称物的重量。例如所选用的砝码是一斤,放在第二格上就可以读出二斤,以此类推,计算起来十分简便。衡杆乙在半寸处又加刻线,说明它比衡杆甲读数精度提高了,可以直接读出半斤。其二是被称物放在悬纽左边任意一根刻在线时,那么就需要将右边所读的数(衡杆刻度在线标定的数字和砝码的乘积)被左边的读数除,方可得到被称物的重量。([4],83 页)

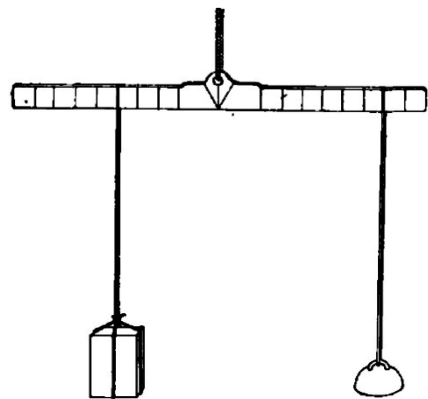


图 2 刘东瑞所绘铜衡称重示意图

相比之下,一端刻度固定的用法更加便捷,可以直接读出被测物体的重量,已经接近于后世杆秤的功能。然而丘先生随即提到了这种用法的缺陷:

当然,这种衡秤使用起来还有许多缺点,如果被称物的重量不能以整数标示,铢、两的换算就比较麻烦。衡杆上的刻度粗疏,读数误差也比较大。([4],83 页)

如果我们结合甲衡的刻度来考察,这种缺陷几乎是致命的,若将一斤重物悬挂于左边一寸处,那么甲衡只能测量 2 斤、3 斤和 4 斤的物体(末端的刻度由于无法进行悬挂,应当排除)。乙衡的可测数值稍有扩大,但依然远远达不到要求,很难想象这种测量范围只有寥寥几个数值的天平在实测中能发挥什么作用。

如果进一步考虑王铜衡的同时代技术语境,这一问题就变得更加明显。楚墓中的无刻度天平衡杆虽然长度不一,但通常在 20—30 厘米。^[5]如果王铜衡也用于普通的称重,就应当与这些天平的应用范围大体一致。然而与等臂天平配合使用的成套砝码已经可以合成出特定范围内的任何一个整数。由于已出土的楚砝码所表现出来的衡制较为复杂,其中尚有不清楚的地方,所以姑且先以著名的十件套“均益”砝码为例。([3],107 页)这组砝码 1954 年出土于长沙近郊,其中第九枚上刻有“均益”二字,故以此命名。与楚墓出土的其他砝码相比,均益砝码保存最为完整,而且各砝码之间的倍数关系规则,可以直接与古重单位相比较,因此常常被视为楚砝码的标准器。其数值如表 1 所示:

表 1 “均益”砝码数值

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
古重	铢					两				斤
	1	2	3	6	12	1	2	4	8	1

续表1

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
今重	克									
	0.69	1.3	1.9	3.9	8.0	15.5	30.3	61.6	124.4	251.3

这样完整的一套砝码包含从 1 铢到 1 斤的若干重量等级,其总重为 2 斤,也即均益砝码的称量范围上限。根据后德俊和武家璧的研究,其砝码数值的选择是经过精心设计的,符合“少用砝码多称重”的原则,也即在某一总重量范围内,用最少的砝码就可以按某一单位由小到大逐个称出所有的整数值而没有空缺。^[6-7]武先生列出了铢一级重量数值的砝码组合,我们在此基础上将两一级重量数值的砝码组合补全(表 2)。

表 2 “均益”砝码测量范围

铢级		两级	
重量数值	砝码组合	重量数值	砝码组合
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	2+1
4	3+1	4	4
5	3+2	5	4+1
6	6	6	4+2
7	6+1	7	4+2+1
8	6+2	8	8
9	6+3	9	8+1
10	6+3+1	10	8+2
11	6+3+2	11	8+2+1
12	12	12	8+4
13	12+1	13	8+4+1
14	12+2	14	8+4+2
15	12+3	15	8+4+2+1
16	12+3+1		
17	12+3+2		
18	12+6		
19	12+6+1		
20	12+6+2		
21	12+6+3		
22	12+6+3+1		
23	12+6+3+2		

1 斤至 2 斤的范围可依此类推。这套砝码的重量配置同时具有经济性和完备性,而且甚至不需要重复使用同一个砝码。由此可见,无刻度等臂天平已经能够满足实际测量的全部需求,而相比之下王铜衡的称重方法可谓毫无用武之地。

这种疑问不仅存在于共时的技术语境中,也存在于历时的技术发展过程中。如果王铜衡是介于无刻度等臂天平和杆秤之间的过渡型衡器,那么其出现的时间点和频率令人十分不解。根据目前学界的一般看法,杆秤的出现不会早于东汉晚期。如果战国时期已经初现端倪,为什么迟至东汉才得到运用?郭正忠就提出了这样的疑问:

不过,尚有一点,令人百思不得其解:即战国时代即使已具备试作杆秤的思想与实践条件,何以真正的杆秤,还需等到四、五百年之后才问世行用呢?([8],68 页)也就是说,我们无法还原出从战国至东汉的技术演变序列。如果能发现一些西汉时期的有刻度不等臂天平,整个过程就会合理很多,但现在只有战国时期的两例孤证。必须强调的是,与共时的问题相比,历时的问题只能作为一个辅助性的参考,未必是一个需要解释的现象,因为这一空白完全可能是考古发现的偶然性造成的。正如一句英文谚语所说,“证据的缺失并非缺失的证据”(Absence of evidence is not evidence of absence),不能排除将来会有相关器物出土的可能性。最主要的问题还是王铜衡在同时代的称重技术背景下缺乏存在的理由。无论如何,其功能还需进一步研究。

为了解决以上问题,我们需要区分两种不同类型的称重。第一种即是上述学者默认的方式,通过砝码的叠加计算出被测物体的重量,可以称为“叠加式称重”。另一种似乎目前还未见有学者讨论过,即给定某一单位重量,需要对其进行成比例的分割,可以称为“分割式称重”。楚简的记数方式很直观地表现出两者的差异。根据李天虹对严仓一号楚墓遣册的研究,当所记数字不满整数时,对分数部分的记载既可以换用下一级的度量单位(如“寻二尺四寸”),也可以使用同级度量单位+分数词的形式(如“九寸三镒寸”)^[9]。两者正好分别对应了叠加式和分割式两种不同的记数方法。分割式的称重之所以必要,是因为重量是比长度和容积更加抽象的量,难以直接分割。假设现在有一给定长度的木头,需要将其二等分,我们只需要截取相同长度的绳子对折,然后量出中点的位置即可。但如果换成一个给定重量的物体,其等分就可以借助王铜衡这样的器物。若将已知重物悬挂在左端第一刻度处,这样右端第二刻度能够实现平衡之重量即其二分之一,第三刻度能够实现平衡之重量即其三分之一,等等。也就是说,在上述丘光明先生一端固定刻度的用法中,已知重量和待求重量的位置正好应该反过来:离中点较近的是已知重量,离中点较远的反而是待求重量(图 3)。

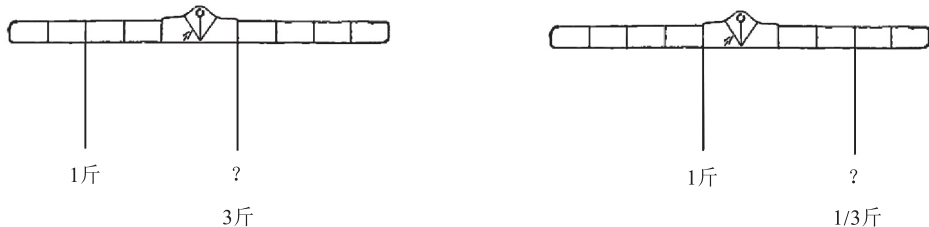


图 3 两种称重方式

两者的区别在于我们考虑的究竟是倍数计算还是分数计算。丘先生考虑的是倍数计算,所以近端未知;而这里所说的分割式称重是一种分数计算,所以远程未知。倍数计算完全可以被成套砝码的加法计算所取代,但是分数计算却需要依赖刻度天平。

如果将王铜衡的功能定义为分割式称重,那么数值的稀少的问题就迎刃而解,因为根据现有考古证据来看,对单位重量的分割只需要用到 $1/2$ 、 $1/3$ 和 $1/4$ 这三个分数值。我们可以从如下几个方面来理解这三个分数的特殊性。首先,三者分别获得了汉字的专有名称“半”、“锤”、“鎰”,其含义已经由刘刚、李学勤和李天虹等学者证明。^[10-12] 其次,甲衡上可以计算的比例,如果排除无法悬挂的末端刻度以及比值相等的一共有五个: $1:2$ 、 $1:3$ 、 $1:4$ 、 $2:3$ 、 $3:4$ 。其中 $2:3$ 、 $3:4$ 两者尽管理论上存在,但是根据现有证据来看似乎极少运用到实践中(目前仅有一个 $2:3$ 的例子,详见下文)。前三个分数则构成了王铜衡最主要的计算对象,正好对应“半”、“锤”、“鎰”,如图4所示:

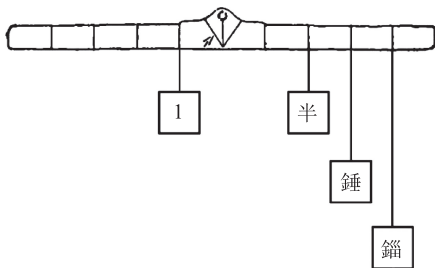


图4 王铜衡可计算的分数比例

第三,铢、两、斤/鎰这三个单位层级间的进制分别是24和16,都以2、3为因子。^① 如果现有1斤的标准砝码,那么我们只需要用王铜衡对之反复进行二分或三分,就很容易求出一整套砝码中另外9个的重量。至于铜衡上的四分,在数学上通过两次二分也可以得到,因此在建立砝码标准时不是必须的。但是由于可以减少操作步骤,在实用中也有其价值。如果王铜衡的目的是重量的分数计算,就很容易解释为什么重量单位的进制在长度、容量早已变成十进制之后依然保持自身的特殊性。有几位学者已经注意到重量单位的特殊进制是为了便于分割,但主要是从几何分割的角度去讨论的。^[14-16] 如果是几何分割,就需要先将金属铸造成非常标准的形状,然后对其进行等分切割,再将切割后的金属铸造成环权的形状,对工艺的要求非常之高,相比之下铜衡分重显然更加直接简便。^② 在这种情况下,甲衡极为有限的计算能力并不是用来测量物体的实际重量,而是用来制造或者检验作为测量标准之砝码。借用古代数学表达分数的语言来说,甲衡并不用于称量待测重物之“实”,而是用于建立标准重物之“法”。

上述推测有一个重要前提,即战国时期砝码的制造过程是先确立1斤/鎰砝码的重量作为标准,然后逐步分割为更小的单位。如果是先确立1铢的砝码,然后叠加为更大的单

① 根据熊长云最新研究,楚国衡制可能包含多种不同的进制,较为复杂。但熊先生给出的所有进制数据都以2和3为因子。^[13]

② 本文想要论证的是王铜衡一定是用于分割式称重,但并不是说分割式称重都一定得用王铜衡。原则上说,几何分割当然也是可能存在的,只是操作起来更麻烦罢了。

位,那就不必利用不等臂天平来计算了。这一前提不太容易直接证明,但有至少三个方面的间接证据。其一是古人在确立单位数量标准的时候,往往选择将单位体积或容量的某物转化成“石”、“斤”之类的较大单位,比较著名的有《汉书·食货志》的“黄金方寸,而重一斤”和岳麓秦简《数》的“水十五斗重一石”。([17],141-143 页)哪怕是《汉书·律历志》的“一龠容千二百黍,重十二铢,两之为两”这种具有理想化色彩的学说,也是“半两”一级的单位,依然要涉及单位重量的分割。其二来自熊长云对秦一斤权的研究。熊先生发现在所有现存秦权中,一斤权的颁行规模最大,而且制作通常更加精密,这说明一斤权在整个衡制系统中应当是具有基础性质的标准器。而且“斤”处于五大重量单位的正中,在实践层面的运用最为广泛,铭文、简牍中都有大量记载。^[18]如果这一推测不误,那么楚国砝码系统的建立过程很可能也是先将中间级的单位定为标准量,然后逐步向上方和下方的层级扩展。其三是湖北荆州黄山墓地 40 号战国楚墓出土的一套 4 件的铜环砝码,上有“半两”、“才(镒)两”的自重标记。^[19]按理说砝码的重量用 12 铢、6 铢来标记会更加方便计算,但是这里却选用了分割式的表述,似乎正说明了砝码是通过分割式称重制造的。与此类似的还有出于洛阳金村的“甘孝子”记重银器,根据董珊的考察,其铭文以“两”为最小单位,然后以 $1/2$ 、 $1/4$ 、 $1/8$ 的比例不断分割下去,最小一直分到了 $1/64$ 。([20],166-167 页)这些数据如果都有对应的砝码,那么其记重方式应当与黄山铜权差不多。

除了确立砝码重量标准外,王铜衡在实物称量中也许还有一种类似的用途,即在最小单位砝码不够用的情况下提高测量精度,特别是当被测物品较轻但价值很高的时候。楚天平用于称量的黄金货币即属于此类,一旦需要比最小单位 1 铢更加精细的数值,就可以使用刻度天平来计算。战国时期在称量黄金的时候往往会涉及到铢的分数值,比如睡虎地秦简《效律》就规定“黄金衡累不正,半铢[以]上,贲各一盾”。^[21]燕下都辛庄头战国墓出土的一批赵国金饰件,其自重标记也使用到了铢的分数:

□其重四两十八铢半铢(《集成》19627)

四两十九铢三分(《集成》19630)

四两十四铢半铢(《集成》19631)

四两十六铢四分之一(《集成》19632)

二两廿三铢四分铢一(《集成》19633)^[22]

巧的是这批记重数据涵盖的分数值恰好是 $1/2$ 、 $1/3$ 和 $1/4$,完全可以通过甲衡配以均益砝码测出。以“四两十九铢三分”为例,这个数据折合成铢是 $115\frac{1}{3}$,将分数部分化整,乘以 3 就变成 346 铢,合 14 两 10 铢,换成砝码即 8+4+2 两和 6+3+1 铢。只要将这 6 个砝码放在左端第一刻度处,右端第三刻度处的重量即是所求,如图 5 所示:

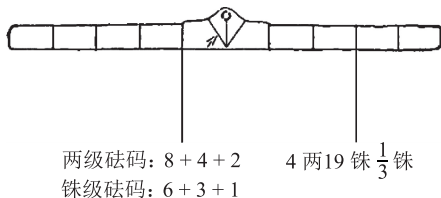


图 5 王铜衡计算实例

同批材料中还有一个“八分铢”的数据,但仅有一例,而且依然只有 2 的因子。^[23]除燕下都金饰件之外,还有一些零散的出土记重数据涉及最小单位的分数值,比如郢陵君豆上的“重三铢二锤铢四□”(《集成》6161)以及内蒙古准格尔旗西沟畔战国金牌饰上的“一斤五两四铢少半”(《集成》19634)等,其数据都不超出上述范围。铢的分数值与斤、两的分数值不同,因为后者还可以转换成铢的叠加,但是前者已经没有更小一级的单位,因此很可能是通过比例计算得到的。值得一提的是,在考察重量标记时我们应当排除两类数字,一是楚铜贝上的“𡗗(锤)铢”,虽然也是铢的分数值,但主要是表示抽象的购买力而非实重记录,这点已经由吴良宝指出([24],136-137 页);二是数学文献例题中各式各样比较复杂的铢分数,这些主要是作为理论上的计算结果出现,也应当与实测得出的结果区别开来。

但这里还存在一种可能性,就是存在着专门用于精确测量的比 1 铢更轻的小砝码,尽管目前尚未发现此类实物。董珊在谈及燕下都金饰件“八分铢”的数据时,就认为存在着与此重量相应的小单位砝码。([20],71 页)当然原则上我们不能排除存在小砝码的可能性,但是即便如此也不影响这里的结论。因为如果是通过小砝码进行叠加式称重,那么这些小砝码只能通过分割铢一级的重量来制造,相当于把分割式称重的操作由实重测量转移到了法重制造上。不过我还是很怀疑是否真的存在 $1/8$ 铢重的小砝码,因为 $1/8$ 铢的小砝码实在太轻,如董先生所言只有大约 0.0872 克左右。在实测中无论制造还是使用这么轻的砝码都是极为困难的,哪怕是细微的干扰都会造成极大的误差,用比例计算的方法反而更加有效。当然, $1/8$ 铢的数据在铜衡上也无法直接计算,因此比 1 铢更轻的砝码还是有可能存在的。比如说,使用 $1/2$ 铢的砝码,然后通过铜衡进行四分的计算就可以得到 $1/8$ 铢。 $1/2$ 铢的砝码重量大约为 0.325g,不算轻得太夸张,在古代技术条件下还是有可能制造的。另外一个原因是如果有 $1/8$ 铢重的砝码,那么按理说我们应当能够发现许多诸如“ $3/8$ 铢”这样的叠加式重量数据才对。但是以上例子中铢的分数值分子基本都是 1,或者直接采用“三分”、“八分”之类的表述。唯一的例外是郢陵君豆上的“二锤铢”(即 $2/3$ 铢)并不以 1 为分子,但有趣的是这个数据也是可以在王铜衡上通过 $3:2$ 的比例来计算的,并不是必须通过小砝码来完成。

如果王铜衡的用法理解为分割式称重,就能够帮我们解决另一个耐人寻味的问题,即乙衡上额外的半寸刻线。关于这些刻线的意义,前人并没有特别探讨,只有丘光明提到可能用于提高读数的精度。然而奇怪之处在于,靠近中点的两寸是没有刻线的,这样一来就产生了两个问题。第一,如果单纯是提高测量精度,那么为何中间的两寸要留白?如果刻满岂不是精度更高?第二,留白使得铜衡只是增加了诸如 $2:5$ 、 $2:7$ 、 $3:5$ 、 $3:7$ 、 $5:9$ 之类的奇怪比例。我们既找不到能够运用这些比例的实测数据,也难以想象增加这些比例的意义在哪儿。我认为这里存在一个非常巧妙的解释,即新增加的刻线目的是为了在称重时进行四舍五入的操作。现实中物体的重量是千变万化的,不可能都是整数值,也不可能正好都是 $1/2$ 、 $1/3$ 和 $1/4$ 。也就是说,平衡状态下物体悬挂的位置一般不会直接落在铜衡刻度上,而往往会在两个刻度之间。此时,一方面古人可以通过增加刻线获得更精确的读数,另一方面可以以四舍五入的方式看悬挂位置更加靠近哪一边的刻线就取其值。前一种方式当然更精确,但是后一种方式更加符合实践需求,因为古人只需要获得法律规

定范围内的精确度就可以了。不然的话,即使增加了刻线,还是无法穷尽无限可能的重量数值,依然需要四舍五入。鉴于考古发现的分数重量资料基本都是 $1/2$ 、 $1/3$ 和 $1/4$,我认为半寸刻线的意义不是为了提供新的读数,而是为了将读数更精确地“化整”为 $1/2$ 、 $1/3$ 、 $1/4$ 和 $2/3$ 这几个核心数值,这样一来中间两寸就正好不需要刻线了。半寸刻线可以让四舍五入的判断标准更加清晰。如果没有刻线作为参考,就只能凭感觉目测悬挂位置更加靠近哪一边。如果恰好接近半寸处,就会很难判断。

以上给出的两种具体用法虽然一针对“法”一针对“实”,但在数学上是等价的,而且大部分情况下只需要用到半、锤、锱三个数值。即便我们给出的具体用法不一定每种都成立,但分割式称重的操作肯定是不可或缺的。砝码只能提供离散的量(无论分数还是整数),而铜衡通过将重量关系转化为长度关系提供连续的量,然后通过四舍五入的方法取到符合社会生活需求的分数值。如果将王铜衡的功能定义为分割式称重,就与普通等臂天平的叠加式称重恰好构成了互补关系,而不是前后相接的两个阶段。

2 《鲁久次问数于陈起》中的“以物起之”

王铜衡的分割式称重功能,在出土算数书中有两个相对应的术语,即“破”与“毁”,两者都与单位量的分割有关。在北大秦简《算书甲种》第一部分的《鲁久次问数于陈起》(下文简称“《陈起》”)篇中,有一段提到“命而毁之……以物起之”的话,与铜衡的功能尤足以互相发明。已经有许多学者对此简文做出了有益的探讨,但还有不清楚的地方,我们在前人研究的基础上稍做一点分析。先用宽式释文将整段原文列出:

凡古为数者,何其知之发也?数与度交相彻也。民而不知度数,譬犹天之毋日月也。天若毋日月,毋以知明晦。民若不知度数,无以知百事经纪。故夫数者必颁而改,数而不颁,毋以知百事之患。故夫学者必前其难而后其易,其知乃益。故曰:命而毁之,锱而锤之,半而倍之,以物起之。([25], 751-752 页)

《陈起》篇刚发表的时候,对“命而毁之”句的解释可谓众说纷纭。^[26-27]随着新材料的公布,其中一些问题逐渐得到了解决。比如“命而毁之”,如邹大海所说指的是将较大重量用下一级单位去化开,也可称为“破”。([27], 259 页)这一用法又见于张家山汉简《算数书》和睡虎地汉简《算术》中的“有斗、升、斤、两、铢者亦皆破其上,令下从之以法”([29], 73 页; [30], 75-76 页),以及北大秦简《算书乙种》中反复出现的“尽毁以为铢”或“尽毁以为寸”([25], 834 页)。“锱而锤之,半而倍之”,前三项如蒋伟男所说指的是四分、三分、二分的操作。([28], 183 页)至于“倍之”,指的是在“破”或者“毁”的过程中,将分数转化为下一级单位的整数需要进行乘法操作。例如将 1 两破开,如果用分数表示就是 $1/24$,但是如果换算成铢则是 24。前者属于“半之”的范畴,后者属于“倍之”的范畴,两者都是“命而毁之”的过程中必然涉及的。除此之外,“倍之”也发挥了一定的修辞功能,一方面可以保持这一段话工整的四字句式,另一方面也能够和下面的“起”压之部韵。

唯一尚不确定的就是“以物起之”的含义。整理者韩巍将这句话视为《算书甲种》后文例题的概括,认为“以物起之”指通过具体例题来启发关于数的知识。([25], 753 页;

[26],34 页)纪志刚则认为“物”指的是《陈起》篇中列举的与国计民生相关的具体事务。([27],253 页)邹大海认为“以物起之”指的是“数量标准的设置要根据事物的具体情况进行”,整段话的主题是度量衡的标准与测得数据成反比关系。([27],260 页)我的观点与邹先生最为接近,也将这句话的主题理解为与度量衡相关。但我认为这里的“物”指的是度量衡的器具,“起”应该训为“立”,而最后一个“之”指代的是这一整段话的主题“度数”。“起之”实际上就是《陈起》前文所说的“临官莅政,立度兴事”中的“立度”。古书中常见“起数”或“立度”的说法,如下诸例:

权衡者,所以起轻重之数也。(《管子·明法解》)

扁鹊虽言若是,然必审诊,起度量,立规矩,称权衡,合色脉表里有余不足顺逆之法,参其人动静与息相应,乃可以论。(《史记·扁鹊仓公列传》)

夫圣人之起度数,必应于天地。(《素问·离合真邪》)

这里最重要的是《管子·明法解》的文例,几乎可以跟《陈起》篇完全对应。“以物起之”,就是说“命而毁之,锱而锤之,半而倍之”这一系列建立度数的操作,是通过度量衡的器具实现的。如果我们回想一下王铜衡的分割式称重在建立砝码数值时发挥的作用,就会发现《陈起》篇的这句话几乎是在描述铜衡的功能。铜衡即是“物”,用此器物可以对标准单位一斤权进行“锱”、“锤”、“半”的分割,以此得出下一级单位砝码的重量数值,这就是“命而毁之”。这一理解与邹先生最大的不同在于我将“物”理解为测量器具,而邹先生理解为待测事物。鉴于两者都能讲通,本文的解释姑备一说,以供参考。

如果我们将“以物起之”理解成“通过度量衡器具建立度数”,上文引用的《陈起》篇中那一整段话的意思就比较清楚了。从“凡古为数者”到“以物起之”的内容是一个语意连贯的意群,其主题正是文中所说的“数与度交相彻”。邹大海先生将“度”理解为数量单位是非常精辟的。([27],260 页)数量单位的功能在于可以让数字普遍运用于不可数的对象。现实中的对象并非都是直接可数的,诸如手指、苹果这样可以直接运用数字的离散对象只占一小部分。绝大多数情况下,我们面对的都是诸如长度、面积、重量这样无法直接应用数字的连续对象。若要对之进行量化,就必须先设定数量单位作为标准,这就是陈起所谓的“度”。所谓“数与度交相彻”,指的是数必须经由这些“度”才能应用于现实,而“度”本身也是数。以地积单位“亩”为例,只有先给出一亩的面积,我们才能用它去分割任意面积的土地并得出一个亩数,而亩的面积本身也是一个数量。测量本质上就是数与度的交织,是一个给定标准量和另一个未知待测量之间的关系。两者分别相当于分数表达中的“法”与“实”。如郭书春所言,分数的概念正是由测量产生。^[31]由于实测中未知待测量通常不是已知标准量的整数倍,于是就产生了“不盈法者,以法命之”。在纯抽象的数学计算中,这一结果用分数表示就可以了,但在测量中,往往通过转化为下一级单位来表示,于是就形成了不同层级的单位体系。类似的表达在出土算数书中屡见,比如岳麓秦简《数》中的“食功之术”和“租泉术”:

凡食功之术曰:以人数为法,以食功丈数为实,实如法得一丈。不盈丈者,[因而十之,如法,人一尺;不盈尺者,因]而十之,如法,人得一寸;不盈寸者,以分命之。([17],84 页)

租泉术曰:置畝田数,大泉也五之,中泉也六之,细泉也七之,以高乘之为实,左置

十五,以一束步数乘十五为法,如法一两,不盈两者,以一为廿四,乘之,如法[一铢,不盈]铢者,以法命分。([17],53 页)

这两段话描述的正是“命而毁之”的过程,整个过程贯穿着数字与单位的反复交织运算,也体现了“度数交彻”的特点。需要注意的是,第一段话中“寸”之后一级的“分”语义比较模糊,因为《汉书·律历志》有“度者,分、寸、尺、丈、引也”以及“十分为寸”的说法,是把分作为寸的下一级单位来理解的。尽管“分”作为长度单位的起源可能很早,但岳麓秦简《数》却是将“分”视为分数表达而非下一级单位,这点从下面一条以长度标记体积的记载可以看出:

……[稻粟]三尺二寸五分寸二一石。([17],73 页)

这里的长度数据是“三尺二寸五分寸二”而不是“三尺二寸四分”,用的是分割式表述而非叠加式表述。也就是说,《数》中的“寸”已经是最小单位,再细分就只能使用分数表达,和上文提到的“四分铢一”同理。第二段话结尾的“不盈铢者,以法命分”也佐证了第一段的“分”不是长度单位而是分数,因为铢已经是最下一级单位,只能使用分割式表述

除了上述单位拆分的例子,“度数交彻”还见于对分数乘法的表述中。出土算数书中屡见一类涉及单位转换的乘法运算规则,颇为奇特。我们以张家山汉简《算数书》的版本为例,比较这类表述与一般分数乘法的区别:

寸而乘寸,寸也;乘尺,十分尺一也;乘十尺,一尺也;乘百尺,十尺也;乘千尺,百尺也。半寸乘尺,廿分尺一也。([29],37 页)

一半乘一,半也;乘半,四分一也。三分而乘一,三分一也;乘半,六分一也;乘三分,九分一也。([29],38 页)

后一条分数乘法的表述比较接近现代数学的习惯,只考虑数字本身而不考虑单位。而前一条则非常能代表中国古代数学“度数交彻”的特征,分数乘法本身就将单位的换算包含在内。实际上,出土算数书中有大量数字与单位交叉运算的例子,以上所讨论的只是凤毛麟角。究其原因,大概是古代数学与现实测量结合异常紧密,并不是一种纯抽象的理论研究,因此单位度量是内在于数学运算的。

在“数与度交相彻”之后,陈起马上提出了一个非常重要的类比:“民而不知度数,譬犹天之毋日月也。天若毋日月,毋以知明晦。民若不知度数,无以知百事经纪。”刘未沫将这一类比与度量衡联系起来,并指出无论度数还是日都具有沟通自然领域与政治领域的功能。([32],41 页)日月本质上是用于测量天和时间的基础单位,让数字得以运用于不可数的天和时间。如果没有日月,天和时间的存在,无法进行量化的分割。不仅如此,战国时期已经发展出了四分历,其数据计算同样包含“不盈法者,以法命分”的情况,即用“日”这一单位去测量“岁”的时候,会出现不满一日的分数。除了自然事物,“日”在人类事物中也具有基础单位的属性。《陈起》篇本身就提出“一日之役必先知食数,一日之行必先知里数,一日之田必先知亩数,此皆数之始也。”这里的“始”和陈起后面说的“凡古为数者,何其知之发也”的“发”应该是呼应的,都表示数字通过日这样的单位才能开始用于现实。秦汉简牍中对劳动力的测量和规划往往以日为单位进行,特别是以“功”和“劳”为单位的功次文书,都通过年月日的时间来标记。^[33-34]在这些制度中,日跟铜尺和砝码一样扮演了度量单位的角色,可以为功劳、里程等对象赋予数字。只不过,日

一方面是更抽象的单位而非某种器物,另一方面是自然而不是人造的单位。陈起赋予日如此重要的地位,恐怕正是为了强调度量单位的来源具有天和自然的权威性,并非人为随意规定,但同时又可以人类社会提供秩序。根据以上分析,可以将《陈起》篇“数与度交相彻”这段话的意思大致总结如下。首先“凡古为数者,何其知之发也?”中的“发”应当理解为“发端”,针对的是数学知识如何能够开始广泛运用于现实的问题,也即陈起的核心观点“天下之物,无不用数者”。陈起给出的答案是“度数交彻”的度量衡方法,然后使用日月的类比去解释度量衡在凿破浑沌、分割不可数对象时不可或缺的作用。度量衡的使用必然要带来“不满法”的分数计算,于是陈起接下来指出“命而毁之,镕而锤之,半而倍之”的分割式操作都是由于度量衡器具的使用才成立的。整段话都围绕“度”与“数”的关系展开,是陈起的数学知识普遍性理论的一个必要环节。

3 结 语

本文将王铜衡的功能定义为分割式称重,并提出了两种可能的具体用法:一是制造或者检验作为标准重量的砝码,二是在最小单位铢不够精确的情况下进行铢的分数计算。如果此说不误,那么王铜衡极为有限的计算能力不仅不是多余的,甚至是不可或缺的。这一结论还有助于解释重量单位进制的特殊性,以及记重金器上铢的分数值来源。最后,王铜衡的功能为理解北大秦简《鲁久次问数于陈起》中的“以物起之”提供了线索,其含义应当是通过度量衡器具去建立度数,并在此过程中产生了分割单位量的分数计算。

致 谢 本文经由匿名审稿专家及邹大海先生提出宝贵意见。谨致谢忱。

参 考 文 献

- [1] 刘东瑞. 谈战国时期的不等臂“王”铜衡[J]. 文物, 1979(4): 73-76.
- [2] 孙机. 关于焦作窖藏的铜器与其中的杆秤[J]. 华夏考古, 1997(1): 83-86.
- [3] 国家计量总局, 中国历史博物馆, 故宫博物院, 编. 中国古代度量衡图集[M]. 北京: 文物出版社, 1984: 2, 83, 107.
- [4] 丘光明. 我国古代权衡器简论[J]. 文物, 1984(10): 77-89.
- [5] 高至喜. 湖南楚墓中出土的天平与砝码[J]. 考古, 1972(4): 42-45.
- [6] 后德俊. 楚国科学技术史稿[M]. 武汉: 湖北科学技术出版社, 1990: 148-153.
- [7] 武家璧. 论楚国的“砝码问题”[J]. 考古, 2020(4): 90-99.
- [8] 郭正忠. 杆秤创行与权衡计量制度的变衍——兼释古衡遽重之谜[J]. 河北学刊, 1993(3): 67-74.
- [9] 李天虹. 严仓一号楚墓遣册所见度量单位和分数词[C]//武汉大学简帛研究中心, 主编. 简帛: 第20辑. 上海: 上海古籍出版社, 2020: 21-29.
- [10] 李学勤. 释“鈔”为四分之一[M]//李学勤. 三代文明研究. 北京: 商务印书馆, 2011: 136-137.
- [11] 刘刚. 楚铜贝“𠂔朱”的释读及相关问题[C]//复旦大学出土文献与古文字研究中心, 编. 出土文献与古文字研究: 第5辑. 上海: 上海古籍出版社, 2013: 444-452.
- [12] 李天虹. 由严仓楚简看战国文字数据中“才”、“𠂔”两字的释读[C]//武汉大学简帛研究中心, 编. 简帛: 第9辑. 上海: 上海古籍出版社, 2014: 23-32.

- [13] 熊长云. 楚国衡制考[R]//熊长云. 楚国货币衡制考. 北京大学、故宫博物院博士后研究工作报告. 2023 年 6 月: 93-96.
- [14] 丘光明, 邱隆, 杨平. 中国科学技术史·度量衡卷[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 32.
- [15] 李零. 论西辛战国墓裂瓣纹银豆——兼谈我国出土的类似器物[J]. 文物, 2014(9): 58-70.
- [16] 熊长云. 中国古代度量衡进制的基本原理[R]//熊长云. 楚国货币衡制考. 北京大学、故宫博物院博士后研究工作报告. 2023 年 6 月: 98-115.
- [17] 萧灿. 岳麓书院秦简《数》研究[M]. 北京: 中国社会科学出版社, 2015: 35, 73, 84, 141-143.
- [18] 熊长云. 北京大学藏秦权与单位权意义探论[C]//北京大学中国考古学研究中心, 北京大学震旦古代文明研究中心, 编. 古代文明: 第 12 卷. 上海: 上海古籍出版社, 2018: 298-305.
- [19] 荆州博物馆. 湖北荆州黄山墓地 40 号战国楚墓发掘简报[J]. 江汉考古, 2007(4): 19-21.
- [20] 董珊. 战国题铭与工官制度[D]. 北京: 北京大学, 2002: 71, 166-167.
- [21] 陈伟, 编. 秦简牍合集(壹): 睡虎地秦墓简牍[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2014: 154.
- [22] 吴镇烽, 编. 商周青铜器铭文暨图像集成(第三十五卷)[M]. 上海: 上海古籍出版社, 2012.
- [23] 河北省文物研究所, 编. 燕下都(下)[M]. 北京: 文物出版社, 1996: 图版 144. 5.
- [24] 吴良宝. 读札记(一)[C]//复旦大学出土文献与古文字研究中心, 编. 出土文献与古文字研究: 第 4 辑. 上海: 上海古籍出版社, 2011: 128-138.
- [25] 北京大学出土文献与古代文明研究所, 编. 北京大学藏秦简牍(第四册)[M]. 上海: 上海古籍出版社, 2023: 751-752, 753, 834.
- [26] 韩巍. 北大藏秦简《鲁久次问数于陈起》初读[J]. 北京大学学报(哲学社会科学版), 2015, 52(2): 29-36.
- [27] 韩巍, 邹大海, 整理. 北大秦简《鲁久次问数于陈起》今译、图版和专家笔谈[J]. 自然科学史研究, 2015, 34(2): 232-266.
- [28] 蒋伟男. 简牍“毁”字补说[J]. 古籍研究, 2016, 64(2): 181-185.
- [29] 彭浩. 张家山汉简《算数书》注释[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 37-38, 73.
- [30] 谭竞男, 蔡丹. 睡虎地汉简《算术》“率”类算题[J]. 文物, 2023(12): 75 - 81.
- [31] 郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1992: 5.
- [32] 刘未沫. 《鲁久次问数于陈起》中的“音律—历法生成论”及其宇宙图像[J]. 哲学动态, 2020(3): 37-45.
- [33] 胡平生. 居延汉简中的功与劳[J]. 文物, 1995(4): 51-55.
- [34] 陈伟, 熊北生. 睡虎地汉简中的功次文书[J]. 文物, 2018(3): 65-70.

On the Function of the Warring States Chu “Royal” Bronze Beams, as Well as “Establishing it with Things” in *Lu Jiuci Asked Chen Qi about Numbers* (鲁久次问数于陈起)

ZHOU Boqun

(School of Chinese, University of Hong Kong, Hong Kong SAR 999077, China)

Abstract The National Museum of China houses two bronze balance beams inscribed with the character “wang(王, king or royal)” reportedly unearthed in Shou County, Anhui Province. These artifacts are undoubtedly from the Warring States period state of Chu. Given the presence of scales on the beams, scholars generally believe these items represent an intermediate stage in the development from balance scales to steelyards, making them a transitional type of weighing instrument. However, the exact function of these bronze beams remains somewhat unclear. This article attempts to propose

a new hypothesis by integrating mathematical data from texts on excavated bamboo slips. It suggests that the “royal” bronze beams were not used for the accumulation of standard weights but rather for the division of unit weights, corresponding to the terms “destroy” (*hui* 毁) or “break” (*po* 破) mentioned in unearthed arithmetic books. This function might have two specific applications: first, to establish or verify standard weights, and second, to achieve more precise measurements when the smallest standard weight was still not accurate enough. Based on this, the article will also reconsider the phrase “*yi wu qi zhi*” (以物起之, establishing it with things) from the Peking University Qin manuscript *Lu Jiuci Asked Chen Qi about Numbers* (*Lu Jiuci wenshu yu Chen Qi* 鲁久次问数于陈起), suggesting that it discusses the relationship between measurements and fractions.

Keywords “Royal” Bronze Beam; Chu weights; measurement; *Lu Jiuci Asked Chen Qi about Numbers* (*Lu Jiuci wenshu yu Chen Qi* 鲁久次问数于陈起)