

《大衍历》行星算法及精度分析

吕瑶虹 唐 泉✉

(西北大学 科学史高等研究院, 西安 710127)

摘 要 行星理论是中国传统数理天文学的核心内容之一,我国第一部保存较为完整的历法《三统历》中就有比较完整的记载,此后各历中均有相关内容。在中国行星理论发展史上,《大衍历》因为有诸多创新而占有非常重要的地位。本文全面梳理了《大衍历》中的行星算法,并用 Python 语言对《大衍历》行星算法进行模拟,讨论了《大衍历》制定和颁行期间 35 年内的行星位置计算精度。研究表明,《大衍历》推算木星、火星、土星、金星和水星黄经的最大误差依次为 3.93° 、 36.96° 、 7.99° 、 18.52° 、 32.5° 。进一步的分析表明,《大衍历》中“五星爻象历”和“五星动态表”的设计及其误差、五星近日点黄经的测算误差和定合日期的推算误差,是影响《大衍历》行星计算误差的主要因素。

关键词 大衍历;行星理论;五星爻象历;精度

中图分类号 N092

文献标识码 A **文章编号** 1000-0224(2023)03-0281-24

行星理论在中国传统数理天文学中占有很重要的地位,我国流传至今最早的古代历法《三统历》中便已有对行星理论的系统描述。不过,汉代和魏晋南北朝时期的历法家在计算行星位置时,并未考虑太阳中心差和行星中心差的影响,只能计算行星的地心平黄经。曲安京将这一时期的行星运动模型定义为“双圆模型”,即假设行星共同绕太阳作匀速圆周运动^[1]。

公元 6 世纪中叶,北齐天文学家张子信发现了太阳和行星的不均匀运动现象,刘焯在《皇极历》中设计的“五星入气加减差”,通常被认为是对行星中心差的改正项。《大衍历》是唐开元十七年(729)开始颁行的一部历法,一行首次将历法内容厘为 7 章,依次为步中朔、步发敛、步日躔、步月离、步轨漏、步交会、步五星。《大衍历》的编排方式成为后世编历的典范。《大衍历》在行星理论方面的贡献主要有以下几点:将五星近日点进动的概念引入历法计算;在隋代及初唐历法“五星入气加减差”基础上,创造性地构造了“五星爻象历”,用于修正行星的中心差^[2-3];给出五星轨道面与黄道面存在夹角的概念^[4],虽然

收稿日期:2021-11-11;修回日期:2022-11-24。

作者简介: 吕瑶虹,1995 年生,内蒙古呼和浩特市人,博士研究生,主要研究方向为中国数理天文学史。唐泉,1974 年生,甘肃靖远人,教授,主要从事中国数理天文学史研究,Email: tangquan74@nwu.edu.cn。

基金项目: 国家社科基金冷门绝学研究专项学术团队项目:“中国古代历法中的‘步五星术’研究”(项目编号:20VJXT005),国家社科基金重大项目:“中国历史学”(项目编号:22&ZD221)。

未引入纬度计算,但可以初步判断行星在黄道南或北的位置。《大衍历》在计算平合时刻到定合时刻及行星真位置的过程中,除考虑行星中心差影响外,还加入太阳中心差,通过第二次修正,最终确定行星真位置。

中国古代行星理论一直受到科学史家的广泛关注,数内清^[5]、陈美东^[6-9]、刘金沂^[10]、张培瑜^[11]、曲安京^[1,12-14]等学者主要对行星算法的数理结构进行了讨论,唐泉^[15-19]、张健^[20]、李勇^[21]、辛佳岱^[22]、叶杰^[23]等对隋代以后部分代表性历法中的行星计算精度进行了深入探讨。胡铁珠对《大衍历》交食计算精度做了深入考察^[24],并将《大衍历》与印度《苏利亚历》中的行星算法进行了比较^[25]。洪天赐在其博士论文中,将《大衍历》翻译为英文,^[26]但是由于他对《大衍历》“步五星术”中的部分算法理解有误,因此部分翻译还存在一些问题。宫岛一彦对《大衍历》行星理论也做过专门研究。^[27]以上研究为我们全面理解《大衍历》行星理论提供了非常有益的帮助。由于《大衍历》计算行星每日位置涉及的算法相对较多,因此尚未有学者对《大衍历》行星计算精度进行专门讨论。

本文试图在全面解读《大衍历》行星算法的基础上,利用 Python 语言模拟《大衍历》行星算法,计算出开元十二年到至德三年(724—758)每一日夜半的五星黄经,并与相应的理论结果进行比较,以考察《大衍历》行星计算精度。本文的讨论,对客观评价唐代行星计算精度,具有比较重要的参考意义。

1 《大衍历》“步五星术”中的天文常数与算表

《大衍历》载于《旧唐书·历志三》与《新唐书·历志四上》,《旧唐书》中记载的算法较《新唐书》详细,但其中的天文数据存在较多讹误,需参考《新唐书》进行校补,因此本文采用《旧唐书》记载的算法术文与《新唐书》数据校勘相结合的方式进行解读。

1.1 《大衍历》“步五星术”中的天文常数

《大衍历》计算行星位置需使用“步中朔术”中的常数“策实”与“通法”、“步日躔术”中的常数“乾实”,其余常数均在“步五星术”中给出。现以火星为例,对相关天文常数进行解释说明。

“策实百一十一万三百四十三”。“策实”表示一个回归年长度 1 110 343,以分为单位。

“通法三千四十”。“通法”为《大衍历》的日法,在《旧唐书》中称为“大衍通法”,表示一日的长度是 3 040 分。

“乾实百一十一万三百七十九太”。“乾实”是一周天的长度,为 1 110 379.75 分。

“终率二百三十七万一千三,秒八十六”。“终率”意为火星的会合周期,其值为 2 371 003.86 日分。

“终日七百七十九,余二千八百四十三,秒八十六”。“终日”是“终率”化为日作单位

的会合周期长度,其值为 $779 \frac{2843 \frac{86}{100}}{3040}$ 日。

“变差三十二,秒二”。“变差”为火星近日点每年相对冬至点的进动数值,其单位为

分,除以日法化为度。^①

“象算九十一,余二百三十八,秒四十三,微分八十四”。“象算”的计算方法为:象算

$$= \frac{(\text{乾实} + \text{变差})}{4} = \frac{(1110343 + 32 \frac{2}{100})}{4} \text{度, 即每象 } 91 \frac{43 \frac{84}{96}}{760} \text{度。}$$

“爻算十五,余百六十六,秒十四,微分六十二”。“爻算”是将一象长度等分为六爻,

$$\text{每爻长度为: } \frac{\text{象算}}{6} = 15 \frac{14 \frac{62}{96}}{760} \text{度。}$$

“辰法七百六十”。“辰法”为“通法”的 1/4,单位为分。

“秒法一百”。“秒法”100 为“秒”的分母。

“微分法九十六”。“微分法”96 为“微分”的分母。

1.2 《大衍历》“步五星术”中的天文算表

《大衍历》“步五星术”中的天文算表包括两种——“五星爻象历”与“五星动态表”,前者是与行星中心差相关的算表,后者则刻画了行星在一个会合周期内的运行状况。

1.2.1 五星爻象历

《大衍历》中的“五星爻象历”是与行星中心差修正相关的天文算表^[28-29],学者对其构造做过研究([1],594-599 页;[25],222-224 页)。“五星爻象历”将行星的近点周期分为“四象”,又将每象分为“六爻”,并给出一个近点周期中 24 个节点处的相关数值。

《大衍历》首创“五星爻象历”修正行星中心差,宋代在此表基础上逐步改进为“五星盈缩历”。根据学者对唐宋时期爻象历到盈缩历算法演变分析,《大衍历》对进退积修正后得到的进退变率,相当于宋代历法所给的五星盈缩差([29],82 页)。现以火星爻象历为例说明《大衍历》“五星爻象历”的结构(表 1)。^② 限于篇幅,后文涉及“五星爻象历”每一度中的相关数据将直接给出。

表 1 《大衍历》火星爻象历^[30]

爻目		损益率		进退积
少阳/少阴	初	益 1237	进/退	空
少阳/少阴	二	益 1143	进/退	1 237
少阳/少阴	三	益 991	进/退	2 380
少阳/少阴	四	益 781	进/退	3 371
少阳/少阴	五	益 513	进/退	4 152

① 中国历法古度与现代度存在单位换算:1 度 $\approx$ 1.01°,由《大衍历》常数周天长度 1 110 379.75/3040 与 360 的比例关系求得,常数参见[30],2 222 页。本文将古度换算为现代度时,用符号“°”表示。

② 表中数据均参考《新唐书》数据。《新唐书》原文命名的“五星爻象历”,本文以“火星爻象历”为例说明,表头按照《旧唐书》分别命名为“爻目”、“损益率”、“进退积”。

续表1

爻目		损益率		进退积
少阳/少阴	上	益 187	进/退	4 665
老阳/老阴	初	损 187	进/退	4 852
老阳/老阴	二	损 513	进/退	4 665
老阳/老阴	三	损 781	进/退	4 152
老阳/老阴	四	损 991	进/退	3 371
老阳/老阴	五	损 1 143	进/退	2 380
老阳/老阴	上	损 1 237	进/退	1 237

“爻目”栏将火星近点周期分为“四象”,依次命名为“少阳”、“老阳”、“少阴”、“老阴”。每象再依次划分为“初爻”、“二爻”、“三爻”、“四爻”、“五爻”、“上爻”。“损益率”为该爻所对应的与行星中心差有关的量。在“少阳”和“老阳”两象,“益”符号为“加”,“损”符号为“减”,“进退积”为“进”,“进”表示符号为正;在“少阴”和“老阴”两象,“益”符号为“减”,“损”符号为“加”,“进退积”为“退”,“退”表示符号为负。“进退积”为“损益率”的代数和。如在“老阳/老阴”初爻处,进退积最大值为 4 852,除以辰法 760,得到火星在此位置的中心差,结果为 $\frac{4\,852}{760}\approx 6.38$ 度。

1.2.2 五星动态表

行星在一个会合周期中有顺行、留、逆行等不同的视运动现象。历法家假设太阳与行星均做匀速圆周运动,基于“双圆模型”假设,根据五星各自的运行特点,将一个会合周期划分为不同段目,并给出每个段目的相关数值。相比早期历法,《大衍历》“五星动态表”(表 2)的划分已较为详细。现以火星动态表为例,简要介绍《大衍历》中此类表格的构造。^① ([30], 2099-2103 页)

表 2 《大衍历》火星动态表

变行目	变行日中率	变行度中率	差行损益率	变行度常率	变行乘数 变行除数
合后伏	71 日 735 分	行 54 度 735 分	先疾 5 日益迟 7 分	行 38 度 201 分	乘数 127 除数 30
前疾	214 日	行 136 度	先疾 9 日益迟 4 分	行 113 度 596 分	乘数 127 除数 30
前迟	60 日	行 25 度	先疾 日益迟 4 分	行 31 度 685 分	乘数 203 除数 54
前留	13 日			行 6 度 693 分	乘数 203 除数 54

① 表中数据均参考《新唐书》数据。《旧唐书》与《新唐书》均未对“五星动态表”命名,现以“火星动态表”为例说明。表头按照《旧唐书》分别命名为“变行目”、“变行日中率”、“变行度中率”、“差行损益率”、“变行度常率”、“变行乘数 变行除数”栏。

续表2

变行目	变行日中率	变行度中率	差行损益率	变行度常率	变行乘数 变行除数
前退	31 日	退 8 度 473	先迟 6 日益疾 5 分	行 16 度 367 分	乘数 203 除数 48
后退	31 日	退 8 度 473 分	先疾 6 日益迟 5 分	行 16 度 367 分	乘数 203 除数 48
后留	13 日			行 6 度 693 分	乘数 203 除数 48
后迟	60 日	行 25 度	先迟 日益疾 4 分	行 31 度 685 分	乘数 203 除数 54
后疾	214 日	行 136 度	先迟 9 日益疾 4 分	行 113 度	乘数 203 除数 54
合前伏	71 日 736 分	行 54 度 736 分	先迟 5 日益疾 7 分	行 38 度 201 分	乘数 127 除数 30

《大衍历》将五星在一个会合周期内的运动情况用以上动态表说明。表 2 共 6 栏,第 1 栏为“变行目”,即将五星的一个会合周期细分为不同段目,不同行星的划分数目与划分段名称有所不同,如上表将火星划分为 10 段。第 2 栏“变行日中率”表示行星在不同段目内平均运行的时间,各段目运行时间之和为一个会合周期。第 3 栏“变行度中率”为行星在各段目内平均运行的度数。第 4 栏“差行损益率”是行星在各段目内运行的加速度,如“合后伏”段的差行损益率为“先疾,五日益迟七分”,即表示火星在该段目开始速度较快,之后做匀减速运动,加速度为 $-\frac{7}{5}$ 分/日;“合前伏”段的差行损益率为“先迟,五日益疾七分”,即表示火星在该段目开始速度较慢,之后做匀加速运动,加速度为 $\frac{7}{5}$ 分/日。第 5 栏“变行度常率”是计算各段目初始时刻距离爻象历起点位置使用到的量。第 6 栏“变行乘数 变行除数”是与行星中心差有关的系数,《大衍历》在每个段目都设置了相应的乘数与除数。

2 《大衍历》“步五星术”的基本思路

《大衍历》第七章“步五星术”共有 24 个算法,涉及行星位置算法的术文有 21 个,其核心目的是计算行星的黄道宿度。核心算法大致可分为两类:第一类是从“推五星平合”到“求常合”再到“求定合”的修正算法,第二类为从“五星动态表”常数“变行日(度)中率”到术文“求变行日度(变)^①率”再到“求变行日(度)定率”的修正算法。由于已有学者对《大衍历》“步五星术”做了较为详细的解读,因此本文不再对其进行详细解读,仅列出

① 《旧唐书》原文无“变”字,为防止与后文“日(度)中率”和“日(度)定率”概念混淆,在此根据术文标题增补“变”字。

24 个算法的名称、算法目的及计算公式,并以火星为例,给出自公元 724 年冬至夜半起算^①,首合日后第一个会合周期内与行星位置算法相关的部分计算结果。^② 本文用 VII-1 表示《大衍历》第七章“步五星术”中的第一个算法,以此类推。相关术文常数的含义可参考第 1 节“步五星术”中的天文常数与算表解释。

2.1 《大衍历》行星位置算法

VII-1 推五星平合:推算五星的平合时刻,即计算太阳和行星平合时刻与所求年天正冬至夜半之间的时间距离,《大衍历》称为“平合日算”。根据术文,“平合日算”可由以下两式求出:

$$(\text{中积分} - \text{天正冬至小余}) \equiv r \pmod{\text{终率}} \quad (1)$$

$$\text{平合日算} = \frac{\text{终率} - r}{3\,040} \quad (2)$$

其中“中积分”、“天正冬至小余”的求解见术文“推天正中气”。([30], 2056 页) 将常数上元积年 $N_{724} = 96\,961\,741$, 回归年长度 = 1 110 343 (分), 大衍通法 = 3 040 (分) 代入“推天正中气”术文公式中:

$$\text{中积分} = \text{回归年长度} \times \text{上元积年} \quad (3)$$

$$\text{中积分} \equiv \text{天正冬至小余} \pmod{\text{大衍通法}} \quad (4)$$

解得 724 年天正冬至小余为 3 003, r 为 1 652 136. 41。历法常数火星终率为 2 371 003. 86 (分), 求解可得火星的“平合日算”为 236. 47 (日)。

VII-2 求平合入爻象历:该算法的目的是计算平合时刻行星与近日点的距离,《大衍历》称为“平合入历算数”,“爻象历”的结构已在前文介绍。设“积年”为 N_n , 则“平合入历算数”可由(5)、(6)两式求出:

$$(N_n \times \text{变差}) \equiv r_1 \pmod{\text{乾实}} \quad (5)$$

其中乾实 = 1 110 379. 75 (分), 火星变差 = 32. 02 (分), 代入(5)式中解得“乾实去之不满者” r_1 为 30. 65。则平合入历算数为:

$$\text{平合入历算数} = \text{平合日算} - r_1 = 236. 47 - 30. 65 = 205. 82 \text{ (日)} \quad (6)$$

VII-3 求平合入四象:计算行星平合时刻处在爻象历的第几象。

$$\frac{\text{平合入历算数}}{\text{象算}} = k + \frac{\text{入象算及余秒}}{\text{象算}} \approx \frac{205. 82}{91. 31} \approx 2 \frac{23. 2}{91. 31} \quad (7)$$

$k = 0, 1, 2, 3$, 分别对应平合入少阴、老阳、少阴、老阴, 本例中平合入少阴象。

VII-4 求平合入六爻:计算行星平合时刻处在爻象历的第几爻。

$$\frac{\text{入象算及余秒}}{\text{爻算}} = m + \frac{\text{入爻算及余秒}}{\text{爻算}} \approx \frac{23. 2}{15. 22} \approx 1 \frac{7. 98}{15. 22} \quad (8)$$

$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, 分别对应平合入每象下初爻、二爻、三爻、四爻、五爻、上爻, 本例中平合入二爻 7. 98 (度)。

① 依术文“开元大衍历演纪上元阙逢困敦之岁,距开元十二年甲子岁,积九千六百九十六万一千七百四十算”,即唐开元十二年(724)的上元积年为 96 961 741 年,上元积年需加 1,算尽。本文相关算例从 724 年冬至起算。

② 涉及太阳中心差的“盈缩分”、“先后数”与行星中心差的“损益率”、“进退积”将直接给出已求得数据。

VII-5 求四象六爻每算损益及进退定数:计算爻象历中每度损益率及进退定数。因涉及数据较多,下文将直接给出计算结果。

VII-6 求平合入进退定数:求平合时刻五星在爻象历中任意位置的进退定数。该算法分为精密和简便算法,以下均按照简便算法计算。计算如下:

$$\text{平合入进退定数} = \text{其下进退积} \pm \frac{\text{平合入算余}}{760} \times \text{入算损益率} \quad (\text{益“+”损“-”}) \quad (9)$$

根据 VII-5 求得少阴二爻 7.98(度)的损益率 $f(m) = -73.24$,进退积 $y(m) = -1\,764.55$ ^①。则在 7.98(度)处的进退定数为:

$$y(m+r) = -1\,764.55 + 0.82 \times (-73.24) = -1\,824.82 \quad (10)$$

VII-7 求常合:在平合的基础上计算所求年冬至时刻平太阳与真行星的时间间距,修正量使用五星爻象历。

$$\text{常合日算} = \text{平合日算} \pm \frac{k \times \text{进退定数} \times \frac{\text{合下乘数}}{\text{合下除数}}}{760} \quad (\text{进“+”退“-”}) \quad (11)$$

其中,若计算金星,则 $k=2$,其余四星 k 均等于 1。由 VII-1 已求得“平合日算”为 236.47(日),VII-6 求得平合入进退定数 = -1 824.82,参考动态表中合下乘数 = 127,合下除数 = 30,则火星的“常合日算”为 226.31(日)。

VII-8 求定合:在常合的基础上计算所求年冬至时刻真太阳与真行星的时间间距,修正量使用常合日太阳中心差数据。

$$\text{定合日算} = \text{常合日算} \pm \frac{\text{常合日先后定数}}{4 \times 760} \quad (\text{先“-”后“+”}) \quad (12)$$

此处直接给出常合日先后定数为后 1.84,则“定合日算”为:

$$\text{定合日算} = \text{常合日算} \pm \frac{\text{常合日先后定数}}{4 \times 760} = 226.31 + 1.84 = 228.15 \text{ (日)} \quad (13)$$

VII-9 求定合度:求定合时刻行星所在位置,这里需加入定合日盈缩分因素。

$$\begin{aligned} \text{定合加时度余} &= \text{夜半日度余} + \left(\text{定合余} \pm \frac{\text{定合余} \times \text{定合日盈缩分}}{4 \times 760} \right) \\ & \quad (\text{盈“+”缩“-”}) \end{aligned} \quad (14)$$

由 VII-1 已求得 724 年天正冬至小余为 3 003 分,VII-8 求得的“定合日算”取小数部分为定合余,即 0.15(日),定合日盈缩分结果直接给出,为盈 0.02,则定合加时度余为 1.14(度)。

VII-10 求定合月日:天正十一月朔日起算,计算定合时刻与各月朔日的时间间距。

$$\text{定合日月及余秒} = \frac{\text{定合日算} + \text{天正冬至大小余} - \text{天正经朔大小余}}{\text{四象之策}} \quad (15)$$

VII-11 求定合入爻:计算定合时刻行星在爻象历中的位置。

① 为方便计算,此处“少阳”、“老阳”处表示为益“+”损“-”;“少阴”、“老阴”处表示为益“-”损“+”。且一爻长度约为 15.22 度,并非整数,因此该处入爻度余 0.98 与平合入历算数度余 0.82 并不相等。此处应使用平合入历算数度余 0.82。损益率、进退积和进退定数是在计算后再保留两位小数所得。

$$\text{定合入爻算} = \text{平合入爻算} \pm \frac{k \times \text{进退定数} \times \frac{\text{合下乘数}}{\text{合下除数}}}{760} \pm \frac{\text{常合日先后定数}}{4 \times 760}$$

(进“+”退“-”;先“-”后“+”) (16)

由Ⅶ-3至Ⅶ-4已求得平合入少阴二爻 7.98(度),加入求常合及定合过程中的修正项,可求出火星在 724 年的定合入历算数为 197.5(日),即定合入少阴初爻 14.87(度)。

Ⅶ-12 求变行初日入爻:求行星其他段目初日在爻象历中的位置。

$$\text{次变初日入爻算} = \text{定合入爻算} + \text{合后伏下变行度常率} \quad (17)$$

火星合后段目为前疾段,只需在定合入爻算的位置基础上增加合后伏下变行度常率:

$$\text{前疾初日入爻} = \text{定合入爻算} + 38 \frac{201}{760} \quad (18)$$

因此,前疾入少阴四爻 7.48(度),之后段目累加相应变行度常率即可。

Ⅶ-13 求变行初日入进退定数:该算法与计算“平合入进退定数”方法同,此处同样使用简便算法。以各段目下乘数相乘,除数相除,便得到进退变率。可表示为下式:

$$\text{变行初日入进退定数} = \text{其下进退积} \pm \frac{\text{变行初日入算余}}{760} \times \text{入算损益率}$$

(益“+”损“-”) (19)

$$\text{进退变率} = \text{进退定数} \times \frac{\text{其下乘数}}{\text{其下除数}} \quad (20)$$

此处直接给出前疾段进退定数的运算结果为 -3 770.31,前疾乘数 = 127,前疾除数 = 30,则前疾段目的进退变率为 -15 960.97。

Ⅶ-14 求变行日度变率:即对术文“变行日度中率”加入行星中心差进行修正。设各段目变行日度变率的修正量为 Δ_i ,则:

$$\text{变行日变率} = \text{变行日中率} \pm \Delta_i \quad (21)$$

$$\text{变行度变率} = \text{变行度中率} \pm \Delta_i \quad (22)$$

经计算,合后伏进退变率为 -5 122.32,前疾进退变率为 -15 960.97,两者辰法 760 为分母,因此合后伏段变化 Δ_1 为:

$$\Delta_1 = \frac{\text{前疾进退变率} - \text{合后伏进退变率}}{760} = \frac{-15\,960.97 - (-5\,122.32)}{760} = -14.26 \quad (23)$$

已给常数变行日中率为 71.97(日),变行度中率为 54.97(度),将二者分别加入合后伏段所求变化量中,可求得合后伏段变行日变率为 57.71(日),变行度变率为 40.71(度)。

Ⅶ-15 求变行日度定率:即对术文“变行日度变率”中部分段目加入太阳中心差进行修正及行星中心差相关修正得到,各段目修正量不同。设各段目变行日度定率的修正量为 Δ'_i ,则:

$$\text{变行日定率} = \text{变行日变率} \pm \Delta'_i \quad (24)$$

$$\text{变行度定率} = \text{变行度变率} \pm \Delta'_i \quad (25)$$

根据术文,合后伏段的变行日定率无需修正,因此本段目的变行日定率即为上文所求的变

行日变率。该段目的变行度定率需加入太阳中心差,为后 0.55,则:

$$\text{合后伏变行日定率} = \text{合后伏变行日变率} = 57.71 (\text{日}) \quad (26)$$

$$\text{合后伏变行度定率} = \text{合后伏变行度变率} + \text{太阳中心差} = 40.71 + (-0.55) = 40.16 (\text{度}) \quad (27)$$

VII-16 求定合后夜半星所在度:求定合后夜半行星所在的黄道宿度,只需累加一日行度即可。由术文 VII-9 已知火星定合余为 0.15(日),即 114(分),定合度为 1.14(度),初日行分计算过程见术文 VII-19 算例,为 0.75(度/日),则火星定合后夜半星所在度为:

$$\begin{aligned} \text{定合后夜半度} &= \text{定合加时度} + \frac{760 - \text{定合余}}{760} \times \text{初日行分} \\ &= 1.14 + \frac{760 - 639.54}{760} \times 0.75 = 1.26 (\text{度}) \end{aligned} \quad (28)$$

VII-17 求每日差:为行星在段目内每日速度的变化量,相当于“五星动态表”中“差行损益率”一栏数值。对应表 2,则火星在合后伏至合前伏各段目的每日差依次为: $-\frac{7}{5}$ 分/日、 $-\frac{4}{9}$ 分/日、 -4 分/日、空、 $\frac{5}{6}$ 分/日、 $-\frac{5}{6}$ 分/日、空、 4 分/日、 $\frac{4}{9}$ 分/日、 $\frac{7}{5}$ 分/日。

$$\text{每日差} = \frac{\text{所差分}}{\text{所差日}} \quad (29)$$

VII-18 求平行度及分:指所求段目内,通过变行度定率与变行日定率之比计算行星的平均速度。由术文 VII-15 已知火星合后伏段目内的变行日定率为 57.71(日),变行度定率为 40.16(度),则合后伏段目内的平行分为:

$$\text{平行分} = \frac{\text{度定率} \times 760}{\text{日定率}} = \frac{40.16 \times 760}{57.71} = 528.92 (\text{分/日}) \quad (30)$$

$$\text{一日所行度及分} = \frac{\text{平行分}}{760} = \frac{528.92}{760} \approx 0.7 (\text{度/日}) \quad (31)$$

VII-19 求差行初、末日行度及分:为行星在各段目的初日速度和末日速度。则火星在合后伏段目内的差率、初日行度与末日行度为:

$$\text{差率} = \frac{(\text{日定率} - 1) \times \text{差分}}{2} = \frac{(57.71 - 1) \times \left| -\frac{7}{5} \right|}{2} = 39.7 \quad (32)$$

$$\text{合后伏初日行度} = \text{平行分} + \text{差率} = 528.92 + 39.70 = 568.62 (\text{分/日}) \quad (33)$$

$$\text{合后伏末日行度} = \text{平行分} - \text{差率} = 528.92 - 39.70 = 489.22 (\text{分/日}) \quad (34)$$

其中益疾“-”、益迟“+”为初,益疾“+”、益迟“-”为末。(32)式中“差分”与(29)式中的“每日差”含义相当,为行星在各段目内运行的加速度。将合后伏初、末日行度除以辰法 760,可将其转换为度/日作单位。即初日行度为 0.75(度/日),末日行度为 0.64(度/日)。

VII-20 求差行次日行度及分:根据差行初末日行度及分计算每日的日行度及分。

$$\text{差行次日行度及分} = \text{初日行分} \pm \text{每日差} (\text{迟“-”益“+”}) \quad (35)$$

则火星合后伏段目内差行次日行度及分为 567.22(分/日)。

VII-21 径求差行余日行度及分:计算该段目内任意一日内行星所行度数。设所求日

为 n , 则第 n 日行星行度为:

$$\text{第 } n \text{ 日行度及分} = \frac{\text{初日行分} \pm (n-1) \text{ 每日差}}{760} \quad (\text{益迟“-”益疾“+”}) \quad (36)$$

VII-22 求差行, 先定日数, 径求积度及分: 各段目初日后至所求日行星所行度数之和。设定日数为 d , 则前 n 日行星运行总度数为:

$$\text{积度} = \frac{(\text{初日行分} \pm \frac{n-1}{2} \times d) \times n}{760} \quad (\text{益迟“-”益疾“+”}) \quad (37)$$

VII-23 求差行, 先定度数, 径求日数: 即前一算法的逆算法, 根据所行度数之和反推距离该段目初日日数 n 。公式如下:

$$\text{自乘加积} = \left(\frac{2 \times \text{初日行分} \pm \text{每日差}}{\text{每日差}} \right)^2 \pm \frac{8 \times 760 \times \text{所求行度}}{\text{每日差}} \quad (38)$$

$$\text{所求日数 } n = \frac{\sqrt{\text{自乘加积}} \pm \text{率}}{2} \quad (39)$$

(益迟“+”益疾“-”)

VII-24 求星行黄道南北:《大衍历》通过变行入阴阳爻, 判断行星运行至黄道南或北的算法。

上述 24 个算法中与行星位置计算相关的术文为 VII-1 至 VII-9、VII-11 至 VII-22。因术文 VII-21 至 VII-24 不涉及行星每日运动误差的计算, 此处未给其算例。限于篇幅, 表 3 仅给出涉及行星位置所需的各段目中间量, 即依据术文计算所得火星 724 年第一次会合周期内各段目起点在爻象历中所在位置、进退定数、变行日(度)变率、变行日(度)定率以及计算该年行星位置所需要的各段目“平行分”、“差率”、“初日行分”、“末日行分”结果。

表 3 《大衍历》计算火星位置所需各段目中间量计算表

变行目	各段目初日入爻	各段目初日入 进退定数	变行日变率 (单位: 日)	变行日定率 (单位: 日)	变行度变率 (单位: 度)
合后伏	少阴初爻 14.87 度	-1 210	57.71	57.71	40.71
前疾	少阴四爻 7.48 度	-3 770.31	228.69	228.69	150.69
前迟	老阴五爻 14.73 度	-1 276.52	72.8	72.8	37.8
前留	少阳二爻 0.98 度	1 312.18	16.69	16.69	3.69
前退	少阳二爻 7.89 度	1 829.65	37.4	37.4	15.02
后退	少阳三爻 9.15 度	2 980.07	36.18	36.18	13.8
后留	少阳四爻 10.42 度	3 911.29	12.19	12.19	0.81
后迟	少阳五爻 2.11 度	4 237.31	62.95	62.95	27.95
后疾	老阳初爻 3.57 度	4 834.63	178.71	178.71	100.71
合前伏	少阴二爻 10.82 度	-2 041.76	59.45	58.91	42.45
合后伏	40.16	528.92	39.7	568.62	489.22

续表3

变行目	各段目初日入爻	各段目初日入 进退定数	变行日变率 (单位:日)	变行日定率 (单位:日)	变行度变率 (单位:度)
前疾	163.49	543.33	50.6	593.93	492.73
前迟	41.5	433.17	143.61	576.78	289.56
前留	3.69	168.06	—	168.03	168.03
前退	15.02	305.29	15.17	290.12	320.46
后退	13.8	289.96	14.66	304.62	275.3
后留	0.81	50.22	—	50.5	50.5
后迟	27.15	327.75	123.91	203.84	451.66
后疾	111.08	472.37	39.49	432.88	511.86
合前伏	42.45	547.71	40.54	507.18	588.25

通过比较变行日(度)中率、变率、定率的各值,可以发现大部分段目加入修正值后,数值有较大变化。尤其在变行日(度)中率到变行日(度)变率的修正过程中,火星后疾段变化量将近 36,这是由于火星偏心率较大,运动较复杂造成的。留段按照平均速度计算,平行分即为初末日行分。

2.2 《大衍历》“步五星术”中的核心算法

计算行星地平真黄经的位置精度,涉及到两类核心算法。首先是求定合的过程,需要知道行星合时刻与冬至之间真实的时间间距,《大衍历》称之为“定合日算”,只有在求得“定合日算”的基础上,才可对其他段目再做计算。其次是求变行日(度)定率的过程,若计算行星每日的运动情况,则必须通过一系列修正,将各段目所对应的日数与度数之间的运行状态准确描述。

2.2.1 五星定合算法

计算五星“定合日算”,大致可分为两步:首先需要在“平合日算”的基础上,加入行星中心差修正得到“常合日算”;之后在“常合日算”的基础上,加入太阳中心差修正,最终得到“定合日算”。算法术文可参考Ⅶ-1、Ⅶ-7、Ⅶ-8。

《大衍历》中第一个算法“推五星平合”,术文如下:

Ⅶ-1 推五星平合:置中积分,以天正冬至小余减之,各以其星终率去之;不尽者,返以减终率,满大衍通法为日,不满为余,即所求年天正冬至夜半后星平合日算及余秒也。([30],2092 页)

该算法给出求五星平合时刻与所求年天正冬至夜半所距时间的方法。“中积分”是回归年常数^①与上元积年的乘积,该常量已在《大衍历》第一章“步中朔术”中有所定义。“天正冬至小余”为天正冬至到夜半之间的时间距离,因此该算法是从天正冬至夜半开始起算。“终率”为五星的会合周期,历法常数中所给的五星会合周期以分为单位,除以《大衍历》中的“大衍通法”3 040,可化为以日作单位的常量。根据术文写出如下公式:

^① 《大衍历》中回归年常数的名称为“策实”,为便于理解,在此直接以“回归年常数”命名。

中积分-天正冬至小余 $\equiv$ 不尽者(mod 终率)

$$\text{平合日算} = \frac{(\text{终率} - \text{不尽者})}{3\,040}$$

由以上两组公式即可计算出所求年天正冬至夜半后星“平合日算”及余秒。为方便理解,可参考图 1:

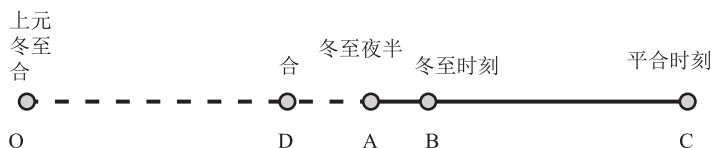


图 1 所求年天正冬至与“平合日算”关系图

上图 1 中 OB 表示中积分, AB 表示天正冬至小余, CD 表示终率。术文所述“置中积分,以天正冬至小余减之”的结果即上元至所求年冬至夜半长度,在图中表示为 OA。“各以其星终率去之”的结果“不尽者”为所求年冬至距离上一次合的时间间距,在图中用 AD 表示。“不尽者,返以减终率”即为所求年冬至夜半与下一次合的时间间距,图中用 AC 表示。

以上“平合日算”的算法未加入行星中心差与太阳中心差,行星与太阳均作匀速圆周运动,即“双圆模型”。接下来“求常合”的术文中,需用到“平合日算”在爻象历中的位置数据,即加入行星中心差相关的量,完成对平时间的第一次修正。其“求常合”术文称:

VII-7 求常合:置平合所入进退定数金星则倍置之,各以合下乘数乘之,除数除之,所得满辰法为日,不满为余,以进加退减平合日算及余秒,先以四约平合余,然以进加退减也。

即为冬至夜半后常合日算及余也。([30], 2097 页)

术文中平合所入的“进退定数”,即需要在“五星爻象历”中查表所得的有关行星中心差的数据。原文中小字说明内行星之一的金星需将“进退定数”乘 2 倍计算,宋代历法中还需将水星“进退定数”乘 3 倍,本篇按照《大衍历》术文原文进行计算,即除金星外其它行星均依照《大衍历》“五星爻象历”数据。其合下“乘数”、“除数”均为“五星动态表”所给常数,“辰法”为 760,数值上等于“大衍通法”的 1/4,可化作以日为单位的量。将所得的进退定数按照“进加退减”的规则修正“平合日算”,即可算得“常合日算”,计算公式如下:

$$\text{常合日算} = \text{平合日算} \pm k \times \text{平合所入进退定数} \times \frac{\text{合下乘数}}{\text{合下除数}}$$

上式中,计算金星时 $k = 2$,计算木、火、土、水四星时 $k = 1$ 。“乘数”与“除数”为《大衍历》“五星动态表”各段目中所给的常数。乘数与除数比值,可理解为与行星中心差有关的量,宋代历法中将其统一为一个固定量^[31]。

至此,平合时刻的第一步修正完成,对应“一圆一椭”模型。接下来,需加入太阳中心差的修正,即对应“双椭模型”的修正([1], 617 页)。

定合算法术文如下:

VII-8 求定合:置常合日先后定数,四而一,所得满辰法为日,不满为余。乃以先减后加常合日算及余,即为冬至夜半后定合日算及余也。([30], 2098 页)

该算法在“常合日算”的基础上加入太阳中心差,得到所求年之后合真太阳与真行星的会

合时间。根据术文可写出以下公式:

$$\text{定合日算} = \text{常合日算} \pm \frac{\text{常合日先后定数}}{\text{辰法} \times 4}$$

“常合日先后定数”计算方法可根据第三章“步日躔术”求得。

2.2.2 求五星变行日(度)定率算法

以上给出了第一类核心算法的修正过程,即从“平合日算”到“常合日算”再到“定合日算”的修正思路及方法。现在我们讨论第二类核心算法,即从“变行日(度)中率”到“求变行日度(变)率”再到“求变行日(度)定率”的修正。其中“变行日(度)中率”为《大衍历》“五星动态表”所给的常数,可参考术文Ⅶ-14、Ⅶ-15。在此基础上,通过“五星爻象历”,对“变行日(度)中率”展开第一步修正,其术文称:

Ⅶ-14 求变行日度[变]率:置其本进退变率与后变率,同名者,相消为差。在进前少,在退前多,各以差为加;在进前多,在退前少,各以差为减。异名者,相从谓并。前退后进,各以并为加;前进后退,各以并为减。逆行度率则反之。皆以差及并,加減日度中率,各为日度变率。其水星疾行,直以差(以)[及]并加減度之中率,为变率。其日直因中率为变率,不烦加減也。([30], 2103 页)

该算法的目的是通过加入行星中心差,对各段给出的平时间和平度数作修正,利用相邻两段目的进退变率计算各段目的修正量。原文以进退变率的同名、异名区分修正量的符号,用现代数学语言表示直接以带符号计算的后段目进退变率减与之相邻的前段目进退变率^[32],便可得到各段目的第一次修正值。

在此基础上计算变行日(度)定率,其术文称:

Ⅶ-15 求变行日度定率:以定合日与后变初日先后定数,同名相消为差,异名者相从为并。四而一,所得满辰法为度。乃以盈加缩减其合后伏度之变率及合前伏日之变率。金水夕合日度,加減反之。其二留日之变率,若差于中率者,即以所差之数为度,各加減本迟度之变率。谓以多于中率之数加之,少于中率之数减之。以下加減准此。退行度变率,若差于中率者,即倍所差之数,各加減本疾度之变率。其木土二星,既无迟疾,即加減前后顺行度之变率。其水星疾行度之变率,若差于中率者,即以所差之数为日,各加減留日变率。其留日变率若少不足减者,即侵减迟日变率也。各加減变率讫,皆为日度定率。其日定率有分者,前后辈之。辈,配也。以少分配多分,满全为日,有余转配。其诸变率不加減者,皆依变率为定率。([30], 2103-2104 页)

该算法的目的,是在变行日(度)变率的基础上加入第二次修正得到变行日(度)定率。此次修正并不是对所有段目进行修正,且不同行星的不同段目对应的修正值也有所差异。如“合后伏”的度变率与“合前伏”的日变率,需要用太阳中心差来修正到相应的度定率与日定率,金、水二星在该项的修正与外行星符号相反。“迟”段的度变率需用“二留”日中率与日变率的变化量修正为度定率。“迟疾”段的度变率需要加倍“退行”段度中率与度变率的变化量修正为度定率,木星与土星无“迟疾”段,则将修正量加減到对应的“顺行”段。水星“留”段的日变率需用“疾”段度中率与度变率的变化量修正为日定率,若“留日”的变率不足减,则减去“迟日”的变率。对于该算法,用其他段目的修正量作为本段目修正值,其天文含义尚不明确。

3 《大衍历》行星计算精度及误差原因分析

3.1 《大衍历》行星位置计算精度讨论

《大衍历》首创“五星爻象历”,以行星中心差相关量的形式加入到平合及日(度)中率的修正中,因其算法设计相当程序化,本文利用 Python 语言将历法术文进行程序实现。极黄经与黄经之间存在微小差异^①,但与《大衍历》中“五星爻象历”造成的系统误差相比,本文将忽略这一影响因素,将《大衍历》的黄道宿度对应于黄经。([1], 536 页)此外,《大衍历》颁行于开元十七年(729),至乾元元年(758)不再行用,共使用 29 年,而黄经周年总岁差为 70.61(年/度),在此也将岁差的微小变动值忽略。本文使用 DE422 行星历表提取理论数据^[34],以上计算时选取的黄赤交角数据为随儒略世纪数变化的公式计算求得,现已转化为公元 724 年的所求值 23.60° 。之后再将历法计算所得极黄经与行星历表所提取的理论黄经进行对比,二者之差便是黄经误差。因《大衍历》中对动态表中的变行日中率做了修正处理,计算过程中会出现前一会合周期的最后一日与下一会合周期第一日日期衔接不上的问题。此处采取的处理方法为:将历法中每一年计算所得行星与太阳合的日期与理论日期相对应,若上一年计算数据日期超过下一年合的日期,则重合的部分用下一年合开始的数据覆盖掉上一年;若上一年计算数据日期与下一年合的日期之间有几天的间隔,则间隔的部分为空。^②

本文根据《大衍历》算法,计算了唐开元十二年(724)冬至起算后 35 个完整会合周期内每日夜半位置。其中开元十二年(724)冬至后木星与太阳第一次合发生时间为 725 年 11 月 5 日;火星与太阳第一次合发生时间为 725 年 8 月 5 日;土星与太阳第一次合发生时间为 725 年 1 月 4 日;金星与太阳第一次合发生时间为 726 年 4 月 10 日;水星与太阳第一次合发生时间为 725 年 4 月 8 日。

下图 2 至图 6 分别给出唐开元十二年(724)冬至起算后 35 个完整会合周期内每日夜半位置黄经误差散点图,其中纵坐标表示历法黄经与理论黄经的差值,横坐标表示日数。

① 日本科学史家数内清指出,中国古代没有“黄极”概念,中国历法中天体的“黄经”指将通过天体的赤经圈延长至黄道,二者的交点与春分点之间的距离,他称为“极黄经”,参见[33], 225-226 页。由于黄赤夹角的存在,以及行星轨道与黄道之间有微小夹角,行星的极黄经与黄经之间存在差异。用球面三角方法,可以求出木星、火星、土星、金星、水星的黄经与极黄经之差的最大值分别为 0.57° 、 0.81° 、 1.10° 、 1.48° 和 3.08° 。由于《大衍历》行星计算误差较大,而行星的黄经和极黄经之差较小,因此本文的讨论忽略了行星黄经和极黄经之间的差异。

② 如在计算火星 732 年冬至起算后首次合的历法推算时间为 734 年 3 月 16 日,但 729 年的变行日定率为 802 日,即第 802 天的日期为 734 年 3 月 19 日,此时相邻两周期间重合 3 日,则用 732 年第一日开始的数据覆盖掉这 3 日;又如 724 年计算所得的变行日定率结果为 762 日,即第 762 天的日期为 727 年 9 月 1 日,但 725 年冬至起算后首次合的历法推算时间为 727 年 9 月 7 日,此时相邻两周期间相隔 6 日,则中间 6 日数据为空。

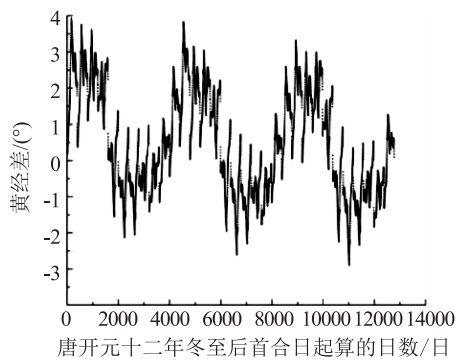


图2 《大衍历》木星黄经误差散点图

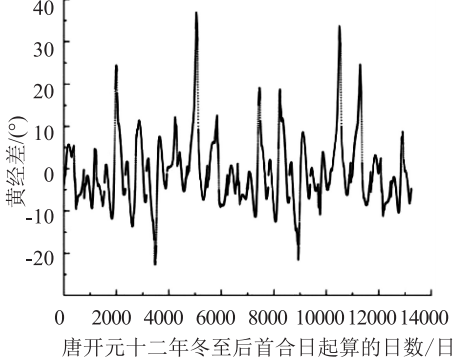


图3 《大衍历》火星黄经误差散点图

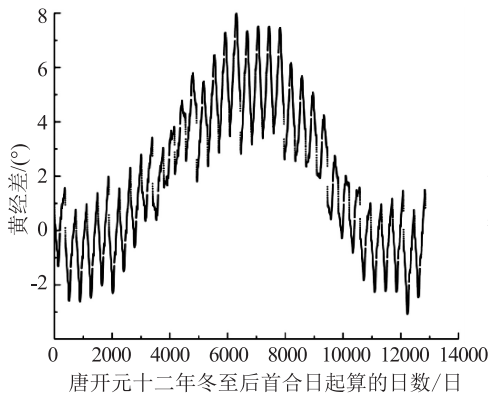


图4 《大衍历》土星黄经误差散点图

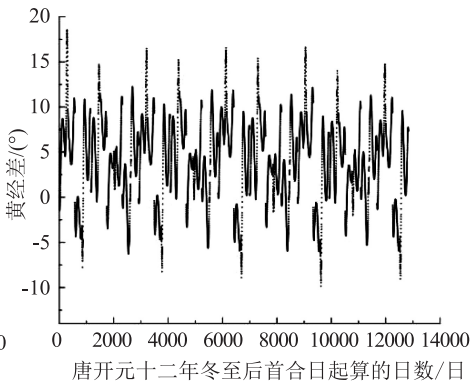


图5 《大衍历》金星黄经误差散点图

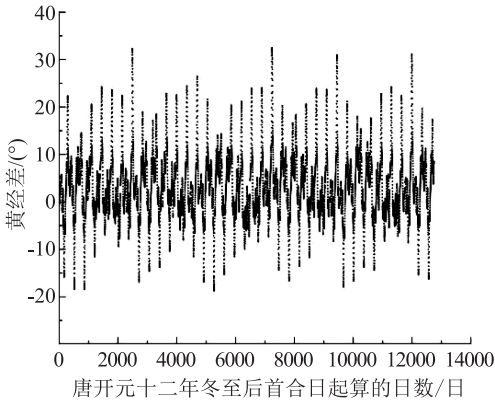


图6 《大衍历》水星黄经误差散点图

五星黄经绝对误差所占百分率及数据量见表4—8。

表 4 《大衍历》木星绝对误差所占百分率及数据量

绝对误差范围/(°)	<0.5	<1.0	<1.5	<2.0	<3	<4
所占百分比/(%)	21.74	41.08	65.41	79.68	97.19	100
数据量/个	2 775	6 010	8 350	10 171	12 406	12 765

表 5 《大衍历》火星绝对误差所占百分率及数据量

绝对误差范围/(°)	<5	<10	<15	<20	<30	<40
所占百分比/(%)	48.73	84.49	94.11	97.04	99.16	100
数据量/个	6 453	11 188	12 462	12 850	13 131	13 242

表 6 《大衍历》土星绝对误差所占百分率及数据量

绝对误差范围/(°)	<1.5	<3	<4.5	<6	<7.5	<8
所占百分比/(%)	40.15	62.99	79.68	92.70	99.34	100
数据量/个	5 159	8 094	10 239	11 912	12 765	12 850

表 7 《大衍历》金星绝对误差所占百分率及数据量

绝对误差范围/(°)	<1	<3	<5	<10	<15	<20
所占百分比/(%)	11.74	29.6	53.93	90.8	99.21	100
数据量/个	1 506	3 799	6 921	11 652	12 732	12 833

表 8 《大衍历》水星绝对误差所占百分率及数据量

绝对误差范围/(°)	<5	<10	<15	<20	<30	<35
所占百分比/(%)	55.89	83.62	92.42	96.82	99.7	100
数据量/个	7 125	10 660	11 782	12 343	12 710	12 748

其中,对五星计算数据量、平均误差、绝对值平均误差、绝对误差最大值、绝对误差之均方差统计结果如表 9 所示。

表 9 五星各误差数据统计表

	木星	火星	土星	金星	水星
计算数据量(个)	12 765	13 242	12 850	12 833	12 748
平均误差(°)	0.49	-0.77	1.99	3.98	3.15
绝对值平均误差(°)	1.24	6.13	2.58	5.15	5.83
绝对误差最大值(°)	3.93	36.96	7.99	18.52	32.5
绝对误差之均方差	0.71	28.59	4.07	11.56	29.02

通过表 4—9 对所计算行星 35 年内约 13 000 个数据的每日夜半黄经误差各段分布及统计结果来看,木星、土星的绝对误差范围分布较为均匀,木星绝对误差最大值为 3.93°,土星绝对误差最大值为 7.99°;火星、金星、水星的绝对误差范围分布相对分散,且

金星绝对误差最大值为 18.52° , 火星绝对误差最大值为 36.96° , 水星绝对误差最大值为 32.5° , 结果明显高于木星与土星。考虑到火星存在 15—17 年的大冲周期, 通过考察行星历表所提取的 724—738 年间火星发生冲的日期与绝对误差峰值附近的计算结果, 发现当冲日期为 739 年 6 月 11 日与 754 年 5 月 16 日时, 二者附近所在的黄经绝对误差均超过 30° , 与火星 15 年的大冲周期相对应。若火星冲日日期分别在 730 年 12 月 25 日、735 年 3 月 4 日与 756 年 7 月 29 日时, 以上冲日附近所在黄经的绝对误差也均超过 20° , 因此火星冲日周期是造成火星绝对误差较大的一个因素。

3.2 行星位置误差原因分析

行星的位置误差受到多种因素影响。用来修正行星中心差的爻象历将影响定合日期与行星动态表的修正, 而定合日期又将影响起点误差, 行星动态表影响一个会合周期内的误差变化情况。因此, 下面将对《大衍历》行星爻象历、定合日期、行星动态表分别加以分析, 通过计算探究这些因素对行星位置造成的误差影响效果。

3.2.1 《大衍历》行星爻象历误差分析

在第 1 节中, 我们以火星为例, 讨论了《大衍历》五星爻象历的结构及其含义。在计算行星位置时, 爻象历中的进退积需要与动态表中各段目给出的乘数与除数^① 配合使用, 其修正项可以表示为:

$$\Delta = \frac{\text{进退积}}{\text{除数} \div \text{乘数}} \quad (40)$$

Δ 为《大衍历》中的进退变率。已有的研究成果表明, 《大衍历》中与进退积有关的修正项 Δ 与宋代历法五星盈缩历中的盈缩差含义相同。由于目前内行星盈缩差的算法模型尚未得到很好的揭示, 因此本文仅讨论《大衍历》中与外行星爻象历相关的误差。已有研究表明([28], 397-398 页), 中国古代外行星盈缩差的数学模型可以表示为:

$$y \approx \frac{c_p}{1 - v_p} \quad (41)$$

其中, y 为盈缩差, c_p 为行星中心差, v_p 为行星平均公转角速度。中心差 c_p 可以展开为平近点角 M 的级数, 若取行星轨道偏心率 e 至二乘方, 根据现代天文学知识^[35], 行星中心差可表示为:

$$c = 2e \times \sin M + \frac{5}{4}e^2 \times \sin 2M \quad (42)$$

由(42)式求出木星、火星、土星盈缩差的理论结果的最大值依次为 6° 、 22.39° 、 6.52° ; 根据(40)式, 可求得木星、火星和土星的修正项 Δ 的最大值依次为 4.97° 、 26.64° 、 9.23° , 由此求出《大衍历》中与外行星爻象历相关的修正项的最大误差绝对值依次为 1.03° 、 4.25° 、 2.71° 。

3.2.2 《大衍历》定合日期计算

下面给出由上节历法术文推“推五星平合”、“求常合”、“求定合”三个算法自公元

① 《大衍历》中动态表各段目乘数与除数略有差异, 此处均统一采用“合后伏”段目的乘数与除数数据。

724 年起算后 35 年的定合日期。首先计算历法冬至时刻^①,历法冬至具体日期可根据理论冬至日期及日名确定^[36]。计算求得年天正冬至夜半到五星第一次合的真正日数,将其换算为对应日期,理论数据日期参考中国黄道星空软件作对照。表 10 中历法定合日表示为 d , 理论定合日表示为 d' 。“-”表示所求年与上年计算所得为同一定合日。水星一年有 3—4 次合,下表仅列出所求年第一次合对应的历法定合日与理论定合日。

表 10 五星首合日计算表

年份	木星		火星		土星		金星		水星	
	d	d'	d	d'	d	d'	d	d'	d	d'
724 年	725-11-5	725-11-2	725-8-5	725-8-9	725-1-4	725-1-2	726-4-10	726-4-5	725-4-8	725-4-9
725 年	726-12-6	726-12-4	727-9-7	727-9-16	726-1-15	726-1-13	—	—	726-3-21	726-3-24
726 年	728-1-9	728-1-6	—	—	727-1-26	727-1-26	727-11-4	727-11-2	727-3-3	727-3-7
727 年	—	—	729-10-28	729-10-28	728-2-7	728-2-7	729-6-12	729-6-12	728-2-13	728-2-19
728 年	729-2-12	729-2-8	—	—	729-2-19	729-2-19	—	—	729-1-25	729-2-1
729 年	730-3-20	730-3-19	732-1-1	731-12-22	730-3-4	730-3-3	731-1-23	731-1-18	730-1-8	730-1-14
730 年	731-4-26	731-4-26	—	—	731-3-18	731-3-17	—	—	730-12-21	730-12-26
731 年	732-5-31	732-6-1	—	—	732-4-1	732-3-30	732-8-17	732-8-18	732-3-31	732-4-2
732 年	733-7-5	733-7-5	734-3-16	734-3-3	733-4-16	733-4-14	734-4-7	734-4-2	733-3-13	733-3-17
733 年	734-8-7	734-8-7	—	—	734-5-1	734-4-29	—	—	734-2-23	734-2-29
734 年	735-9-8	735-9-7	736-5-10	736-5-3	735-5-16	735-5-14	735-11-1	735-10-29	735-2-5	735-2-12
735 年	736-10-8	736-10-7	—	—	736-5-31	736-5-28	737-6-10	737-6-10	736-1-19	736-1-25
736 年	737-11-8	737-11-7	738-6-23	738-6-19	737-6-16	737-6-12	—	—	736-12-31	737-1-6
737 年	738-12-11	738-12-8	—	—	738-7-2	738-6-27	739-1-20	739-1-16	738-4-10	738-4-12
738 年	740-1-13	740-1-11	740-7-22	740-7-27	739-7-17	739-7-12	—	—	739-3-24	739-3-27
739 年	—	740-1-11	—	—	740-7-31	740-7-26	740-8-14	740-8-16	740-3-5	740-3-9
740 年	741-2-17	741-2-15	742-8-22	742-9-1	741-8-14	741-8-9	742-4-4	742-3-31	741-2-15	741-2-21
741 年	742-3-25	742-3-24	—	—	742-8-28	742-8-23	—	—	742-1-29	742-2-4
742 年	743-5-1	743-5-1	744-10-5	744-10-10	743-9-11	743-9-5	743-10-29	743-10-28	743-1-11	743-1-17
743 年	744-6-5	744-6-6	—	—	744-9-23	744-9-17	745-6-8	745-6-8	743-12-24	743-12-29
744 年	745-7-10	745-7-10	746-12-6	746-11-28	745-10-5	745-9-29	—	—	745-4-3	745-4-4
745 年	746-8-11	746-8-12	—	—	746-10-17	746-10-11	747-1-17	747-1-14	746-3-16	746-3-20
746 年	747-9-12	747-9-12	749-2-11	749-2-2	747-10-28	747-10-23	—	—	747-2-26	747-3-3
747 年	748-10-12	748-10-12	—	—	748-11-7	748-11-2	748-8-12	748-8-14	748-2-9	748-2-14
748 年	749-11-13	749-11-11	—	—	749-11-18	749-11-14	750-4-2	750-3-29	749-1-21	749-1-27
749 年	750-12-15	750-12-13	751-4-19	751-4-13	750-11-29	750-11-25	—	—	750-1-3	750-1-9

① 历法冬至时刻参考《大衍历》第一章步中朔“推天正中气”算法,参见[30],2056,2218 页。

续表10

	木星		火星		土星		金星		水星	
750 年	—	—	—	—	751-12-9	751-12-6	751-10-27	751-10-26	751-4-14	751-4-14
751 年	752-1-18	752-1-16	753-6-8	753-6-2	752-12-18	752-12-17	753-6-6	753-6-5	752-3-26	752-3-28
752 年	753-2-22	753-2-20	—	—	—	—	—	—	753-3-8	753-3-12
753 年	754-3-30	754-3-30	755-7-12	755-7-13	753-12-30	753-12-28	755-1-15	755-1-11	754-2-20	754-2-24
754 年	755-5-6	755-5-6	—	—	755-1-10	755-1-8	—	—	755-2-1	755-2-7
755 年	756-6-10	756-6-10	757-8-9	757-8-18	756-1-21	756-1-21	758-8-9	756-8-11	756-1-14	756-1-20
756 年	757-7-14	757-7-15	—	—	757-2-1	757-2-1	758-3-31	758-3-26	756-12-27	757-1-1
757 年	758-8-16	758-8-16	759-9-17	759-9-25	758-2-14	758-2-13	—	—	758-4-6	758-4-7
758 年	759-9-16	759-9-16	—	—	759-2-27	759-2-26	759-10-24	759-10-23	759-3-19	759-3-22

根据上表,木星历法计算定合日期与理论日期最大相距 4 日,724—758 年间平均相差 1.14 日;火星历法计算定合日期与理论日期最大相距 12 日,平均相差 7.26 日;土星历法计算定合日期与理论日期最大相距 6 日,平均相差 2.86 日;金星历法计算定合日期与理论日期最大相距 5 日,平均相差 2.71 日;水星历法计算定合日期与理论日期最大相距 7 日,平均相差 4.4 日。因计算数据较多,经统计《大衍历》五星首合日历法黄经与理论黄经差,最大依次为 0.78°、-3.83°、0.94°、-0.93°、1.2°。^①

上述统计中木星历法推算定合日期结果最佳,火星推算结果较差。但以当时观测水平来看,《大衍历》所给“定合日算”的算法计算合所在日已较为准确。

3.2.3 《大衍历》行星动态表精度计算

唐泉对行星动态表“留”与“退”两段目的精度做了详细分析,并给出行星理论向径与平合方向的夹角“入平合度”公式^[37]。在其工作基础上,本文以运动变化较为明显的火星为例,计算了《大衍历》火星动态表各段目理论“入平合度”与历法所给数据相比较的误差绝对值,以及各段节点处的误差绝对值,结果列为表 11。其中,“变行日中率”与“变行度中率”两栏均为术文所给常数,为计算方便,均已化为小数,单位为古代“度”。

表 11 《大衍历》火星动态表精度

变行目	变行日中率 单位:(日)	变行度中率 单位:(度)	理论变行度中率 单位:(度)	变行度中率误差 单位:(度)	段目节点处误差 单位:(度)
合后伏	71.97	54.18	50.78	3.4	3.4
前疾	214	136	140.08	-6.03	-2.63
前迟	60	25	21.07	3.57	0.93
前留	13		0.18	-0.18	0.75

① 此处求五星首合日历法黄经时,在定合度的基础上加入定合日太阳中心差的影响、冬至点黄经 270°以及“定合日算”来展开计算。

续表11

变行目	变行日中率 单位:(日)	变行度中率 单位:(度)	理论变行度中率 单位:(度)	变行度中率误差 单位:(度)	段目节点处误差 单位:(度)
前退	31	8.62	退 7.76	-0.74	0.01
后退	31	8.62	退 7.76	-0.74	-0.73
后留	13		0.18	-0.18	-0.92
后迟	60	25	21.07	3.57	2.65
后疾	214	136	140.08	-6.03	-3.38
合前伏	71.97	54.97	50.78	3.40	0.02

由上表数据可以看出,《大衍历》火星在一个会合周期内各段目理论计算变行度中率与历法所给长度绝对值最大相差 6.03°,各段目节点处误差最大相差 3.4°。计算其余四星在一个会合周期内各段目理论计算与历法所给长度绝对误差相差最大,化为现代度,木、火、土、金、水星结果依次为 1.15°、5.95°、0.74°、4.64°、2.79°;各段目节点处误差最大相差 0.9°、3.35°、0.77°、2.78°、3.13°。通过考察《大衍历》之前部分历法火星动态表精度误差发现,《乾象历》、《景初历》、《元嘉历》、《大明历》、《正光历》、《兴和历》中,除《元嘉历》计算结果与《大衍历》较为接近外,其余历法误差最大值均在 10°上下,由此可见《大衍历》所设计的行星动态表精度已相对准确。

3.2.4 《大衍历》单一修正计算效果

因定合日期的准确性与行星中心差共同影响行星合后每日夜半位置精度的修正效果,(太阳中心差修正效果较小,暂忽略),现以偏心率较大、变化较为明显的火星为例,计算两种情形:其一,“平合日算”条件下变行日(度)中率加入爻象历修正;其二,“定合日算”条件下变行日(度)中率在不加入爻象历修正。试通过单一变量的改变,更好说明定合日期与行星中心差各自的影响结果,探讨火星历法黄经与理论黄经之差。下文以火星为例,给出两种情形下统计的数据量、平均误差、绝对值平均误差、绝对误差最大值、绝对误差之方差以及绝对误差所占百分率及数据量。

火星在第一种情形下共计算数据量 13 276 个,平均误差为-3.44°,绝对值平均误差为 9.74°,绝对误差最大值为 44.57°,绝对误差之均方差为 68.47。火星绝对误差所占百分率及数据量见表 12:

表 12 火星第一种情形下绝对误差所占百分率及数据量

绝对误差范围/(°)	<5	<10	<15	<20	<30	<40	<50
所占百分比/(%)	33.32	59.11	78.42	91.43	96.31	99.13	100
数据量/个	4 424	7 748	10 411	12 138	12 786	13 161	13 276

火星在第二种情形下共计算数据量 13 245 个,平均误差为-3.04°,绝对值平均误差为 12.98°,绝对误差最大值为 67.65°,绝对误差之均方差为 182.45。火星绝对误差所占百分率及数据量见表 13:

表 13 火星第二种情形下绝对误差所占百分率及数据量

绝对误差范围/(°)	<10	<20	<30	<40	<50	<60	<70
所占百分比/(%)	56.73	79.34	88.55	93.22	96.64	99.24	100
数据量/个	7 514	10 509	11 728	12 347	12 800	13 145	13 245

下图 7 至图 8 分别给出两种情形下五星自 724 年冬至后第一次合所在日起算,之后约 35 年每日夜半黄经误差散点图,其中横、纵坐标表示含义与图 2 至图 6 同。

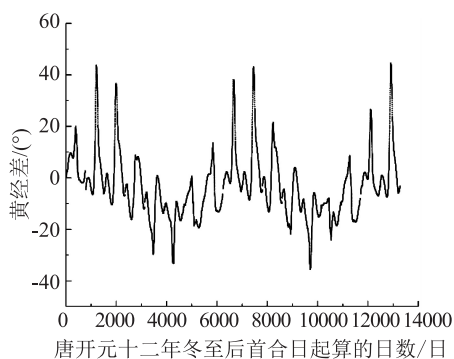


图 7 火星第一种情形下历法黄经-理论值黄经散点图

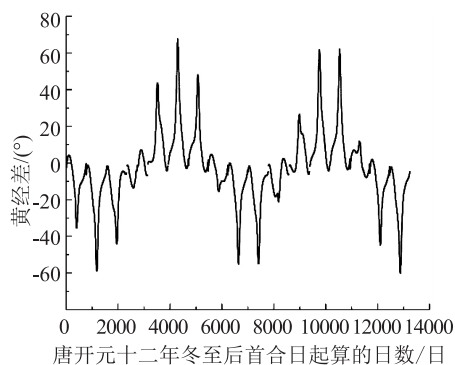


图 8 火星第二种情形下历法黄经-理论值黄经散点图

通过与图 3 和表 5 的比较发现,火星在“平合日算”条件下变行日(度)中率加入爻象历修正情况下,主要表现为绝对误差所占百分比数据变化较大;“定合日算”条件下变行日(度)中率在不加入爻象历修正情况下,主要表现为绝对误差最大值与绝对误差所占百分比数据变化均较大。因此,行星合日期主要影响绝对误差所占的百分比,而行星中心差对二者均有较大影响。经统计,第一种情形下,火星冲日日期分别在公元 728 年 11 月 17 日、737 年 4 月 13 日、743 年 10 月 31 日、745 年 12 月 11 日、752 年 3 月 27 日与 760 年 11 月 26 日时,冲日附近所在黄经的绝对误差均超过 30° 。而第二种情形下,除极少数年份外,几乎所有冲日附近所在黄经的绝对误差超过 40° 。

4 结 论

本文通过对《大衍历》“步五星术”章中常数、算表和算法的梳理以及对 6 个关键算法的详细解读,用《大衍历》计算求得木星、火星、土星、金星、水星的黄经与理论黄经相比的绝对值平均误差分别为 1.24° 、 6.13° 、 2.58° 、 5.15° 、 5.83° ,绝对误差最大值分别为 3.93° 、 36.96° 、 7.99° 、 18.52° 、 32.5° ,绝对误差之均方差为 0.71、28.59、4.07、11.56、29.02。现对行星位置精度误差产生原因做以下分析。

五星爻象历的精度是影响《大衍历》“定合日算”与行星位置精度的主要因素。根据 3.2.1 节将爻象历转化为宋代盈缩历的误差分析可知,《大衍历》木星、火星、土星进退变率 Δ 的误差依次为 1.03° 、 4.25° 、 2.71° ;根据 3.2.2 节历法五星定合日期与五星首合日历法黄经与理论黄经差最大依次为 0.78° 、 -3.83° 、 0.94° 、 -0.93° 、 1.2° ,可见,因加入五星

爻象历的修正因素,起始点黄经便产生一定误差。其中水星爻象历误差最大,外行星中火星最大,因此水星与火星计算相比其他行星计算更为困难。

历法所给五星会合周期常数精度及五星的偏心率影响其“定合日算”及行星位置精度。由 3.2.2 节计算结果可知,《大衍历》在推算五星冬至与第一次合的日期较为准确,其中木星计算最精确,历法计算日期与理论日期平均仅相差 1.14 日;金星与土星相当,金星平均相差 2.71 日,土星平均相差 2.86 日;水星与火星计算较其他三颗星差别较大,水星平均相差 4.4 日,火星平均相差 7.26 日。结合现代天文学知识可知,五星的会合周期依次约为 398.88 日、779.40 日、378.09 日、583.92 日、115.88 日。《大衍历》历法所给五星会合周期常数依次约为 398.87 日、779.94 日、378.09 日、583.89 日、115.88 日。通过比较《大衍历》五星常数与现代理论值,历法给出的木、土、水三星会合周期常数较准确,火、金二星会合周期稍有偏差。木星、火星、土星、金星、水星的轨道偏心率依次为 0.048、0.093、0.055、0.007、0.206,再结合五星轨道偏心率可知,水星的偏心率最大。因此,五星会合周期精度及偏心率共同影响五星的“定合日算”及位置精度。

因五星“定合日算”存在误差,导致五星在爻象历中的位置产生误差,进而影响五星的位置精度。结合 3.1 节五星位置精度的计算结果及 3.2.4 节对火星的单一修正分析可知,“定合日算”主要影响绝对误差所占的百分比,行星中心差对绝对误差所占百分比以及绝对误差最大值均有较大影响。此外,结合对火星冲日的分析可知,火星在冲日附近的绝对误差值多数偏大,因此火星的冲日周期也是影响火星绝对误差最大值的一个因素。

近日点黄经误差影响“定合日算”及行星位置精度。按《大衍历》术文,首先要计算“平合日算”在爻象历中的位置,通过该位置与冬至太阳黄经 270° 关系,可计算出五星近日点黄经。根据陈美东对《大衍历》五星近日点黄经误差的分析,木、火、土、金、水五星在 728 年的近日点黄经误差分别为 8.9° 、 12.5° 、 1.6° 、 146.3° 、 -131.25° ([9], 427 页)。由误差结果可看出,作为内行星的金、水二星黄经误差最大。但从“定合日算”及行星位置的误差计算结果可知,该因素对二者的影响并不大。

“五星动态表”误差影响行星位置精度。通过 3.2.3 节对《大衍历》“五星动态表”精度的分析可知,木、火、土、金、水五星在一个会合周期内各段目理论计算变行度中率与历法所给绝对值最大相差依次为 1.15° 、 5.95° 、 0.74° 、 4.64° 、 2.79° ;各段目节点处误差最大相差依次为 0.9° 、 3.35° 、 0.77° 、 2.78° 、 3.13° 。因此,该因素也对行星位置精度的计算造成一定误差。

参 考 文 献

- [1] 曲安京. 中国数理天文学[M]. 北京:科学出版社, 2008:537-540.
- [2] 唐泉. 中国古代五星定见算法的沿革与分期[J]. 广西民族大学学报(自然科学版), 2013, 19(1):36-40+78.
- [3] 唐泉. 中国古代五星定合算法的沿革与分期[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2012, 41(5):562-566+574.
- [4] 陈美东. 中国科学技术史(天文学卷)[M]. 北京:科学出版社, 2003:382-383.
- [5] 蕞内清. 中国历法における五星运动论[J]. 东方学报, 1956(26):90-103.
- [6] 陈美东. 我国古代对五星近日点黄经及其进动值的测算[J]. 自然科学史研究, 1985, 4(2):131-143.

- [7] 陈美东. 我国古代的中心差算式及其精度[J]. 自然科学史研究, 1986, 5(4):289-297.
- [8] 陈美东. 中国古代五星运动不均匀性改正的早期方法[J]. 自然科学史研究, 1990, 9(3):208-218.
- [9] 陈美东. 古历新探[M]. 沈阳:辽宁教育出版社, 1995:406-464.
- [10] 刘金沂. 麟德历行星运动算法[J]. 自然科学史研究, 1985, 4(2):144-158.
- [11] 张培瑜, 陈美东, 薄树人, 等. 中国古代历法[M]. 北京:中国科学技术出版社, 2008:683-713.
- [12] 曲安京, 纪志刚, 王荣彬. 中国古代数理天文学探析[M]. 西安:西北大学出版社, 1994:90-100.
- [13] 曲安京. 中国历法与数学[M]. 北京:科学出版社, 2005:72-74.
- [14] 曲安京. 中国古代的行星运动理论[J]. 自然科学史研究, 2006, 25(1):1-17.
- [15] 唐泉, 曲安京. 北宋的行星计算精度——以《纪元历》外行星计算为例[J]. 中国科技史杂志, 2009, 30(1):46-54.
- [16] 唐泉. 《授时历》外行星计算精度[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2009, 39(5):911-914.
- [17] 唐泉. 宋元时期内行星计算精度——以《纪元历》和《授时历》为例[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2013, 43(1):168-172.
- [18] TANG Q, QU A. The Motion of Mars in the Sovereign Pole System (A. D. 600)[J]. *Journal for the History of Astronomy*, 2017, 48(4): 432-459.
- [19] TANG Q. A Study of Planetary Theory in the Great Expansion System (Dayan li 大衍历, 727CE): The Case of Mars [J]. *Chinese Annals of History of Science and Technology*, 2022, 6(1): 1-39.
- [20] 张健. 授时大统历法五星推步精度研究[J]. 天文学报, 2008, 49(2):207-215.
- [21] 李勇. 《授时历》五星推步的精度研究[J]. 天文学报, 2011, 52(1):43-53.
- [22] 辛佳岱, 唐泉. 《皇极历》外行星算法及精度分析[J]. 中国科技史杂志, 2022, 43(2):263-279.
- [23] 叶杰. 《崇天历》行星算法及精度分析[J]. 咸阳师范学院学报, 2022, 37(2):66-76.
- [24] 胡铁珠. 《大衍历》交食计算精度[J]. 自然科学史研究, 2001, 20(4):312-319.
- [25] 胡铁珠. 大衍历与苏利业历的五星运动计算[J]. 自然科学史研究, 1990, 9(3):219-231.
- [26] ANG T. *I-Hing* (683-727 A. D.): *His Life and Scientific Work*[M]. Kuala Lumpur: University of Malaya, 1979: 72-316.
- [27] 宫岛一彦. 大衍历的五星算法[C]//山田庆儿. 中国古代科学史论. 京都:京都大学人文科学研究所, 1989:337-362.
- [28] 唐泉. 再论中国古代的五星盈缩差算法[J]. 自然科学史研究, 2011, 30(4):393-408.
- [29] 唐泉. 中国唐宋时期五星盈缩差算法的演变轨迹——从交象历到盈缩历[J]. 科学技术哲学研究, 2016, 33(2):76-83.
- [30] 中华书局编辑部. 历代天文律历等志汇编(七)[M]. 北京:中华书局, 1976:2093-2096.
- [31] 唐泉. 唐代行星理论中的乘数与除数[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2011, 40(6):643-648.
- [32] 王应伟. 中国古历通解[M]. 沈阳:辽宁教育出版社, 1998:316-317.
- [33] 蕤内清. 中国的天文历法[M]. 杜石然, 译. 北京:北京大学出版社, 2017.
- [34] 张文昭, 平劲松, 李文潇. 3种典型的太阳系大行星历表的对比分析[J]. 中国科学院大学学报, 2021, 38(1):114-120.
- [35] 赵进义. 天体力学[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1983:104.
- [36] 张培瑜. 三千五百年历日天象[M]. 郑州:大象出版社, 1997:931-932.
- [37] 唐泉. 中国古代五星动态表的精度——以“留”与“退”两个段目为例[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2013, 42(4):463-470.

A Study on Planetary Theory and the Accuracy of Calculations of Planetary Positions in the Great Expansion System

LV Yaohong, TANG Quan

(*Institute for Advanced Study in History of Science, Northwest University, Xi'an 710127, China*)

Abstract Planetary theory is one of the core contents of traditional Chinese mathematical astronomy. There is a relatively complete planetary algorithm in the Triple Concordance System, the first system which is well preserved in China, and related content is found in all subsequent systems. Since predicting the positions of the five planets was one of the criteria for judging whether a system was effective, the planetary theory was constantly improved. The Great Expansion System occupies a very important position in the development history of Chinese planetary theory because of its many innovations. This paper comprehensively explains the planetary algorithm in the Great Expansion System, simulates the planetary algorithm in the Great Expansion System using the computer program Python, discusses the accuracy of the calculations of planetary positions in the 35 years when the Great Expansion System was used, and concludes that the maximum error of the longitude of Jupiter, Mars, Saturn, Venus and Mercury calculated by the system is as follows: 3.93° , 36.96° , 7.99° , 18.52° , 32.5° . Further analysis shows that the main factors affecting the error of the calculation of the planets in the Great Expansion System are as follows: the planetary Argument of Aspectual and Interval Count (the table of planetary equations of the center), the precision of planetary perihelion longitude, the date of conjunction of the planet with the sun and the constant of the planetary synodic period.

Keywords the Great Expansion System; planetary theory; planetary Argument of Aspectual and Interval Count; accuracy