《自然科学史研究》 第44卷 第2期（2025年）：127—148
Studies in the History of Natural Sciences Vol. 44 No. 2(2025)

北大秦简《算书丙种》研究

夏庆卓[1,2] 邹大海[1]✉
（1. 中国科学院 自然科学史研究所，北京 100190；2. 中国科学院大学，北京 100049）

摘 要 新近公布的北京大学藏秦简牍中有三种前所未知的数学著作，《算书丙种》是其中篇幅适中、有待系统研究的一种。本文从体例、编纂特点、所包含的知识类型和数学方法及相关背景等方面对《算书丙种》进行系统分析，指出它是抄本而非手稿本，具有以算法为中心的特点；其编作者在体系方面有较多考虑，但不够精心；它为刘徽关于《九章算术》有其先秦祖本的记载提供了新证，并为认识《九章算术》以外的数学知识类型提供了素材和依据，丰富了我们对于中国早期数学和社会经济的认识。

关键词 北京大学藏秦简牍；《算书丙种》；《九章算术》；中国数学史；秦汉史
中图分类号 N092
文献标识码 A **文章编号** 1000-0224(2025)02-0127-22

1 引 言

2023年5月，北京大学藏秦简牍（以下简称为“北大秦简”）正式公布[1]，其中有到目前为止出土简牍中体量最大的一批数学文献，特别是有三种前所未知、内容丰富的算书，极为宝贵。这三种算书原无标题，整理者分别定名为《算书甲种》、《算书乙种》和《算书丙种》。[2]学术界对这些算书的研究，主要集中在文字释读和简文解释方面，也有对某些问题的零散讨论[3-9]，而在对算书的综合性研究方面，则只有邹大海与夏庆卓对《算书乙种》做了综合性研究[4]。本文拟对《算书丙种》做系统性探讨。

《算书丙种》是北大秦简卷三的绝大部分。整理者写有一篇关于卷三的《说明》，置于此卷的释文和注释之前，简单介绍了简的规格，按《九章算术》的分类将《算书丙种》的内容进行了归类，认为它与《算书甲种》的算题类别顺序基本一致，进而主张“最迟在战国晚期至秦代，算书类古书已形成比较稳定的文本结构”。《说明》还提到田三匝（陌）术为前所未知，并提到圆田术中的“周乘周，十三成一”“证明当时人可能已认识到圆周率的数值

收稿日期：2025-01-14；**修回日期**：2025-04-15。
作者简介：夏庆卓，1995年生，甘肃庆城人，博士研究生，研究方向为出土简牍与数学史、古代中国与古希腊比较数学史。邹大海，1965年生，湖南新化人，研究员，博士生导师，研究方向为中国数学史、中国早期科学思想史，Email：dahaiz@ihns.ac.cn。
基金项目：国家社科基金冷门绝学研究专项“《北京大学藏秦简牍》数学文献研究”（项目编号：23VJXG012）。

应略大于三”。[10]这些描述很有价值,但不够深入,也难以反映《算书丙种》内容及价值的全貌。本文拟主要从体例、编纂特点、所包含的知识类型和数学方法以及与《九章算术》的关系等方面,对《算书丙种》和它对中国早期数学史研究的价值进行系统的探讨。

2 《算书丙种》的体例与编纂特点

《算书丙种》所在的卷三共包括 82 枚简,简宽 0.5—0.7 厘米,完整简长 22.9—23.2 厘米[10],约合当时一尺之长。简一至简六六共 66 枚简为《算书丙种》,之后是 5 枚记账文书,最后是 11 枚空白简。[10]简册有三道编绳,单面书写,简文字体为秦隶,保存状况一般,部分竹简有小范围残缺(但不涉及文字),简文中有少部分文字完全磨灭或漶漫难识([10],336-357 页),但这些问题基本上不影响我们对《算书丙种》做分析。

2.1 《算书丙种》中的符号

《算书丙种》凡 66 枚简,简文中出现的符号有黑色方块“■”、墨点“•”、勾识符号“レ”和重文号“=”四种。重文号“=”的常见功能,除了表示文字的重复以外,还作为合文的标记。重文号在《算书乙种》中共出现 8 次,都只表示将其上文字重复一次,而不作为合文的标记。黑色方块、墨点和勾识符号在简牍中都有分隔文本的作用,但它们在《算书丙种》中的具体分隔功能不尽相同。

黑色方块在简文中共出现 18 次,有 1 处作为全书结束的标志,有 16 次在竹简的天头,均作为一个完整条目开始的标志;还有 1 处比较特殊,出现在简五四的中部位置。此简之前的简五三的天头处有黑色方块,两枚简共同组成一个条目,计算“堤、垣、渠”这类立体的体积。此条分三部分,首先是“堤、垣、渠”体积(容积)的一般性算法,然后以墨点开头,下接一个计算“垣”体积的算题,而后以这个黑色方块开头,下接一个计算“渠”容积的算题。两个算题都是前面一般性算法的应用,两处的分隔符号照理都应为墨点,实际却有一处用黑色方块,这很可能是书手的失误。

墨点所分隔的文字单元比黑色方块分隔的小(很可能属于抄写失误的一处黑色方块除外),比勾识符号分隔的大。墨点的前后都是含义完整的文本单元。如简二八至简三〇组成的算题及其算法:

> ■圜(圆)田周卅步,令三而一为径=,(径)十步,为田卄(七十)五步。・其述(术)曰:半周半径相乘即成。・一述(术)曰:周乘二八周,十三成[一]。・一述(术)曰:径乘周,四而成一。・一述(术)曰:参(三)分周为从(纵),四分周为广,相乘即成。・述(术)二九曰:径乘径,四成三。三〇① ([10],345、375-376 页)

其中,第一个墨点前面是一个算题,每个墨点之后是一条完整的术文。

勾识符号在简文中共出现 10 次。其中,有 9 次集中出现在以“同分”开头的条目(此

① 引用原文时,对于假借字、异体字,在其后以圆括号“( )”注出其本字或通行字,圆括号还用来括注重文号所重之字;对于错字和衍文,外加尖括号“<>”;对于校改后的文字和校补的文字,外加方括号“[ ]”;对于残损字,据残存字迹推断的,用黑方括号“【 】”注明推断出来的文字;对于不能识别的文字,如可以确定字数则每一字以一正方形符号“□”表示,如果不能确定字数,以省略号“……”表示。单独的引文用楷体,其中的下标宋体小字,表示简号。

部分由简三三至简三七组成)。在简三四中对应文本为“三分一ㄴ四分一ㄴ五分一ㄴ六分一ㄴ七分一ㄴ八分一ㄴ九分一”,在简三五中对应文本为“三分一ㄴ四分一ㄴ五分一ㄴ六分一”([10],346-347 页),可见其中的勾识符号相当于现代的顿号。有 1 次出现在简二四中,对应文本为“壹三有三ㄴ五之即成”([10],343 页),其中勾识符号表示“三”和“五”在这里的组合,与一般接连写的表示三和五两个数的“三五”及表示三乘五的“三五”都不同,在读“三五”时两字中间要停一下。根据上下文可以判断“三ㄴ五之”是 3 次乘以 5,相当于乘以 5 的 3 次方。这 10 个勾识符号都位于两个数字之间,从更宽的视角看,它们表示停顿,有 9 个的前后是语义完整的短句、词组或词;但总的来说,其分隔的文字单元比墨点要小。从勾识符号到墨点到黑色方块,其分隔的文本单元虽然越来越大,但勾识符号并不普遍用于分隔小段文本,比如前面关于少广的条目中“下有 M 分以一为 A 半为 B 三分为 C……”中,“一分为 A”、“半为 B”、“三分为 C”等等之间并不用勾识符号([10],336-343 页)。

与勾识符号的用法相对,黑色方块与墨点所领的文本,则有颇为一致的层次关系,如果忽略上述简五三中关于渠容积算法的文本对墨块的误用,则黑色方块所领的文本总是大于墨点所领的文本。这反映出《算书丙种》的编作者有意通过符号呈现文本的结构层次。但是,墨点的使用并不是系统性的。从下一节的分析可知,墨点放在问题之后术文之前是最常见的,但也有其他情形,如用墨点引导问题(第 6 条),用墨点引导答案(第 7 条),用墨点引导一定条件和相应的算法(第 9 条),还有同一条内对于同样的情形有的用墨点,有的则不用(第 2、9 条)。勾识符号在《算书丙种》中只用于数字之间的停顿,也没有普遍作为文本中系统使用的符号。因此,除了黑色方块,《算书丙种》中的其他符号都没有用作系统性的文本层次标记。

2.2　《算书丙种》的编排特征

以具体内容为主要依据,结合书写格式,可以判断《算书丙种》由 17 个文本单元构成,每个单元我们称为一个条目。其中第 2–17 条的首简在天头处都有黑色方块作标记,在原编作者看来,它们之间具有平等的并列关系。值得注意的是第 1 条,首简的天头处没有黑色方块,也没有其他符号,可见此书编者把它们与其他各条区分开来。可以认为,此条其实是作为计算基础来对待的,后面我们还会谈到这一点。所以尽管这 17 个条目是并列的,但第 1 个条目具有特殊性,它是作为计算能力的训练材料,为学习后面的内容打基础的。

这些条目是否有题名是一个值得注意的问题。第 1 条开头为“少广”二字,整理者认为可以视为“题名”([10],370 页)。这是值得商榷的。此二字确实与下面的文字“下有半……”不能连读,具有独立性。但从原简照片([10],336 页)看,“少广”与下面的文字之间既没有留更大的空间,也没有什么标记做区分,所以“少广”虽是对这一条内容的概括,但看不出编作者有用它作为题名的意图。其他各个条目,除第 10 条由于第二、三两字不能识读而难以直接判断外①,余下 15 条的首简前面的 1–4 字与后面的文字之间也没有

① 第 10 条首简前面文字的释文作“困□□粟下周自乘,……”,尽管前面的四字模糊,但可以看出各字之间的距离比较均匀,至少从这一点看,前几字不像是题名。

留更大的空间([10],343-357 页),在语义上则都可以理解为连读甚至只能理解为连读①,它们其实都没有题名。因此,第 1 条的"少广"也以不视为题名为宜。这些说明,《算书丙种》无意用题名来统领各条的内容。此书包括两个大类,一是作为基础计算技能训练的少广,即第 1 条,二是各类算法。后一类通过黑色方块置于首简的天头处来标识,共 16 个并列的条目。这 17 个并列的条目的构成方式是有差异的。

第 1 条分 8 个问题,每个问题在文本上区分得很清楚,除第一个问题紧接"少广"这个类别名外,其他都以一枚新简开头,体现了很清晰的下级结构。其他条目中,第 2 条用墨点标记一段关于 *A*(平方)里为 *B* 顷 *C* 亩 *D* 步的文字,显示了条目的下级结构,但不完善,在最后两句之间本该有一个墨点而没有用到。第 3 条没有下级知识结构。第 4 条有 5 条术文,各用 1 个墨点引导,保持了很好的一致性。第 5 条含有两段计算田三囧(陋)面积的内容,每一段各占一枚简且均未写满,每段之内又用墨点将算法和算题分隔开来,从格式上很好地体现了一条之内的两层下级结构。第 6 条与第 5 条相似,包含两部分内容,在第一部分的末简尚有剩余空间的情况下,第二部分重新用一枚新简书写。第一部分讲述两种情形下分数相加的算法,并用墨点隔开。然后是两个例题,各用墨点引导。第二部分讲分数约分,先是算题,然后用墨点引导算法。第 7 条先给出一个算题的题设,接着用墨点引导三种情况下的答案,然后用两个墨点各引导一条术文,再用墨点引导针对除不尽的情况如何处理的方法。最后一个墨点所引导的文字,是对其前一段术文的补充,可与之视为一体,不用墨点引导可能更好。第 8 条先是算题,然后用墨点引导算法。第 9 条是关于多种类粮食中随意取两种进行换算的方法,分为 13 种情形,多数情形前面有墨点引导,但有 4 种该用而没有用。是作者的不精心还是抄写者的疏忽所致,不好判断。第 10 条是一种圆锥体的体积算法,没有符号和下级结构。第 11 条讲正四棱台的体积计算,第 12 条讲圆台的体积算法,都是先列算法,然后用墨点引导一个算题。第 13 条先是 3 种物体体积(容积)的统一算法,然后列出其中两种的算题,前一种用墨点引导,后一种用黑色方块引导。如前所述,这个黑色方块应是抄写之误。第 14 条首先是含有两个立体的组合立体的条件和体积,接着是这两个立体的体积算法,每个算法之前都没有用符号引导。算法写完后简上还有剩余空间留白,然后重新用一枚简在天头处写了墨点,在第一道编绳下写其他几种立体都"同述(术)"。第 15 条是一个正比例问题,其内各部分文本(题设、提问、答案、术文)之间接续着书写,没有分隔标记。第 16 条和第 17 条都是按从第二项开始比其前一项加倍的比例进行的比例分配问题。第 16 条的答案和术文之前都用墨点标记。第 17 条的各部分之间没有标记。

《算书丙种》对同类知识的归并,主要体现在将数学结构和现实背景都很接近的多个问题或算法放在同一条之内(第 1、9、14 条)和一题多术(第 4、7 条)方面。《算书丙种》也

① 只能连读的有:第 2 条"里乘里,里也,……",第 3 条"卫(围)田述(术)曰:……",第 6 条"同分述(术)曰:……",第 7 条"枭田一亩,税十六步,……",第 8 条"取枭租,十步为三围束一,……",第 9 条"以米求粟,三母五子,……",第 11 条"乘方亭述(术)曰:……",第 12 条"乘圜(圆)困刍封池之述(术)曰……",第 13 条"堤垣渠述(术)曰……",第 14 条"刍积上广二丈,……",第 15 条"有马母百卅五,……",第 16 条"牛羊子母四为人败,……",第 17 条"有人织,日自再,……"。第 4 条"圜(圆)田周三十步,令三而一为径,……"和第 5 条"田三囧(陋)一面正一面邪者,……"也以将前两三字与后面的文字连读为更合适。

有将其他同类问题放在一起的情形，比如将不同形状和数据的田三囷（陃）算法和问题都归在第 5 条，将分数加法和约分都归到第 6 条，将同样形状的城、垣、渠体积（容积）计算归到第 13 条。但多数情形下没有做到这一点。一些相当接近的内容，比如第 7、8 两条都针对枲田产出，第 11、12 条都讨论台体，第 16、17 条都是按 $1：2：2^2：\cdots：2^n$ 的比进行的比例分配问题，第 9、15 条都是正比例问题，编者把它们都是分别单列而不是合并成一条。至于更宽泛的同类问题，如第 2—5 条都是田地面积计算，第 10—14 条都是体积（容积）的计算，则更是分别单列而非合并成一条。因此，《算书丙种》的归类具有不一致性。

北大秦简的整理者在卷三前的《说明》中说《算书丙种》的“算题内容按照《九章算术》的体例，大致可归为‘少广’、‘方田（含同分）’、‘租枲’、‘粟米’、‘商功’、‘衰分’等几大类”，“这几类算题的先后顺序与竹简‘卷四’的《算书甲种》基本一致，可见最迟在战国晚期至秦代，算术类古书已形成比较稳定的文本结构”。（[10]，367 页）这些说法有助于读者对《算书丙种》的内容有一个整体性的大致印象，但不甚精确。《九章算术》的最大类别依次是题名为“方田”、“粟米”、“衰分”、“少广”、“商功”、“均输”、“盈不足”、“方程”和“勾股”的九章。按《九章算术》的分类，北大秦简《算书丙种》的第 1 条为少广，第 2—6 条为方田，第 9 条为粟米，第 10—14 条为商功，第 15—17 条为衰分①。而关于租枲的第 7、8 两条②则超出了《九章算术》中类别的范围。可见在内容类别上，《算书丙种》相对于《九章算术》略有出入，而两书类别的顺序则相去较远。《算书丙种》和《算书甲种》都同样将少广放在方田、粟米、商功等之前，其他出土算书也存在这种情况，但也有出土算书明确不把少广放在前面的，比如北大秦简《算书乙种》甚至不含少广类内容，所以只能说将少广放在前面反映了当时一类算书而不是全部算书的共性。

2.3 《算书丙种》条目的构成特征

如前所述，《算书丙种》有 17 个条目作为大的构成单元，除第 1 条外都以首简天头处的黑色方块作为主要标识，各条目之间是平行关系。这 17 个条目的构成方式并不统一，经逐条考察后，我们将它们概括为以下 8 种类型（在下面对这 8 种类型的逐个讨论中我们用两个词描述关于计算方法的文本，如果原文用到表示“术”的“述”字③，则用“术文”；如果原文没有出现“述”则只用“算法”。但在之后讨论整体情况的语境中亦用“算法”包括两方面的情形，此时并不会导致二者混淆）。

I 型：单独的一条术文或单独的一个算法，包括第 3、10 两条。第 3 条是针对至少有一边大于 240 步的长方形田面积的一种简捷计算法“卫（围）田之述”；第 10 条是圆锥体积

① 第 15 条并不是衰分问题而是正比例问题，与《九章算术》“粟米”章前面的粮食换算问题具有相同的数学结构，用的方法实际是此章所记录的今有术。但“粟米”章与“衰分”章的划分并不以今有术和衰分术的应用为标准，“粟米”章直接运用今有术的只有前面的粮食换算问题，“衰分”章有大量粮食换算以外的问题没有用衰分术而是用今有术，第 15 条与“衰分”章的这些算题具有相同的数学结构。关于《九章算术》内容的归类方式，请参考[23]，及《中国古代数学中的〈九章算术〉体系与传统》（待刊）。

② 如果要强行按《九章算术》的类别归类，关于枲的第 8 条是正比例问题，虽然实际用到的是“粟米”章的今有术，但宜归入衰分类中；第 7 条则可更为勉强地归入含有比例杂题的均输类中。

③ 在出土文献中，表示数学方法的“术”，有“術”、“术”和“述”三个字，但《算书丙种》只用到“述”。

算法,有文字残损,但从残存的字迹推测原来可能并未写有“述”(或“术”、“術”)字。①

II 型:一条术文+算题,包括第 11—13 条。这里算题可以是一个也可以是几个,第 11、12 两条属于含一个算题的情况,第 13 条则属于含 2 个算题的情形。这三条分别讲“乘方亭述”、“乘圜困刍封池□述”、“隄垣渠述”,都是普遍性的术文。

III 型:一个算题+术文,包括第 4、7、8、14—17 条,这里的术文可以是一条也可以是多条。第 4 条讲圆面积,有 5 条普遍性术文;第 7、8 条涉及枲田租税,分别有 2 条普遍性术文、1 条带有具体数字但具有普遍性的术文;第 14 条比较特别,是一个组合立体,它由两个立体组合而成,其中每个立体各有 1 条普遍性术文;第 15—17 条各有一条针对具体数字的术文。

IV 型:计量方式+算法+算题,包含第 2 条。这是田地面积单位“里”的数量标准的形成及它的应用,先是说明什么是面积的一里,然后给出了一个算法来说明如何得到田地面积单位里所含的亩数,之后给出了按田地面积的常用单位顷、亩计量时里的数量标准,之后是 4 个算题。此条没有用到“述”字。

V 型:“算题+算法”的多个组合,包括第 9 条。它是一系列基于两种粮食之间的默认换算比例由一种求另一种的组合,表达方式上都具有形式“以甲求乙,*A* 母 *B* 子”,相当统一。注意这条中的算题(“以甲求乙”,根据甲的数量求乙的数量)是一般性的,而并非已知其中任何一种粮食的具体数量。此条含有 13 个普遍性算法。

VI 型:“算法+算题”的组合,包括第 5 条。它是两个组合,每个组合是一种三角形的一个面积算法和一个相应的算题。两个组合各自用一枚简书写,且均未占满一枚简。算法都没有用“述”来描述,但具有普遍性。

VII 型:“术文+算题”+“算题+术文”,只包含第 6 条。它前面是一个分数相加的术文和相应的例题,后面是一个约分的算题和相应的术文。前一条术文是一般性的表述,后一条术文的前面部分是一般性的表述,后面部分用具体数字表述。

VIII 型:“算法+答案+验算”的组合,只包括第 1 条。它是由 8 条特殊形式的广,分别求相应的从(纵),相当于 8 个算题及其算法的组合。

统观以上 8 种类型,可以看出:

(1)任意一种类型都含有至少一种算法。其中,用术文表示算法的有 II、III、VII 型,以及 I 型的一半,包括第 3、4、6—8、11—17 条共 12 条,约占 70.6%。这说明,在《算书丙种》中算法是最重要的、贯穿始终的,而算法的表达大多冠有“述”字,显示了在形式上对规范性的追求,但不彻底。

(2)全书共有 44 个算法,其中明显采用普遍性表述方式的有 30 个,约占 68.2%;部分采用普遍性表述的算法有 3 个,约占 6.8%;基本采用具体数字表述的算法有 11 个,占 25%。前两项占到 75%,可见《算书丙种》追求算法的一般性。值得注意的是,依赖具体

① 第 10 条在简四八上。此简天头处有黑色方块,可确定它是此条的首简。此简的下半部分留作空白,可能存在两种情况:一是此条全文就只占有简四八的前半部分,二是此简之后有写有算题的佚失简。因为与第 10 条同属体积算法且位置相邻的第 11、12、13 条的首简,都在写完术文之后紧接着就书写算题的内容,所以我们认为第 10 条很可能只是单独的算法,没有算题。

数字的 11 个算法中有 10 个算法(第 1 条的 8 个算法和第 16、17 条的 2 个算法)具有较整齐的表达方式,很容易让读者体会到其中存在的普遍性。

(3)除类型 I 的两条外,其他 7 种类型都是每一条含有至少一个算题,含有算题的条目占比约为 88.2%。这说明《算书丙种》绝大部分算法的呈现都借助了算题,反映了此书编作者对数学学习中练习的重视。

(4)前 4 种类型共 13 条的目标都具有单一性。I 型的每条就是一个算法;II 型 3 条都以一个算法为中心而用 1—2 个算题加以说明;III 型共 7 条都以解决一个算题为中心介绍一个或几个算法;IV 型以一个数量标准(有一个得到这一标准的算法)为中心,以 4 个算题说明其应用。后面的 4 种组合类型都只有各 1 条,每条之内的构成单元都具有同质性。这些说明每个条目的设置具有单一的目标。同时,组合型条目说明《算书丙种》的编作者具有以类相从的思想。

此外,从体量上看,除第 1 条用了 23 枚简外,其他各条所用的简都在 1—5 枚之间。用 2 枚简的条目最多,有 8 条,占一半;用 3 枚简和 4 枚简的各有 3 条,用 1 枚简和 5 枚简的只有各 1 条。考虑到第 1 条用作基础的计算训练而具有特殊性(含有 5 枚简的第 6 条也有这种性质),可以认为《算书丙种》编作者在进行条目设置时,充分考虑了篇幅的大小。

3 《算书丙种》的知识类型与数学方法

《算书丙种》包含的知识可以分为以下几部分:(1)少广;(2)土地面积计算;(3)分数加法和约分;(4)枲田租税计算;(5)政府粮食管理中的换算;(6)立体体积计算;(7)比例计算。下面依次进行介绍和分析。

3.1 少广

少广是中国古典数学的一个重要门类,其典型形式是:一块长方形田地的面积为一亩(240 平方步),其广为$(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$步,要求其从(纵)。中国古典数学把开方等类知识归入少广中。《算书丙种》第 1 条为少广,含简一至简二三凡 23 枚简,约占《算书丙种》的 1/3,是篇幅最大的一个条目。简一的第一道编绳下写有“少广”二字,但没有留出空白就接着写下面的具体内容。这些内容由 8 部分组成,每部分都以“下有若干”开头,第 1 部分开头为“下有半”,第 2—8 部分开头都作“下有 A 分”(A 为从三至九的整数),自“下有半”至“下有五分”,每部分内容皆占 2 枚简,自“下有六分”至“下有七分”各占 3 枚简,“下有八分”至“下有九分”则各占 4 枚简。除第 1 部分的“下有半”是紧接“少广”二字书写外,其他 7 部分都是从第一枚简的第一道编绳下方开始书写。同时,书写完成每一部分的内容后末简都还有多余的空间,但这种空间并没有被利用来书写下一部分而是留作空白,可见是《算书丙种》的编作者刻意注重体例与格式的规整度。这些体现了编作者具有视每一部分各自为一个整体的明显意图。少广的八部分都具有相同的体例和数学结构,只是具体数据不同,反映了将它们放在一起所具有的整体性。下面将含 2、3、4 枚简的部分各举一例加以说明。

简一至简二组成的“下有半”题：

少广。下有半，以一为二，以半为一，同之三以为法。即置【二】百卅步，而【倍】之为四百八十。如法一步，得从（纵）二百六十步。以广乘之，为田一亩。二（[10]，369页）

简一〇十至简十二组成的“下有六分”题：

下有六分，以一为六十，半为卅，三分为廿，以四分为十五，以五分为十二，以六分为十，同之百卅七为法。即直（置）一〇二百卅步，而【以一为六十，为万】四千八百。令如法一步，得从（纵）九十七步有（又）百卅七分步之百卅一。以广乘一一之，为田一亩。有不分者，以一如法。一二（[10]，369页）

简十六至简十九组成的“下有八分”题：

下有八分，以一为八百卅，以半为四百廿，以三分为二百八十，以四分为二百一十，以五[分]为百六十八，以六分为一六百卅，以七分为百廿，以八分为百五，同之二千八十三以为法。即直（置）二百卅步，以一为八百卅，为廿万一千六一七百。令如法而一步，得从（纵）八十八步有（又）二千八十三分步之六百九十六。以广乘之，为田一亩。有不分者，一八以一如法。一九（[10]，369-370页）

“下有半”部分是求广为$(1+\frac{1}{2})$步时从（纵）的长度，“下有六分”部分是求广为$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6})$步时从（纵）的长度，“下有八分”部分是求广为$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})$步时从（纵）的长度。

少广算法的基本程序是：将广的数据中各分母的公倍数（多为最小公倍数）[①]作为1，接下来求各分数对应的整数（公倍数除以各分母即得），再将公倍数与所得各数相加，其和作为除数。然后将240步乘以公倍数所得到的乘积作为被除数，相除，得到“从（纵）”的长度。

这一条的8个部分与《九章算术》“少广”章的前8个问题对应，但不像后者那样算题、答案和算法有明显的分界，而是直接描述已知条件和计算的具体方法及相应的结果。然后还要用得到的结果即从（纵）的长度乘以广，得到田面积为一亩，这相当于验算。这里求从（纵）的算法没有采用一般性的表述，而是针对具体的数字。

在北大秦简《算书甲种》中，开头是一篇关于数学理论的《鲁久次问数于陈起》，接着是一张九九表，之后就是少广，再后是针对不同情境的应用问题和算法。《鲁久次问数于陈起》的结尾处说：“凡数之保（宝）莫急丽（隶）首，丽（隶）首者筭之始也，少广者筭之市也，所求者毋不有也。”这里的“隶首”就是九九，被认为是计算的开始，是最基本的，而少广则被认为是包含各种计算方法的市场[5,6,11]，反映了“少广”在计算中的地位和重要性。

① 整理者说这种方法所用的是最小公倍数（[10]，371页），其实有例外，比如《九章算术》中第5题和第11题分别用120和83 160作公倍数，而最小公倍数分别为60和27 720。但《算书丙种》“少广”条所取则均为最小公倍数。

此篇的描述中九九和少广的顺序与《算书甲种》中具体内容的顺序一致。张家山汉简《算数书》有少广，被整理者放在靠后的位置，但此书出土时已散乱，有人认为少广应该处于前面的位置[12,13]。睡虎地汉简《算术》也有少广，在书中第一部分。熊北生等认为《算数书》中少广在前面的观点是有道理的。[14]将少广放在前面，是战国秦汉一类古算书的传统。少广在《九章算术》中则位于第 4 章，反映了《九章算术》属于另外一个传统。

3.2　土地面积计算

《算书丙种》中关于土地面积计算的内容有第 2—5 条，共 4 条。现依次分析如下：

(1)关于里田的第 2 条：

■ 里乘里，里也。壹(一)三有(又)三レ五之，即成田亩数，为田三顷卄(七十)五亩。积四里为田十五顷。二四 ・积八【里】为田卅顷。・不盈八者一，为田卌六亩二百一十步。积廿五里为田九十三顷卄(七十)五亩。二五 ([10]，373 页)

里是长度单位，秦汉时以 300 步为 1 里。中国古典数学中经常用长度单位来表示面积。如简文“里也”中的“里”字即指平方里。“壹三”和“三レ五”则分别指一个三和三个五，之所以用“壹”而不用“一”，“三”和“五”之间加一个符号“レ”，就是要与平常的“一三”和“三五”区分开来。“壹三有三レ五之，即成田亩数”的意思是，(将里数一)乘以一个三再依次乘以三个五，就得到田的亩数。顷是田地面积单位，为 100 亩。本来算出来的是 375 亩，古人直接把 300 亩化成了 3 顷而得到“三顷七十五亩”。整理者注释说，“不盈八者一”的“盈”字后脱“里”字，“八者一”是指 1/8，简文中指 1/8 平方里。([10]，373 页)从“不盈八者一”后的简文提供的数据“卌六亩二百一十步”可知，此说无误。“不盈”是谓语，相应的主语没有表达出来，我们从前面的文字中也找不出可以视作承前省的主语，所以“不盈八者一”和墨点之间应有脱文，可能提到一个以 8 为除数的除法，余数为 1。但具体文字是什么，难以推测。这种脱落较多的情况是不能用写作者的笔误来解释的。由此可以推知，北大秦简《算书丙种》这个版本，不是作者的手稿本，而是一个传抄本。

(2)关于卫(围)田术的第 3 条：

■ 卫(围)田述(术)曰：除右方二百卌步，得田【亩】数如左方步数，□□□□□□。除【左】方二百卌步，得田如 二六 右方步数。不盈二百卌步者，令相乘，如恒田。二七 ([10]，374 页)

整理者指出：这是针对长和宽至少有一条不少于 240 步的长方形田求其面积的捷算法。人站在田的一角，两条邻边一在右一在左，即“右方”与“左方”。一般而言，求长方形田的亩数，将广、纵步数相乘后除以 240 步即得。但是，如果长和宽的数据较大，则计算过程会较为复杂。此条的“围田术”通过划分方法，给出了一种简便方法。

用 240 步划分右方，那么左方的步数就等于划分出来的每段田的亩数。言下之意是，长方形田的右方是 240 步的多少倍，此田的亩数就等于左方步数的多少倍。同样，用 240 步划分左方，那么右方步数就等于划分出来的每段田的亩数。言下之意，左方是 240 步的多少倍，此田的亩数就等于右方步数的多少倍。如果右方(或右方按 240 步划分后余下的那部分)不足 240 步，那么就用右方的这部分与左方(不论左方是否能被 240 步正好划分完)相乘，按平常的方法算出面积。如果左方和右方的情况反过来，也可做相应调整而计算面积。

此条“卫(围)田术”的算法,与北大秦简《算书甲种》中的“径田术”相同,但名称差异较大。关于后者,韩巍认为“径”与“经”通,是划分、分割之义[7]。谭竞男认为是“径直、直接的意思”。[15]“卫(围)”是从一个大的空间中划分出一块围起来的意思,其前提是划分,它与划分有着衔接的关系。“卫(围)田术”是从按240步划分出一块后围起来(虚拟的)单独计算的算法。我们认为“径”仍以解释划分、分割为善,“径田术”和“卫(围)田术”是以前后连续的两个阶段的活动来分别命名的。

岳麓书院藏秦简《数》1714号简记有:

□田之述(术)曰:以从(纵)二百卅步者,除广一步,得田一亩;除广十步,得田十亩;除广百步,得田一顷;除广千步,得田[十顷]。①

这里是从实例说明,长方形田在固定从(纵)为240步的情况下,广的步数就是田的亩数。邹大海指出:“本题的原理是径田术的基础,也可以说本题是径田术的简化情形。”([8],279页)《算书丙种》的“围田术”与《数》中此题的关系也是如此。

(3)关于“圜(圆)田”的第4条:

■ 圜(圆)田周卅步,令三而一为径,径十步,为田卉(七十)五步。·其述(术)曰:半周半径相乘即成。·一述(术)曰:周乘$_{二八}$周,十三成[一]。·一述(术)曰:径乘周,四而成一。·一述(术)曰:参(三)分周为从(纵),四分周为广,相乘即成。·述(术)$_{二九}$曰:径乘径,四成三。$_{三〇}$([10],375-376页)

本条首句是算题,并给出了由圆周长求直径的方法:将周长除以圆周率的近似值3得直径,然后给出圆面积的答案。接下来提供了5种求圆面积的方法。设D、C、S分别表示圆的直径、周长、面积,则这5种方法相当于以下5个公式:

(1)$S=(C\div 2)\times(D\div 2)$,

(2)$S=C\times C\div 13$,

(3)$S=C\times D\div 4$,

(4)$S=(C\div 3)\times(\mathrm{C}\div 4)$,

(5)$S=D\times D\div 4\times 3$。

其中第(1)、(3)两种为精确算法,第(4)、(5)两种都取圆周率的近似值3。第(2)种亦是近似算法,通过分析可知所取圆周率近似值为13/4=3.25,比汉代以前常用的3之精确度稍高。在目前已知的中国古代文献中,这是最早的3以外的圆周率近似值。但是有两个原因让人怀疑这个圆周率源于“十二”被抄成了“十三”:(1)除《算书丙种》以外,目前已发表的所有秦代简牍中都未见到不是3的圆周率近似值或其用例。(2)更为重要的是,从行文看,这几种圆面积求法都要服务于前面的算题,那么根据答案,圆周率只能是取3。所以整理者在注释中提出有可能简文中“十三”为“十二”之误,第二术仍基于圆周率3,术文相当于:S=周长×周长÷12。([10],376-377页)不过,如果此条中的“十三”真是“十二”之误,也只是意味着保存至今的秦代和先秦文献中没有3以外的圆周率近似值,而并不意味着当时一定没有人提出过这样的近似值,因为3非准确的圆周率是很容易发现的。如果“十三”真是“十二”之误,则这会成为《算书丙种》为抄本的一个证据。

① 其中“十顷”为萧灿所补。以下对简文的解释据萧著所引邹大海的解释而稍有修改。[16]

上述五个圆面积公式中，(1)、(3)、(5)均见于《九章算术》，(2)如果“十三”确为“十二”之误，则亦见于《九章算术》，(4)则超出了《九章算术》的范围，说明《九章算术》并非包含了以前所有的算法。

(4)第 5 条讨论一种叫“田三囫(陋)”的三角形田，包含两个独立的问题：

■ 田三囫(陋)，一面正一面邪(斜)者，令正面相乘，二成一。・正廿步，邪(斜)廿二步，为田二百步。三一

田三囫(陋)者，半其一面以为广，即令一面五为四从(纵)，相乘即成。・面十五步，为田九十步。三二 ([10]，377 页)

《算书甲种》中也有“田三囫(陋)术”。韩巍指出“陋”是角隅，田三囫(陋)是三角形田，《算书甲种》和《算书丙种》第二简(简三二)上的田三囫(陋)为等腰三角形，《算书丙种》的第一简(简三一)上的田三囫(陋)是等腰直角三角形。[7] 邹大海综合分析两种算书的数据，认为其中的田三囫(陋)很可能本身就是等腰三角形。他认为上引《算书丙种》第一简上的田三囫(陋)不是直角三角形，而是两条腰(斜面)为 22 步、底边(正面)为 20 步的等腰三角形，其高本来约为 19.596 步(图 1)，但古人利用 5、10、11 或 10、20、22 的勾、股、弦近似数，由底和腰的数据算出高为 20 步，与底(正面)相等，从而由底边乘底边再除以 2(“正面相乘，二成一”)得到面积([7]；[8]，269 页)。对于上引《算书丙种》第二简上的田三囫(陋)，韩巍、邹大海认为是一个等腰三角形，如图 2 所示，其一条腰 *BC* 上的高 *AD* 与两腰 *BC*、*AC* 围成一个直角三角形 *ADC*，它的勾、股、弦形成三、四、五的比例关系，从而由腰 *AC* 的长度，可以算出高 *AD* 的长度，进而由 *BC* 折半后乘以高得到三角形的面积。([7]；[8]，269 页)

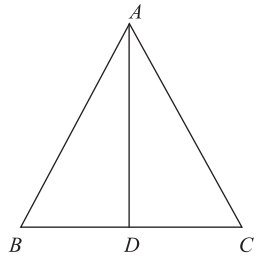

图 1

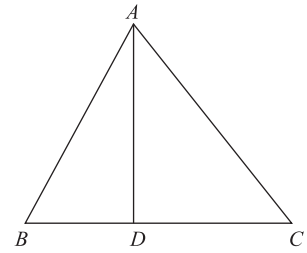

图 2

简文对田三囫(陋)形状的描述相当不明确，上面的解释是目前所知最合理的推测。几个问题中的田三陋是不同具体形状的等腰三角形，它们都是先针对该类形状给出一般性的面积算法，然后给出算题，反映了当时对一般性算法的追求。

3.3　分数加法和约分

《算书丙种》第 6 条含有“同分”和“约分”两部分内容。前者讲“同分”：

■ 同分述(术)曰：母乘母为法，子交乘母为实，实如法成一，不盈者以法命分。・令母同子相从。三三 ・今有三分一𠂆、四分一𠂆、五分一𠂆、六分一𠂆、七分一𠂆、八分一𠂆、九分一，同之得一有(又)二千五百廿分八百廿九。益之 三四 十分，得一有(又)二千五百廿分千八十一。・三分一𠂆、四分一𠂆、五分一𠂆、六分一，同之廿分十九。三五

([10],346-347、378 页)①

所谓“同分”,就是指分数相加,古代亦常称为“合分”。《算书甲种》作“合分之术”,《九章算术》“方田”章、张家山汉简《算数书》和岳麓书院藏秦简《数》作“合分术”。

第 6 条的后半部分讲约分,重新用一枚新简(简三六)开始书写:

有二千一十六分之百六十二,欲约之,得曰:百一十二分九。・其述(术):直(置)母,以子除母;母少,以母除 三六 子=为十八而等,即令子母各十八而成一,故得曰:百一十二分之九。三七 ([10],347-348、380 页)

约分首先要求分子和分母的最大公因数,最大公因数在其他有的算书中称为“等数”或“等”。中国古代求最大公因数的方法是,将分子、分母用小者去连续减大者,直到大者的余数小于减数时,又用所得的余数去连续减前面的减数(此时成了被减数),直到此阶段的余数小于减数。如此反复,直到余数与减数相等。这个相等的数就是最大公因数。上引释文有一处需要重新考虑。“以母除子=为十八而等”中的“子=为”在原简上如图 3-1,其中释作“爲”(为)的字(图 3-2)漶漫不清,单凭字形很难断定是“爲”,它与“爲”的字形(图 3-4 至图 3-7)差异较大。此字曾被释作“各”,从竹简照片上看,其残痕与同一枚简上另一个释作“各”的字(图 3-3)在字形上更吻合,后者虽然也漶漫不清,它的第二个撇笔末端磨灭,但如果将此笔补全,则与图 3-1 中的末字留存的痕迹是很接近的。所以,从字形看,将“以母除子=为十八而等”中的“为”改释为“各”更合适。另外,如果释作“为”字是正确的,则“子为十八而等”意味着分子的余数达到 18 时,分母的余数已经达到 18 了。让我们看一下计算过程:首先是从分母中反复减去分子,使得分母的余数比分子小:

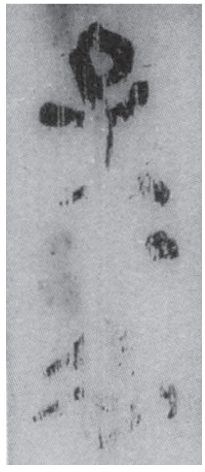

图3-1

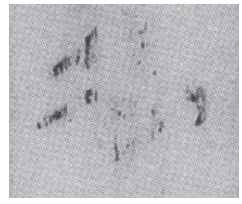

图3-2

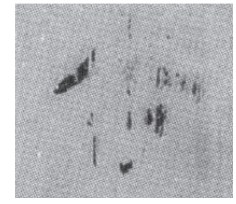

图3-3

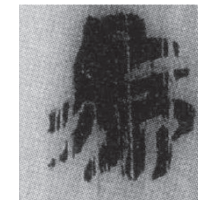

图3-4



图3-5



图3-6



图3-7

① 红外照片部分有释文但没有标点,其注释部分则没有保留勾识符号,为与前面对简文中符号的讨论保持一致,此处对简文的引用同时保留了标点和勾识符号。下面涉及到简文符号和现代标点的引文仿此。

分母或其余数		分子		分母的余数
2016	—	162	=	1854
1854	—	162	=	1692
……				
234	—	162	=	72

然后从分子中反复减去分母的余数，使得分子的余数比上述分母的余数小：

分子或其余数		分母的余数		分子的余数
162	—	72	=	90
90	—	72	=	18

这时分子的余数已经达到 18，而分母的余数仍为 72，两者相差 3 倍，与术文中“子为十八而等”（分子的余数为 18 时与分母的余数相等）的说法相矛盾。要想分子的余数与分母的余数相等，还必须继续做以小减大的运算：

分母的余数		分子的余数		分母的余数
72	—	18	=	54
54	—	18	=	36
36	—	18	=	18

这时，才能求出分母的余数与分子的余数相等时的数（等数）18。

所以，我们认为释文“子=为十八而等”中的“为”当释作“各”，同时“各”之上有脱文“母”；“子=为十八而等”当释读、校补为“子=母各十八而等”，将其中重文号还原成所重之字，则标点为“子。子、母各十八而等”。

这一条的“同分述（术）”采用普遍性表述，约分算法的表述前半部分是普遍性的，后半部分采用具体数字。

同分和约分都是分数的基本运算，放一起讲是有道理的。但《算书丙种》没有涉及分数的减法、乘法、除法等基本运算，可见并不完备。

3.4　枲田租税计算

第 7 条是：

■ 枲田一亩，税十六步，高五尺，五步一束。・大枲也，租五斤，中枲六斤，细枲七斤。・其一述（术）曰：行斤 三八 直亩，大枲也，即五之，中枲六之，细七之，如一束步数，得一斤。・其一述（术）曰：罗租数、税田，令如一 三九 束步数，得一两。・者（诸）租枲实不盈两者，以一为廿四，令如一束步数，得一朱（铢）。不盈朱（铢）者，法命分。四〇（[10]，381 页）

枲田分與田和税田计算其租税，税田是其收获全部作为租税的田，與田则是按比例交税的田，常见税率为 1/15。此条中一亩的枲田，用来缴税的部分为 16 步，可见采用的正

是当时这一常见税率。此条前两个墨点之间的文字给出了一亩枲舆田在种植大枲、中枲和细枲时的租税的数量分别为 5 斤、6 斤和 7 斤。第二、三两个墨点之间和第三、四两个墨点之间分别是两条术文。整理者指出,两条术文都脱落或省略了以高相乘的表述。([10],381-382 页)

参考整理者的注释和题解([10],381-382 页),可知前一术文说明,枲舆田的租税单位取斤对应于其面积单位取亩,然后用亩数分别乘以 5、6 和 7,再除以收获一束枲所需要的田地步数,分别得到种植大枲、中枲和细枲时租税的斤数。这是一个针对田地面积为任意亩、得到一束枲的步数为任意数的算法。具体到前面的算题,则是这样计算的:

种植大枲时租税:1(亩数)斤×5(大枲系数)×5(高尺数)÷5(一束步数)= 5 斤

种植中枲时租税:1(亩数)斤×6(大枲系数)×5(高尺数)÷5(一束步数)= 6 斤

种植细枲时租税:1(亩数)斤×7(大枲系数)×5(高尺数)÷5(一束步数)= 7 斤

后一术文是直接由枲税田面积计算租税,除上面提到的缺失了以高相乘的表述外,"罗租数、税田"之后也脱落了表示相乘的文字。这条术文的意思是,分三行罗列三种枲的租税系数(5、6、7)和税田步数,令每行相乘,再乘以高(尺数),然后除以获得一束枲所需田地步数,得到租税的两数。对于前面的问题来说,答案分别为 80 两、96 两、112 两,都是整数。

上述两条术文,如果不考虑脱落或省略的文字,可视作一般性的表述。

此条的最后部分表明,当枲田面积是其他数时,多数情况下租税不会是整数。这时,将余数乘以 24,再除以一束步数,得到若干铢。如果还除不尽,则以余数为分子、除数为分母命名一个分数。([10],382-383 页)这进一步说明,作者设置的术文具有普遍的意义。

第 8 条是:

■ 取枲租,十步为三围束一,今干之二围七寸,问:几可(何)步一束?得曰:十一步有(又)九分步一一束。·其[四一]述(术)曰:直(置)一束步数十,而以三围寸数卅乘之,为三百,以为实,直(置)干廿七寸为法,实如法一[四二]步,不盈者以<以>法命分。[四三]([10],383 页)

"围",周长的计量单位,这里为一尺。本题的意思是,已知 10 步枲田的租是一个周长等于 3 尺的枲束,它干了以后的周长缩小为 2 尺 7 寸(27 寸),要求多少步枲田的租才能得到一个周长三围(30 寸)的干枲束。术文给出的算法是:一束(未干的)枲所需田 10 步×未干枲束的周长 30 寸÷三围之束干后的周长 27 寸 = 300 步÷27 = $11\frac{1}{9}$ 步。

这一条术文采用带具体数字的表述,但算法仍具有普遍性。[①] 这个问题用的是正比例算法,但并不与其他的正比例问题放在一起。

3.5 政府粮食管理中的换算

粮食比例计算问题多见于出土算书。《算书丙种》的第 9 条云:

① 从实际来看,按枲束的截面周长的比例计算是错误的,应该按截面积的比例计算。这是编作者的过失。张家山汉简《算数书》"取枲程"条即基于截面积成比例的原理,按晾干前后的周长之平方成正比例的正确思路给出算法。

■ 以米求粟，三母五子。・以米求叔（菽），再母三子。・以米求粺，十母九子。・以米求毁（穀），十母八子。・以 四四 粺求粟，廿七母五十子。・以毁（穀）求粟，廿四母五十子。・以粺求稻粟，廿七母六十子。・以毁（穀）求稻粟，【廿四】 四五 母六十子。以粟求稻粟，五母六子。以叔（菽）求粟，九母十子。・以叔（菽）求稻粟，九母十二子。・以 四六 叔（菽）求粺，卅五母廿七子。以毁（穀）求叔（菽），卅五母廿四子。 四七 （[10]，384 页）

在秦至汉初，官府经常需要组织有很多人共同参加的一些公事活动。为此，官府需要统一收支粮食。在此背景下，官府仓储部门规定过粮食加工的标准比例，比如将禾黍类谷子 $16\frac{2}{3}$ 斗加工成 10 斗粝米，再进一步加工，依次得到 9 斗粺米（亦称糲米）、8 斗穀米；将稻谷 20 斗加工依次得到 10 斗、$6\frac{2}{3}$ 斗两种精度的米。当时还曾采用过一种特殊的“多值石制”，针对不同的粮食种类采用不同的体积作为一石的标准：

（1）对于粟类（禾、稷、粱、黍等）谷子，一石为 $16\frac{2}{3}$ 斗；

（2）对于稻类谷子，一石为 20 斗；

（3）对于粟类谷子和稻类谷子舂成的各种米，不论何种精度等级，一石均为 10 斗；

（4）对于菽、荅、麦、麻，一石为 15 斗。

基于这样的加工比例和计量制度，有以下换算比例：

$$\text{稻：粟：米：粺（糲）：穀：菽：荅：麦：麻}=20:16\frac{2}{3}:10:9:8:15:15:15:15$$

$$=60:50:30:27:24:45:45:45:45$$

对于其中两项，有不少可以有更为简化的比例。如粟：米 = 5：3，粟：稻 = 5：6，菽（或荅、麦、麻）：米 = 3：2，等等。（[8]，150-192 页；[17]；[18]；[19]）

以上所引简文中有 13 种换算法，都基于上述比例。“以毁求叔，卅五母廿四子”有误，当将“毁”与“叔”对调，或将“卅五”与“廿四”互换。这一错误也是《算书丙种》为传抄本的一个证据。《算书甲种》简一七二正至一八五正亦为同类问题。本条不涉及物品的具体数量，算法利用常数而具有普遍性。

3.6　立体体积计算

《算书丙种》中关于立体体积计算的内容包括第 10—14 条。

第 10 条：

■ 囷□□粟，下周自乘，以高，卅六成一。 四八 （[10]，385 页）

整理者认为“以高”下有脱文“乘之”或“乘”，这符合算理。但从原简照片看（[10]，115 页），有一种更大的可能性。“自乘”的“乘”字已残损，但其上部基本完好，残损处主要在其下部，我们推测此条作者的原文在“乘”字下有重文号，要么是《算书丙种》的这枚简抄脱了重文号，要么是此简上本来有重文号，但在流传过程中残去。也就是说，“下周自乘以高”当校正为“下周自乘 = 以高”，将重文号换成所重之字后，标点为“下周自乘，乘以高”。整理者推测这是讲在一个圆形仓库中堆放粟谷而自然地形成圆锥状，由底面圆

周长(下周)和高,求圆锥形谷堆的体积,其算法(圆周率取3)为:

$$V=\text{下周}^2\times\text{高}\div 36$$

第11、12条分别为正四棱台体积算法("乘方亭述")、圆台("乘圆困刍封池之述")的体积算法及相应的算题:

■ 乘方亭述(术)曰:上方自乘,下方自乘,下方壹上方,以高乘,三而成一。·亭上方丈,下方二丈,高四九三丈,为积尺七千尺。五〇

■ 乘圜(圆)困刍封池【之】述(术)曰:上周【自】乘,下【周】自乘,下周壹上周,以高乘,卅六成一。·困上周三五一丈,下周二丈,高丈,为积尺五百廿七尺有(又)卅六分尺廿八。五二 ([10],385-386页)

两条开头的"乘"字,整理者指出是计算的意思。整理者指出两条的"壹"字后当补"乘"字。对于两条中的"壹"字,整理者在对后一条的注释中解释为"亦,又",在对前一条的注释中说它"义为'或''又'"([10],386页),两处的解释有所出入。后一注释中的"或"当为技术性错误,应该是"亦"字之误。

第11条正确地给出方亭(正四棱台)体积的公式:

$$V=(\text{上方}^2+\text{下方}^2+\text{上方}\times\text{下方})\times\text{高}\div 3$$

第12条中,困,圆形粮仓;刍,饲养牛马的草料;封,原指土堆;池,池塘。"圆困刍封池"应是"圆困、圆刍、圆封、圆池"的意思。从下文中上周(上底面周长)、下周(下底面周长)不等的数据看,它们都是圆台形,与《九章算术》"商功"章的"圆困"为圆柱形不同,而与该章的"圆亭"形状相同。此条的术文给出了圆台的求积公式:

$$V=(\text{上周}^2+\text{下周}^2+\text{上周}\times\text{下周})\times\text{高}\div 36$$

如果不考虑取圆周率的近似值3带来的误差,这是一个正确的公式。

以上两个台体的体积算法,都是普遍性公式,与算题的具体数据无关。岳麓秦简《数》有这两种立体的体积公式,与《算书丙种》的算法相同,只是有几个字的差异。这为先秦时期已经有这两种立体体积公式的观点([8],323-334页)提供了新的证据。

第13条:

■ 隄(堤)垣渠述(术)曰:并上下广、厚而半之,以从(纵)乘之,有(又)以高乘,节(即)尺数。·垣下厚五尺,上厚三尺,五三高丈,从(纵)丈,为积尺四百尺。■渠上广十尺,下广四尺,从(纵)丈,深丈三尺,为积尺九百一十尺。五四([10],387页)

此条"堤垣渠术"先给出了截面为梯形的棱柱体求积的一般方法:

$$V=[\text{上广(或上厚)}+\text{下广(或下厚)}]\div 2\times\text{纵}\times\text{高(或深)}$$

然后给出关于垣和渠的两个例题,它们之间用黑色方块隔开,它们与算法之间则由墨点隔开,如前所述,第二个黑色方块可能是抄写之误。

第14条:

■ 刍积上广二丈,【袤】六丈,下广二丈四尺,袤六丈四尺,高丈。薶(蒉)上袤四丈,为积尺二万三百卄(七十)三五五尺。□□□□□倍下厚以益之上后(厚),□□□□□倍上后(厚)以益下后(厚),以乘上袤,令六而五六成一,以高乘之。薶(蒉)述(术)曰:半上袤以益下袤,以乘下后(厚),有(又)乘高,三成一。五七

·刍稾禾童、门上、般(盘)池同述(术)。五八([10],388页)

简五六有未能释读的缺字，整理者的注释中尝试做了校补，校补后的此简文字作“尺。刍童之述曰：倍下厚以益之上后（厚），以乘下袤；有倍上后（厚）以益下后（厚），以乘上袤，令六而”（[10]，388 页），这一校补虽未必完全是原简的文字，但与前后文字的衔接较好，且从算理上看是合理的。

此题前面给出了两个立体的数据和它们的体积算法。一个的名称由于简文残损而缺失，整理者尝试做的校补中作“刍童”，现代称为长方台，是上底和下底为两平行的长方形的台体。这种立体在古代有“刍童”、“方阙”、“门上”、“盘池”等名称，这里给出的算法为：

$$V=[(\text{上厚}+\text{下厚}\times 2)\times\text{下袤}+(\text{下厚}+\text{上厚}\times 2)\times\text{上袤}]\div 6\times\text{高}$$

这种立体的体（容）积算法亦见于北大秦简《算书甲种》、《九章算术·商功》、张家山汉简《算数书》和岳麓书院藏秦简《数》。《算书丙种》的算法与《九章算术·商功》的方法非常相似。（[10]，388-389 页）这直接证明《九章算术》中的这个算法来自先秦和秦代。

另一个立体为“蕰（甍）”，即《九章算术》中的刍甍，这里给出的求积术相当于公式：

$$V=(\text{上袤}\div 2+\text{下袤})\times\text{下后}\times\text{高}\div 3$$

《算书乙种》有“积刍蕰（甍）术”，与此相同。北大秦简的公式和《九章算术》的公式不完全一样，但两者是等价的。《算书丙种》关于蕰的题设中已知条件缺少高度的数据，可见简文有脱误。（[10]，388-389 页）这也是《算书丙种》为抄本而非稿本的一个证据。

这几个立体的体积算法在表述上都是普遍性的。

3.7　比例算法

从数学结构看，《算书丙种》的第 8—9、15—17 条都是比例问题，其中第 8—9、15 条都是正比例问题，第 16—17 条则是比例分配问题。但是，这些问题的设置并不与它们的数学结构形成很好的对应关系。第 8 条和第 7 条一样，都针对枲田租税；第 9 条服务于政府部门的粮食管理，它们都有很强的现实背景。第 15—17 条则不同，尽管表面上是讲一些现实的事物，但实际上脱离现实情况比较严重，带有很强的理想化成分，因此，我们认为它们只是服务于算法的例题。

《算书丙种》中的第 15 条：

■ 有马母百卅五，生子卅五，问：十生子几可（何）？其得曰：十有（又）三子有（又）百卅五分卅五。其述（术）曰：直（置）所 五九 生子数而十之，以为实；以马母为法。实如法得一，不盈者以法命分。六〇（[10]，389 页）

整理者指出答案中的“十有”二字可能是涉上文“十生”而误衍（[10]，389 页），这当然是正确的。

本题已知 135 匹母马生 45 匹马驹，要求 10 匹母马生多少匹马驹。这是正比例问题，术文的计算相当于：已知的生子数×10÷已知的母马数，答案是 $3\frac{45}{135}$，这是一个未经约分的带分数答案。此条中的术文涉及三个量，其中大前提中已知的生子数（“生子”数）和母马数（“马母”数）这两个量是一般化的表述，小前提中的母马数（10）是具体的数值。从行文看，后者不太容易用一般化的词语表述，编作者也就没有刻意追求。此例反映了《算书丙种》对算法的一般性有追求，但不是很彻底。

比例分配在《九章算术》中叫衰分，“衰分”也是此书第三章的章名。此章开头是衰分

术,它把比中的各个数都称为衰,这组数称为列衰。《算书丙种》第16、17条虽为衰分问题,但没有出现“衰分”字样,不过这并不意味着当时编作者不知道“衰分”一词。相反,岳麓秦简《数》提到“衰分之述……”、“……,今以爵衰分之,……”,说明当时是有“衰分”一词的。而《算书丙种》第17条也提到“衰数乘五尺为实”,说明其编作者应知道“衰分”一词,但没有刻意追求一般性的表述而有意用到它。

第16条:

■ 牛羊子母四为人败,当赏(偿)禾一石,羊倍羔,犊倍羊,牛倍犊。问:牛、犊、羊、羔各出几可(何)?·得六一曰:牛出五斗十五分斗五,犊二斗分之十,羊一斗分之五,羔分之十。·述(術)曰:羔直(置)一,羊直(置)二,犊六二直(置)四,牛直(置)八,同之十五以为法。即以十斗乘羔一、羊二、犊四、牛八者,令各自为实,实如法得六三一斗。不盈斗,以法命分。六四 ([10],390页)

已知羔(羊子)、羊(羊母)、犊(牛子)、牛(牛母)四种家畜损坏了一户人家的禾,一共需要赔偿一石(十斗),赔偿的比例是:羊比羔加倍,犊比羊加倍,牛比犊加倍。要求每种牲口的主人分别赔偿多少。术文假设先已把赔偿比例换算成1∶2∶4∶8,然后利用比例分配方法(即《九章算术》的“衰分术”)求解:先求比中的各数(“衰分术”中的“列衰”)之和:1+2+4+8=15,作为除数(“法”)。将应赔偿的总数一石化为10斗后,与比中的各数相乘,分别作为被除数(“实”),再将各项被除数分别除以15,除不尽时用分数表示。

《九章算术》“衰分”章的第3题是一个类似问题,但只有牛、马、羊三种动物,岳麓秦简《数》也有一个类似的问题,则是针对牛、羊、犊三种动物。《算书丙种》的这个问题涉及4头动物,要更复杂些。

第17条:

■ 有人织,日自再,五日而织五尺。问:如[始]织日几可(何)?其得曰:卅一分尺五。其述(术)曰:直(置)一,益二,六五益四,益八,益十六,凡卅一以为法,衰数乘五尺为实,实如法一尺。■ 六六([10],391页)

本条是讲有一个人织布,从第二天起每天织布的量在上一天的基础上加倍,5天共织了5尺,求第一天织了多少布。术文假设先已把第一至五天的织布量之比换算成了1∶2∶4∶8∶16,然后把比中的这5个数相加,得到31,作为“法”(除数)。用比中的数(“衰数”)与总织布量5尺相乘,作“实”(被除数),再让“实”除以“法”。

题中所问和答案都只针对第一天的织布量,术文中出现“衰数”一词,没有提到是第一个衰数还是所有的衰数。按后者理解时术文可以算出每一天的织布量,按前者理解时衰数为1,那么“衰数乘五尺为实”(用衰数去乘总织布量5尺作为被除数)和“五尺为实”(直接用总织布量5尺作为被除数)是一样的,那么此时术文可以省去“衰数乘”的步骤而直接以5尺为实。术文中既然出现了“衰数乘”字,所以我们仍倾向于按后一种理解。与本条相似,《九章算术》“衰分”章第4题、张家山汉简《算数书》“女织”条、《算书甲种》简一八九正至简一九一正所记的问题与本题相似,也都是从第二天开始每一天的织布量是上一天的两倍,已知五天的织布总量,求各天或第一天的织布量。岳麓书院藏秦简《数》则有一个与上述问题相似但只织了3天的问题。邹大海曾根据《算数书》与《数》推论与《九章算术》“衰分”章第4题“女子善织”题同类的问题在先秦或更早时代已经出现[20]。

不过，与《九章算术》的“女子善织”问题相比，《算数书》的问题数据相同但出自汉代的墓葬；《算书甲种》和《数》虽出自秦墓，但两书中的织布问题数据均有所不同，前者的问题中5 天的总织布量为 8 尺，后者的问题中织布的总时间只有 3 天。因此，这三部书都不能直接将《九章算术》“女子善织”问题追溯到先秦和秦代。《算书丙种》的这个织布问题与《九章算术》的“女子善织”问题具有相同的数据，它能直接证明《九章算术》的这个问题来自先秦或至迟来自秦代。

第 16—17 条的术文在表述上主要采用具体数字，但后一条术文采用了具有普遍意义的“衰数”一词。同时，读者也很容易通过替换数字而把术文应用于类似的其他问题，所以这两条的术文仍带有普遍意义。

以上讨论的几类数学知识在顺序上与条目的前后顺序完全一致，没有交错的情形，这反映出《算书丙种》编作者有意将同类知识的条目放在一起，体现了一定的谋篇布局意识。

4　从《算书丙种》看《九章算术》算题的渊源

《九章算术》是中国古代最重要的数学经典，其来源和形成对讨论中国数学在早期阶段的发展至关重要。魏晋数学家刘徽在公元 263 年撰写其注释时所写的序言中说：

> 周公制礼而有九数，九数之流，则九章是矣。往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。[21]

刘徽认为《九章算术》是从西周初年周公制定礼乐制度时就存在的“九数”发展而来的著作，其最初的成书早在先秦时期。但秦始皇焚书导致了它的散坏。张苍（公元前 252 年以前的几年之内—公元前 152 年）于西汉早期、耿寿昌（约公元前 100—约公元前 40 年）于西汉中后期（公元前 1 世纪中叶）先后收集此书的残存文本，并加以整理和删补，形成了汉代编定的《九章算术》。学界已有研究证明了刘徽关于张苍、耿寿昌编纂《九章算术》的记载（[4]；[8]，34-51 页；[20-24]），流传至今的《九章算术》的主要方法来源于先秦时期，只有少部分属于张苍和耿寿昌所增补[8, 20-31]。《算书丙种》进一步加强了这一认识。

第 1 条直接证明《九章算术》的少广问题存在于先秦和秦代。第 2 条给出了与《九章算术》“里田术”所用数量标准的由来和应用，证明了该术源自先秦和秦代。第 4 条有 5 种不同的圆面积计算方法，证明了《九章算术》“方田”章的 4 个圆面积算法出于先秦和秦代。第 6 条的“同分”与“约分”直接证明《九章算术》“方田”章的合分术和约分术存在于先秦和秦代。第 9 条讲述政府粮食管理部门所用的由一种粮食求另一种的换算方法，这基于当时政府部门关于粮食管理的规定，从而为《九章算术》“粟米”章前面罗列的关于各种粮食换算比例的“粟米之法”源于先秦和秦代提供了证据。《算书丙种》第 10—14 条证明了《九章算术》“商功”章中圆锥、方亭（正四棱台）、圆亭（圆台）、城垣堤沟堑渠（截面为

梯形的四棱柱)、刍童盘池冥谷(长方台)、刍甍(一种楔形体)[①]的体积(容积)算法在先秦和秦代的存在。《算书丙种》没有"衰分"一词和衰分术的一般表述,但其第16、17条用到衰分术,后者的术文提到"衰数"二字,说明《九章算术》的衰分方法在先秦和秦代已经用到,第17条甚至直接证明《九章算术》"衰分"章第4题来自先秦和秦代,第16条则证明此章第2题在先秦和秦代有非常相似的原型。虽然目前还难以考定《算书丙种》一定编写于先秦而不是秦朝,但考虑到秦朝国祚太短[②],《算书丙种》实际证明《九章算术》中的相应数学知识有先秦时期的渊源。

《算书丙种》中有三种内容未出现在《九章算术》中。一是第3条所记针对至少有一边大于或等于240步的长方形田求面积的快捷算法"卫(围)田术"。二是第5条关于特殊三角形田"田三陌"(《算书甲种》中也有这部分内容)的面积算法。三是第7、8条关于枲租的算题和算法,这在出土算书中屡见且数量很多。此外,还有一个圆面积公式超出《九章算术》之外。这些均可补《九章算术》之阙。

5 结 语

综上,《算书丙种》由17个条目组成,每个条目都含有一条或多条算法,体现了中国古代以算法为中心的特点。这些算法多数采用一般性的表述,其他算法也在一定程度上具有普遍意义,反映了《算书丙种》对算法一般性的追求。同时,《算书丙种》的绝大部分条目都含有算题,反映了编作者重视将算法运用于具体问题中。

《算书丙种》第1个条目是作为计算训练的少广,没有符号标记;其他16个条目都在首简的天头处有黑色方块作为标记。这反映了编作者有意在基本的计算训练和针对某方面需求的数学知识之间做区分。这16个条目之间是并列关系,彼此没有重叠,它们的篇幅都不大,各条所用简的数目皆在1—5枚之间而以2枚为最多,这反映出编作者对不同条目内容的选材进行了有意的掌控。在条目的顺序上,《算书丙种》将主题相近的条目靠近放置,同类主题没有被其他主题分割开来而分散在不同地方的情形,说明编作者在大的分类和编排方面是比较用心的,可惜没有引入大类名称来统领。

《算书丙种》有些条目的内部还有内容上的划分:有的条目写完一部分后,重新用一枚新简写下一部分(第1、5、6条);有的用墨点将条目分割成性质相同的多个部分(第9条),但多数情况下墨点用在算题与算法之间、同一题的多个算法之间或同一术的两个例题之间,也有的条目内两个并列部分之间没有任何标志。因此,《算书丙种》的编作者虽

① 刍甍的体积算法与《算书丙种》中的葴的算法略有不同,但将《算书丙种》中葴的体积算法中作为乘数之一的和数(上袤÷2+下袤)与作为除数的常数3,都乘以2,就得到刍甍的体积公式。这种变换在古代也很容易想到和理解,所以《算书丙种》为《九章算术》刍甍的体积公式源于先秦提供了证据。

② 秦朝从公元前221年建立到公元前206年灭亡,只持续了15年。北大秦简中出现的最晚年份为公元前214年,距离秦统一只有7年多时间,如果墓主在此年或次年去世,则《算书丙种》的编成不会晚于秦统一之后7年,其中的数学知识极可能来自先秦时期。翁明鹏从文字书写风格推断《算书丙种》抄于战国时期,可惜样本太少。见翁明鹏:《从〈禹九策〉的用字特征说到北大秦简牍诸篇的抄写年代》,《文史》2020年第1辑,第5-31页。

然考虑了条目之内的下级结构，但没有很好地保持一致性。另外，此书没有题名，除第 1 条外，没有同类知识的类别名。这些说明，《算书丙种》在编排、知识构成方面有相当程度的考虑，但不够精心，尚处于初级阶段。

《算书丙种》笔迹统一，应为同一个书手所写。但关于里田的第 2 条的第 2 枚简（简二五）有较多的脱文，关于组合立体体积计算的第 14 条之首简（简五五）缺失了其中葰的高度数据，这些都无法用单纯的佚失简来解释，因此北大秦简的这个版本不会是原编作者的手稿本，而只能是抄本。这一结论还有在本文前面的分析中提到的其他一些证据。

如果按《九章算术》的分类，《算书丙种》有“少广”、“方田”、“粟米”、“商功”、“衰分”五种，已经涵盖了《九章算术》中 5/9 的类别，不仅在算法上能为《九章算术》的相应内容源于先秦提供证据，而且还证明《九章算术》中有的算题直接源于先秦，这为刘徽关于《九章算术》有其先秦祖本的记载提供了支持。《算书丙种》内容的顺序，与《九章算术》对应内容的顺序差别较大，说明它们不属于同一种文献流传系统①。《算书丙种》还有超出《九章算术》的内容，这为我们认识先秦秦汉数学提供了新的史料，也为我们认识《九章算术》的选材提供了新的视角。

参　考　文　献

[1] 北京大学出土文献与古代文明研究所，编. 北京大学藏秦简牍（全五册）[M]. 上海：上海古籍出版社，2023.

[2] 北京大学出土文献与古代文明研究所，编. 北京大学藏秦简牍（壹）[M]. 上海：上海古籍出版社，2023.

[3] 韩巍. 北大秦简中的数学文献[J]. 文物，2012(6)：85-89.

[4] 邹大海，夏庆卓. 关于北京大学藏秦简《算书乙种》的综合研究[J]. 自然科学史研究，2024,43(2)：129-145.

[5] 韩巍. 北大藏秦简《鲁久次问数于陈起》初读[J]. 北京大学学报（哲学社会科学版），2015,52(2)：29-36.

[6] 韩巍，邹大海，编. 北大秦简《鲁久次问数于陈起》今译、图版和专家笔谈[J]. 自然科学史研究，2015,34(2)：232-266.

[7] 韩巍. 北大秦简《算书》土地面积类算题初识[C]//武汉大学简帛研究中心，主编. 简帛：第 8 辑. 上海：上海古籍出版社，2013：29-42.

[8] 邹大海. 中国数学在奠基时期的形态、创造与发展——以若干典型案例为中心的研究[M]. 广州：广东人民出版社，2022：80-81，137，268-287.

[9] 周序林. 秦简算书校释[M]. 北京：社会科学文献出版社，2024.

[10] 北京大学出土文献与古代文明研究所，编. 北京大学藏秦简牍（贰）[M]. 上海：上海古籍出版社，2023：367.

[11] 北京大学出土文献与古代文明研究所，编. 北京大学藏秦简牍（肆）[M]. 上海：上海古籍出版社，2023：752-753.

[12] 日本张家山汉简《算数书》研究会，编. 汉简《算数书》——中国最古の数学书[M]. 京都：朋友书店，2006.

[13] 刘金华. 张家山汉简《算数书》研究[M]. 香港：华夏文化艺术出版社，2008.

[14] 熊北生，陈伟，蔡丹. 湖北云梦睡虎地 77 号西汉墓出土简牍概述[J]. 文物，2018(3)：43-53.

[15] 谭竞男. 秦汉出土数书散札二则[J]. 江汉考古，2014(5)：113-115.

[16] 萧灿. 岳麓书院藏秦简《数》研究[M]. 北京：中国社会科学出版社，2015：53.

[17] 邹大海. 关于《算数书》、秦律和上古粮米计量单位的几个问题[J]. 内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版），2009,38(5)：508-515.

① 邹大海将战国至汉代的实用算法式数学文献分为经典和非经典两个系统，前者以“九数”到《九章》为线索；后者受前者直接或间接的影响而呈现多种形态，或偏专业，或偏应用，或兼而有之。（[8]，421-422 页）《算书丙种》属于非经典系统中偏应用的一类。

[18] 邹大海. 从出土文献看秦汉计量单位石的变迁[C]// TSUKANE O, eds. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu B50: Study of the History of Mathematics August* 27~30, 2012. Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2014: 137-156.
[19] 邹大海. 关于秦汉计量单位石、桶的几个问题[J]. 中国史研究, 2019(1): 57-76.
[20] 邹大海. 简牍文献与中国数学史[M]//江晓原, 主编. 中国科学技术通史. 源远流长. 上海: 上海交通大学出版社, 2015: 191-230.
[21] 郭书春, 汇校. 九章筭术新校[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014: 3.
[22] 邹大海. 秦汉量制与《九章算术》成书年代新探[J]. 自然科学史研究, 2017,36(3): 293-315.
[23] 邹大海. 耿寿昌, 一位不该低估的中国古代科学家[C]//邹大海, 郭金海, 田淼, 主编. 探史求新——庆祝郭书春先生八十华诞文集. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2023: 3-25.
[24] 郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1992.
[25] 邹大海. 中国数学的兴起与先秦数学[M]. 石家庄: 河北科学技术出版社, 2001: 157-161.
[26] 邹大海. 出土《算数书》初探[J]. 自然科学史研究, 2001,20(3): 193-205.
[27] 邹大海. 睡虎地秦简与先秦数学[J]. 考古, 2005(6): 57-65.
[28] 邹大海. 从《算数书》盈不足问题看上古时代的盈不足方法[J]. 自然科学史研究, 2007,26(3): 312-323.
[29] 邹大海. 从出土简牍文献看中国早期的正负数概念[J]. 考古学报, 2010(4): 481-504.
[30] 邹大海. 从岳麓书院藏秦简《数》看上古时代盈不足问题的发展[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2019,48(6): 504-515.
[31] 邹大海. 中国上古时代数学门类均输新探[J]. 自然科学史研究, 2020,39(4): 395-424.

A Study on the *Mathematical Treatise: The Third Manuscript* on Qin Bamboo Slips Preserved at Peking University

XIA Qingzhuo[1,2], ZOU Dahai[1]

(1. *Institute for the History of Natural Sciences, CAS, Beijing* 100190, *China;*
2. *University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

Abstract The recently published Qin bamboo manuscripts preserved at Peking University include three previously unknown mathematical works, one of which is the *Mathematical Treatise: The Third Manuscript* (*Suanshu bingzhong* 算书丙种), a work of moderate length that needs to be studied systematically. This paper provides a comprehensive analysis of the work, focusing on its structure, compilation features, types of knowledge and mathematical methods, as well as its related context. It points out that this manuscript is a copy rather than an original draft. The work is characterized by an algorithm-centric approach. The compiler had more consideration about the system of the book, but not thoughtful enough. Furthermore, this manuscript provides new evidence for Liu Hui's account that the *Nine Chapters on Mathematical Procedures* (*Jiuzhang suanshu* 九章算术) has its pre-Qin ancestors, and offers sources and justifications for understanding the types of mathematical knowledge beyond the scope of the *Nine Chapters*, thereby enriching our understanding of early Chinese mathematics and the society and economy of that time.

Keywords Qin Bamboo Slips Preserved at Peking University; *Mathematical Treatise*: *The Third Manuscript* (*Suanshu bingzhong* 算书丙种); *Nine Chapters on Mathematical Procedures* (*Jiuzhang suanshu* 九章算术); history of mathematics in China; history of Qin and Han Dynasties