《自然科学史研究》 第43卷 第4期（2024年）：452—462
Studies in the History of Natural Sciences Vol. 43 No. 4(2024)

张敦仁对“大衍总数术”发展的贡献

杨小明✉ 霍星辰 杨玲霞
（东华大学 人文学院，上海 200051）

摘 要 在一次同余式求解历史上，清中叶的张敦仁具有承上启下的关键地位。与德国大数学家高斯几乎同时，张敦仁在南宋秦九韶500年后提出“求一术”，对秦九韶“大衍总数术”的算法进行还原和改进。张敦仁并洞见说“求一术”乃出自《孙子算经》“物不知数”问题，是我国古代天文历法为求解上元积年问题而生的伟大数学实践。从“化问数为定数”、“求乘率”和“求上元积年”等方面，张敦仁对秦九韶的方法进行简化和程序化，使“大衍总数术”这颗中国古代数学明珠重放异彩，并成为同时及之后骆腾凤、时曰醇和黄宗宪等人工作的基础。

关键词 张敦仁；求一术；大衍总数术；乘率；上元积年
中图分类号 N092
文献标识码 A **文章编号** 1000-0224(2024)04-0452-11

清乾嘉间，考据学兴，复古潮起，学者们埋头传统文化的整理和研究。大衍总数术①，原载于南宋秦九韶《数书九章》，此书由南宋王应麟抄出，明末赵琦美再录。张敦仁知扬州之时，于李潢家得赵琦美本，与李锐日夕讨论[1]，于1803年著成《求一算术》三卷[2]，上卷叙述计算原理，中卷介绍计算方法，下卷附演算习题，改进和简化了秦九韶的伟大创造，以“求一术”之法使“大衍总数术”这颗中国古代数学明珠重放异彩，并成为同时及之后骆腾凤、时曰醇和黄宗宪等人工作的基础。

一次同余式组解法是中国古代数学的华丽瑰宝，自问世以来特别是在明代即受到数学家的青睐和研习。王文素《算学宝鉴》记录了解决一次同余式组问题的尝试，提出“满数法”、“以多减少法”和“以少减多法”，并整理成完整的口诀，但其算法仅能处理各问数两两互素的情形，“以多减少”、“以少减多”两法又需反复试错，计算过程纷繁复杂，可见王文素并未能完全掌握秦九韶大衍总数术的精髓。[3] 同时期吴敬、周述学在对一次同余

收稿日期：2020-04-02；**修回日期**：2024-03-06。
作者简介：杨小明，1964年生，甘肃陇南人，教授，主要研究方向为中国科学史，Email：ynide@sina.com。霍星辰，1997年生，山西孝义人，硕士，主要研究方向为中国科学史。杨玲霞，1978年生，河南焦作人，硕士，主要研究方向为中国科学史。

① 大衍总数术是中国古代关于一次同余式组的普遍解法，其核心部分是大衍求一术，有些学者未注意二者的区别，常用“大衍求一术”或“求一术”指代全术，本文讨论的清代学者即如此。为不致冗繁，本文亦在相应的语境用“求一术”指代大衍总数术。

式问题进行解读时以宋代杨辉的翦管术为基础，对秦九韶大衍总数术并不了解，且在运算过程中出现问题（[3]，580-581 页），而严恭求解这类问题采取的方法亦与秦九韶完全不同（[3]，580 页）。所以，秦九韶大衍总数术的算法并没有活跃在明代数学家的视野中。直至清乾隆年间编修《四库全书》，秦九韶《数书九章》和内中所载大衍总数术才再一次在数学家面前展现风采。（[3]，724 页）

张敦仁（1754—1834），字仲篙，号古愚，泽州阳城（今山西阳城）人。《求一算术》序言中，张敦仁不仅提出“求一术”（即秦九韶大衍总数术，一次同余式组解法）源于《孙子算经》“物不知数”问题，而且敏锐发现这一算法提炼自中国传统天文历算推求上元积年之法，这两方面都无疑体现了张敦仁对大衍总数术算法及其现实意义的准确掌握。至于为何称“求一”，张敦仁理解道：“其法以各数及不满各数之残，求未以各数除去之数，必先求以各数去之余一之数，而后诸数可求，故曰‘求一’也。”他认为，“立天元一”（列方程）和“求一”二术是中国数学自《九章算术》之后最辉煌的两大创造，并且“求一术”也离不开“天元术”。秦九韶大衍总数术失传 500 年后，张敦仁详尽阐释了整数论一次同余式组解法，从方法推敲到原理剖析，既还原、解析了秦九韶创造的精髓，又从“求定数”、“求乘率”和“求上元积年”等方面简化和发展，使之重见天日。

张敦仁对大衍总数术发展的贡献为科学史界公认。李俨称赞张敦仁“以浅显之笔，写艰深之术，实是秦氏的功臣”。[4] 在对张敦仁的研究中，学界对“求一术”算法本身进行过解读：李俨《大衍求一术的过去和未来》一文对张敦仁的算法步骤进行介绍并详细说明张敦仁“大衍求一”中求取乘率的过程（[4]，142-143 页）；钱宝琮《求一术源流考》一文详细表述了张敦仁分两步更新秦九韶之术后的算式[5]；郭书春、李兆华主编的《中国科学技术史·数学卷》对张敦仁《求一算术》的算法进行说明，揭示了张敦仁对大衍总数术的阐明之功（[3]，724-726 页）；李继闵《从“演纪之法”与“大衍总数术”看秦九韶在算法上的成就》一文也对张敦仁的算法进行详细阐述，并说明了张敦仁以“演纪之术”推求上元积年的过程[6]；祖春慧的硕士学位论文《张敦仁数学工作研究》也对张敦仁的各项数学工作进行了较详细的说明[7]。这些研究无疑对张敦仁求一术算法的细化理解提供了坚实基础。

基于先前学者的工作，本文拟就张敦仁对秦九韶大衍总数术（即其所说的“求一术”）在“求定数”、“求乘率”和“求上元积年”等方面的阐释和改进做进一步探究，并将之与之前秦九韶“大衍总数术”以及之后骆腾凤、时曰醇和黄宗宪的工作进行比较，力求明确张敦仁对大衍总数术的贡献及其历史地位。

1　“化问数为定数”

秦九韶大衍总数术要求所有的模数（问数）必须互素，但很多情形下问数并非两两互素。对于这一问题，秦九韶采用的方法是根据奇偶——即等数（最大公约数）单双来决定约两个非互素的模数中的一个。虽然大衍总数术总能够以此解决非互素问题，但缺点不可免。秦九韶对 n 个模数求定母之法只示原则，如“约奇，弗约偶”、“约彼，复乘此”，表述显然缺乏程序性，这也导致秦九韶《数书九章》例题计算同样存在不当之处。因此，化非

两两互素的模数为两两互素这一问题并没有被秦九韶完全解决。

对于求解两两互素的定数问题,钱宝琮指出“在诸元数不是两两互素时……要使能用大衍求一术解决问题,必须各取 A_i 的因数 a_i 作为定数,使诸 a_i 两两互素,诸 a_i 的连乘积 M 为诸元数的最小公倍数”[8]。可见,满足定数需具备三个条件:1. 定数 a_i 须两两互素;2. 定数 a_i 须为问数 A_i 之因数;3. 诸 a_i 的连乘积 M 当为诸问数 A_i 的最小公倍数。这看似简单,但计算量大,要求也很高。

根据秦九韶大衍术九题草文,张敦仁《求一算术》上卷摸索出一整套求定母程序:

> 置各问数,识其为(如甲、乙、丙、丁之类),自上而下列之。先以上位与下位诸数各求等。依约分术:约一存一为第一变。(若上位当约,即以既约之数与下诸位求等,后皆仿此)又以次位与下诸位各求等,约之,为第二变。每自上而下以一位与下诸位各求等,约之,为一变。(凡问数有三位,则有二变。有四位,则有三变。每多一位,则多一变)讫,各为泛母。复置泛母,如前自上而下求等,依再约术、约一、乘一为一变。讫,各为定母。若各定母俱无等,即以各问数为定母。若泛母俱无等,即以泛母为定母。[2]

上述文字可简单地表示为以下程序图(图 1):

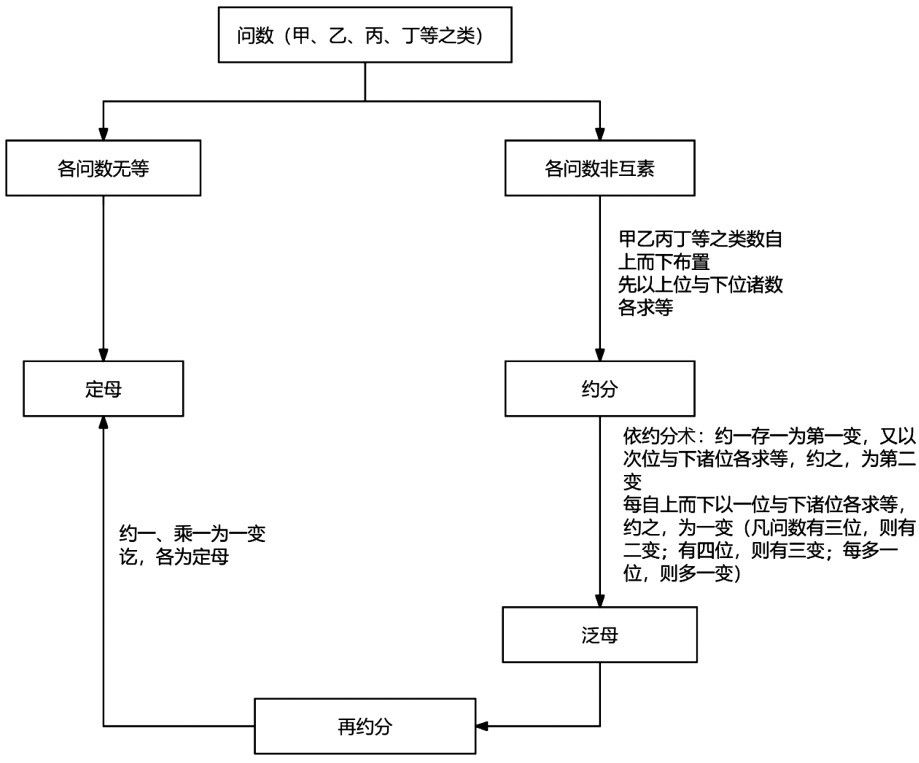


图 1 张敦仁《求一算术》求定母程序图

这套程序首先主要针对的是任意自然数,对于分数、小数而言暂不适宜。如果问数是小数和分数需要首先化为整数。从整个程序图不难发现张敦仁“求定数”的主要思想来源是秦九韶的大衍总数术,但他在大衍总数术的基础上又有新的理解和发挥。

在此附秦九韶大衍总数术程序图加以比较[9]，见图 2：

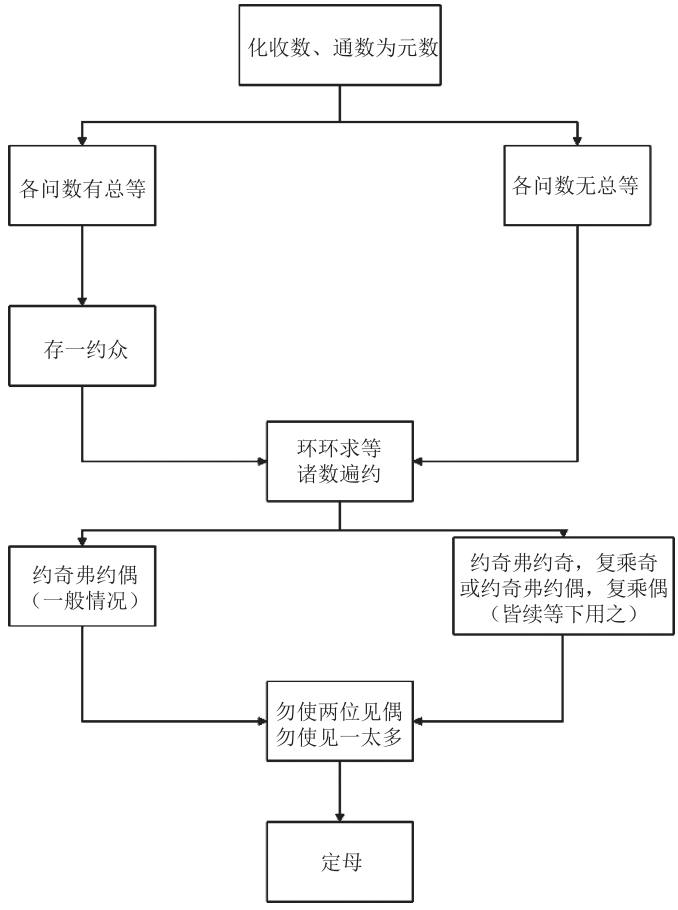


图 2　秦九韶“大衍总数术”求定母程序图

秦九韶“大衍总数术”化问数为定数有两条途径：一是将诸问数直接两两连环求等；一是将诸问数先求总等，存一（位）约众（位），然后再连环求等。“大衍总数术”连环求等的根本原则是“约奇弗约偶”，其中“奇”、“偶”系等数个数的单双，“约奇弗约偶”就是在化约时约含有奇数个等数的问数而不约含有偶数个等数的问数，目的是使约后的两数互素。如果化约后得到的两数不互素，即属有续等的情形，此时要用“以续等约彼则必复乘此”的方法再次化约。若约后仍有续等，则要继续用此法化约，直至求得定数。

针对这种情况，张敦仁对大衍总数术予以新的改进，正如程序所述相约（存一约一），即求定数时抛开秦九韶求总等法，直接“置原问各全数”，两两连环求等相约，约一存一，“视两数皆奇者，如意约之；一奇一偶者，则约奇；皆偶者，则令约得数为奇；若约此得数与彼得数有等，则反约彼数”。再约（存一乘一），即若“既约之后，仍有等数，即须再约”，各个步骤清晰可见、有条不紊，使读者对秦九韶大衍总数术有正确的理解。简言之：以约分求泛母，再约求定母。换句话说，张敦仁从问数求定母，大致分两步：第一步，从模数按约分术（约一、存一）求出泛母；第二步，从泛母按再约术（约一、乘一）求出定母。清晰自然，简洁实用。相比于秦九韶大衍总数术，张敦仁对运算流程进行了细化，求取定母的过程更

为自然,有效避免了秦九韶大衍总数术在表述上可能产生的歧义。可以说,在算法的规范性上,张敦仁“求一术”较秦九韶之法有着巨大的进步。

2 “求乘率”

“乘率”在中国传统数学中扮演着重要的角色。秦九韶在创立剩余定理时的一大功绩就是给出求“乘率”之法,即所谓“大衍求一术”。只要能求出乘率,很多问题便迎刃而解,比如“古历会积”、“积尺寻源”、“推计土功”及“程行计地”等。张敦仁在李锐等人的帮助下顺利完成对秦九韶《数书九章》的研读,在秦九韶求乘率的基础上加以明晰和简化,使整个求解过程通俗易懂。

我们用对应的字母符号将张敦仁《求一算术》卷上求乘率(解同余式 $mx\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$,其中 $m<n$)的术文列于下:

> 列少数(m)于上,多数(n)于下,以上除下,所得为第一数(q_1),有余(r_1)。复以下(r_1)除上(a),所得为第二数(q_2)。如是上下相除,所得以此命之,如第三数(q_3)、第四数(q_4)之类。上位余一即止,不除。乃列各得数于左行,立天元一(x)为右行第一数,以左行第一数乘之,得右行第二数。复置右行第二数,以左行第二数乘之,加入右行第一数,得右行第三数。每置右行数,以左行相当之数乘之,以右行上位加之,得右行次位,其右行最后得数即乘率也。[2]

以上术文可表示为表 1:

表 1 辗转相除求乘率

n 多数,m 少数
$n=q_1m+r_1$
$m=q_2r_1+r_2$
$r_1=q_3r_2+r_3$
……
$r_{n-2}=q_nr_{n-1}+r_n$
$r_{n-1}=q_{n+1}r_n+1$ (n 为奇数)
n 多数,m 少数

左列	右列
q_1	1 立天元一(x)
q_2	q_1
q_3	q_1q_2+1
q_4	$q_3(q_1q_2+1)+q_1$
q_5	$q_4[q_3(q_1q_2+1)+q_1]+q_1q_2+1$
q_6	$q_5\{q_4[q_3(q_1q_2+1)+q_1]+q_1q_2+1\}+q_3(q_1q_2+1)+q_1$
……	……

理论上讲,张敦仁是对秦九韶方法的解读与明晰,大致概括为两大步:第一步,辗转相除;第二步,布筹,立天元一并求乘率。尽管没有从根本上突破藩篱,但张敦仁还是有所创新,具体步骤分为:首先,列奇上定下,上下递次互除,上位余一为止;其次,列各商数于左列,立天元一为右列第一数,以下各数均以其上左右两数相乘,再加右上上数而得,至最下得数即为乘率。从整个布筹和结构分析,张敦仁的方法明显更简洁、更系统,更符合现代数学思维。

“乘率”其实已代表一种“符号”、一个“标签”——一次同余式(组)。在众多情况下,

一次同余方程式(组)的求解还是需要依赖“乘率”。张敦仁在对“大衍求一术”释解、简化之后广泛应用到解决生产生活实际问题,同时拓展到一般一次同余式方程(组)问题的求解。今天有关一次同余式的解法层出不穷,比如代入法、变换系数法和变换模数法等,即孙子定理系数不一定是一、模数非两两互素等情形,但很多与张敦仁的解法相似,甚至就是某种改进。

“乘率”可以广泛应用到求解一次同余式(组),但毕竟和解方程还是有所区别,在“布筹”过程中仅与系数有关,计算结束前有解与无解事先不得而知,故而还存在局限性。

3 “求上元积年”

所谓“历元”,或“上元”,即朔旦、冬至、甲子甚至五大行星同在夜半的理想时刻,“日月合璧,五星连珠”。这是中国古代大多数历法的前提,故推求“上元积年”(即从上元到求算之年所积年数)尤显紧要。张敦仁正确指出“求一术”(即大衍总数术)出自中国传统推算上元积年的历算需求。序言之外,《求一算术》卷下专论“演纪之术”,并注:“唐《麟德》术之后、元《授时》术以前,皆用此术推求上元积算。”[2] 张敦仁依自己归纳的“求一总术”,以五星日率推演后汉《四分历》上元积年及太岁所在;又依秦九韶演纪术,由回归年、朔望月及某年(甲子岁)天正冬至干支时刻及月龄,对《麟德》、《大衍》、《崇天》、《纪元》和《授时》五历上元积年作示范性推算。[10]

秦九韶《数书九章》[11] 卷 3 给出“治历演纪术”术文:

> 以历法求之,大衍入之。调日法,如何承天术。用强弱母子互乘,得数并之,为朔余。以二十九日通日法,增入朔余,为朔率。又以日法乘前历所测冬至气刻分,收弃末位为偶数,得斗分。与日法,用大衍术入之。求等数、因率、蔀率。以纪乘等数为约率,置所求气定骨,如约率而一,得数以乘因率,满蔀率去之。不满,以纪法乘之,为入元岁。次置岁日,以日法通之,并以定斗分,为岁率。以十二月乘朔率,减岁率,余为岁闰。以岁闰乘入元岁,满朔率去之。不满,为入闰,与闰骨相减之,得差。(或适足,便以入岁元为积年,后术并不用;或差在刻分法半数以下者,亦以入元岁为积年)必在刻分法半数以上,却以闰泛骨并朔率,得数,内减入闰,余与朔率,求闰缩。(在朔余以下,便为闰缩;以上,用朔率减之,亦得)以纪法乘以法,为纪率。以等数约之,为气元率。以气元率乘岁闰,满朔率去之,不满,为元闰。虚置一亿,减入元岁,余为实,元率除之,得乘限。乃以元闰与朔率,用大衍入之,求得等数、因数、蔀数。以等数约闰缩,得数,以因数乘之,满蔀数去之。不满,在乘限以下,以乘元率,为朔积年。并入元岁,为演纪积年,又加成历年。

可见,秦九韶推算上元积年共有二法,各分两步,仅第二步求元数方法不同。第一法是《开禧历》(1207)演纪积年法。先用大衍总数术(一次同余式)求出入元岁,再用“方程”(不定方程)求出元数,通过求出朔积年来推算上元积年;第二法,秦九韶把上法第二步求元数加以改进。[12]

秦九韶《数书九章》卷 3 将演纪积年法分解成复杂的演算环节,即日法、朔余、朔率、斗分等“二十三事”:

今人相乘演积年,其术如调日法,求朔余、朔率,立斗分、岁余,求气骨、朔骨、闰骨,及衍等数、约率、因率、蔀率,求入元岁、岁闰、入闰、元率、元闰,已上皆同此术。但其所以求朔积年之术,乃以闰骨减入闰,余谓之闰底,却与闰缩、朔率、元闰,列号甲乙丙丁四位,除乘消减,谓之方程。乃求得元数,以乘元率,所得谓之朔积年。加入元岁,共为演纪岁积年。所谓方程,正是大衍术[今人少知],非特置算系名,初无定法可传,甚是惑误后学,易失古人之术意。故今术不言闰赢而曰入闰差者,盖本将来可用入元岁便为积年之意,故今止将元闰、朔率二项,以大衍先求等数、因数、蔀数者,乃仿前求入元岁之术理。假闰缩如气骨,以等数为约数,及求乘数、蔀数,以等约闰缩,得因乘数,满蔀去之。不满,在限下,以乘元率,便得朔积年。亦加入元岁,共为演纪积年。此术非惟比用乘除省便,又且于自然中取见积年,不惑不差矣。新术敢不用闰赢而求者,实知闰赢已存于入闰之中。但求朔积年之奇分,与闰缩等,则自与入闰相合,必满朔率所去故也。[11]

根据李继闵的分解[6],加上我们的检验,以上术文可演示为下图3:

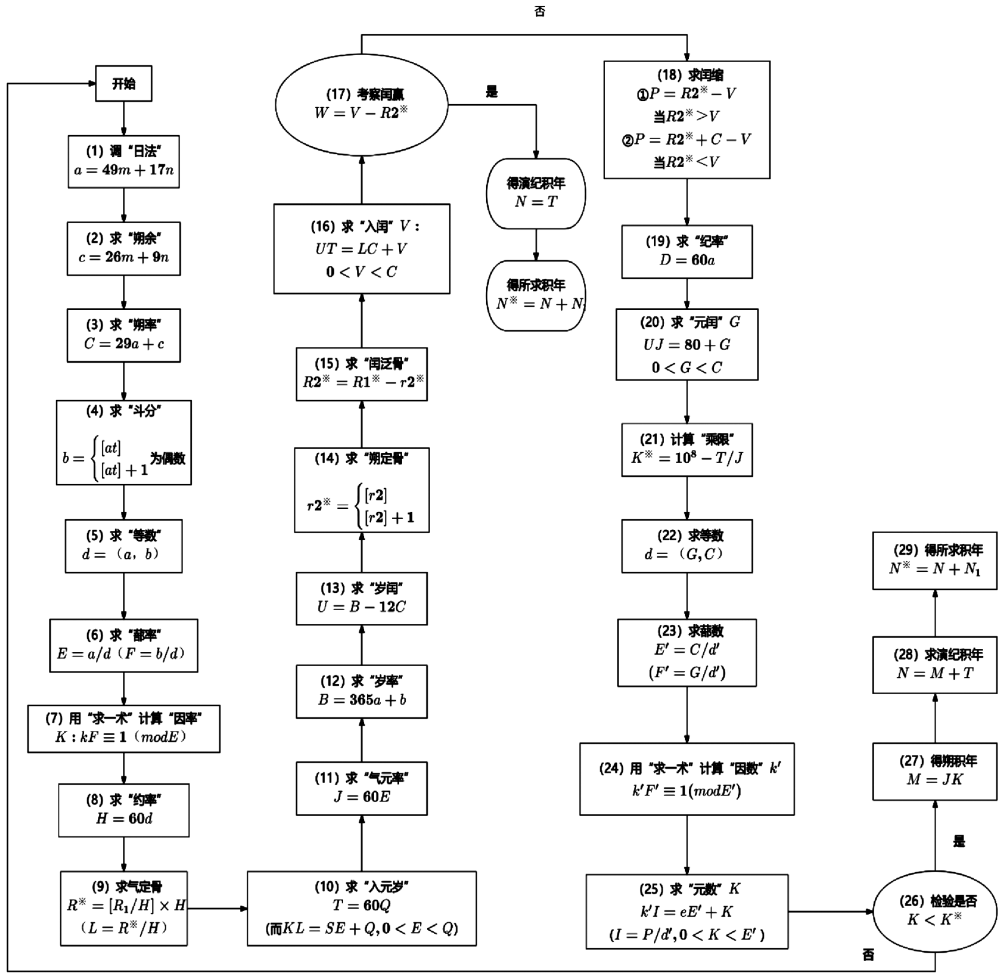


图3 秦九韶演纪积年法演算流程图

张敦仁《求一算术》卷下依据秦九韶演纪术进行算法复原：

术曰：以日法斗分求得等率；以约日法得蔀率；以约斗分得奇率；以蔀率、奇率用求一术求得因率；以等率乘纪法六十所得为约率；以约气应所得，以因率乘之蔀率，去之；余以纪法六十乘之得入元岁，又以纪法六十乘蔀率得气元率。（此气元率为气分岁名日名俱终之数）又置入元岁，以岁闰乘之，满朔实去之，余为入闰。（此入闰为入岁应有之闰余）以减加朔实而减之，余为闰缩。（此闰朔为今所求入元岁初年之闰余）又置气元率，以岁闰乘之，满朔实去之，余为元闰。（此元闰为气元率应有之闰余）以朔实、元闰求奇数，用求一术求得因数，以等数约闰缩所得，以因数乘之，满蔀数去之，余为乘元限数，以乘气元率所得，为朔积年。以入元岁加之，即得上元以来所求积算也。[2]

我们把以上张敦仁推求上元积年的程序示意如下图 4：

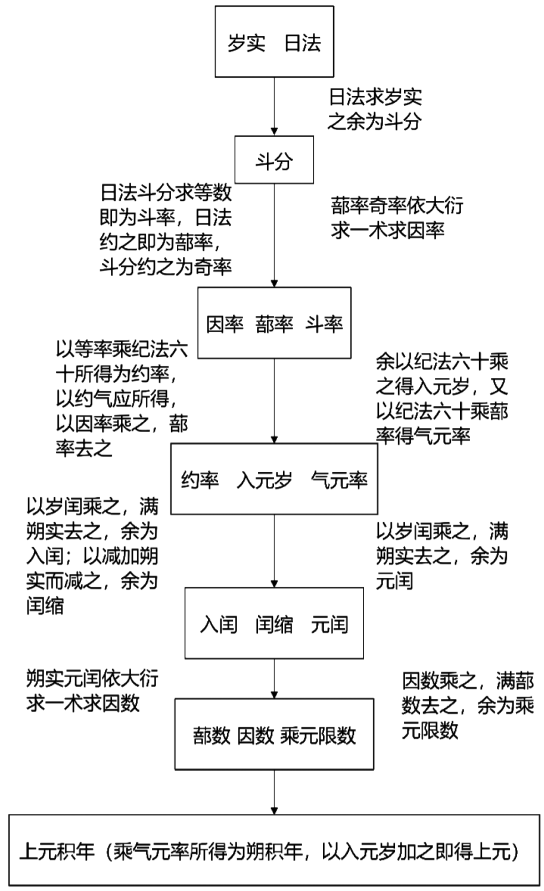


图 4　张敦仁推求上元积年程序图

张敦仁的方法大致分 7 步：（1）斗分；（2）蔀率和因率；（3）约率、入元岁和气元率；（4）入闰、闰缩和元闰；（5）因数、蔀数和乘元限数；（6）朔积年；（7）求上元积年。重点是采用“求等”和大衍总数术，特别是求因数和因率时主要采用大衍总数术，第一步和第三步同时使用了“求等”。张敦仁的方法从头到尾无不凸显“一次同余”而回避“方程”，这

与《求一算术》一书的主线是一致的,从中张敦仁也意识到“大衍术”与“演纪术”是两种不同的数学方法,即“大衍术”来源于中国的剩余定理,其中要对同余式组的所有关系进行处理,会牵扯到许多大数连乘的情形,这样会导致计算量庞大而出现不必要的错误;而“演纪术”主要采用的是“逐步代入法”,将一个同余式组化整为零、各个击破,前面的计算有利于后面的化简,数据的计算相对来说要简单很多,这对后世产生了深远影响。[6]

4 对后世的影响

张敦仁同时及之后,焦循(1763—1820)《大衍求一释》、骆腾凤(1770—1842)《艺游录》(1815)、时曰醇(1807—1880)《求一术指》(1861)以及黄宗宪《求一术通解》(1874)等主要围绕张敦仁开辟的“化问数为定母”和“求乘率”等方向对秦九韶大衍总数术进行改进和完善。

时曰醇《求一术指》[13]提出新的求定数之法,正是在张敦仁基础上的进一步改进:首先,约一存一,随约随乘。其中,针对张敦仁化问数为定母的程序,即第一步约一存一,第二步约一乘一,时曰醇将其变为“约一存一,约一乘一”同时进行,直至互素为止。换言之,约一存一,如果依然有等数,随时直接约一乘一,无需等约毕;其次,张敦仁约分及再约分之前,须先从上到下布筹,然后约分必须按照从最上面的数与后面诸数约分,约遍,再以次位与下面诸位约分,约遍……以此类推。然而时曰醇认为无需从上往下第一位约起,不存在约谁、存谁或约谁、乘谁,只需关注每次新的两个数在约分时约谁存谁,后面则“反其道而行”即可。时曰醇灵感源自张敦仁,但理论基础仍有一定差异。张敦仁重点关注“方法”与“过程”,而忽视“细节”。时曰醇的处理稍显完善。化问数中的约分环节,张敦仁主要依据数的“奇”、“偶”进行约分求定数,而时曰醇则主要依据数的位置进行约分求等。时曰醇求定数方法一方面与张敦仁异曲同工,另一方面彰显改进创新,是对张敦仁的补充和完善:首先摆脱布筹和约分顺序的枷锁,其次跳出数的“奇”、“偶”之别的窠臼,最后约分的方向性与目标性更强。可以说,时曰醇求定数之法较之张敦仁有很大突破,在没有素数概念的情况下几近完美。

黄宗宪之时,分解已给模为素因数乘积的概念已传至我国。黄宗宪化问数为定母之法为析泛母(模)法[14],主要是借助素数概念以及将一个数分解成素因数的乘积,即对非互素各问数先找出各问数的素因数,各问数素因数中相同素因数个数出现最多的保留,其余的舍弃,独立的素因数保留,个数相同的随意保留,各问数保留下来的素因数的乘积即为相应问数的定母。若某个问数的素因数的个数均少于其它问数素因数的个数,则均舍弃,这个问数的定母即为1,此时各个问数化为两两互素。针对同一问题求定数,黄宗宪的结果与张敦仁、时曰醇等人完全一样,这一方面说明中国传统数学求取“等数”的方式与现代数学分解素因数的算法有着相通之处,另一方面说明黄宗宪借助西方元素和思想充分印证了中国传统数学的正确性与适用性。至于“求乘率”,黄宗宪与秦九韶、张敦仁如出一辙,但其以求寄数法来求乘率则是对秦九韶大衍求一术的完美终结,以一种特殊的布筹方式——竖式完美呈现秦九韶大衍求一术,尤其增添了反乘率的概念,成就了中国传统数学的一项创举。

骆腾凤用“大衍求一法”和“大衍奇定相求法”来说明大衍总数术。[15] 骆腾凤求“乘率”的过程有如下意义：(1)对求一过程的合理性给出证明；(2)求解数值；(3)探究二元一次不定方程的解与方程系数间的关系，并由此证明大衍总数术、一次同余式以及不定方程等问题在某种意义上是内在相通的。

张敦仁、时曰醇、骆腾凤和黄宗宪等人相继对秦九韶大衍总数术加以改进和完善，但从数理角度分析，他们是一脉相承、殊途同归的，只是布筹及其目的和作用有所不同。张敦仁开风气之先，重在于对秦九韶大衍总数术原本的计算过程的辨析，让失传 500 年之久的大衍总数术重新走入当时数学界的视野；时曰醇求定数方法是对张敦仁的补充和完善，摆脱布筹和约分顺序的枷锁，跳出数的“奇”、“偶”之别的窠臼，约分的方向性与目标性更强；骆腾凤主要是为验证大衍总数术的正确性和适用性；黄宗宪引入西方的素数概念，利用数的分解素因数而不是我国传统数学的辗转相除或更相减损术，重新求解一个一次同余式，证明西方数学和中国传统数学是可以融会贯通的。

参 考 文 献

[1] 张秀琴. 数学家张敦仁传略[J]. 中国科技史料, 1994, 17(4): 33-38.
[2] 张敦仁. 求一算术[M]. 清道光辛卯(1831)江宁顾晴崖家刻本, 国家图书馆藏.
[3] 郭书春, 主编, 李兆华, 副主编. 中国科学技术史·数学卷[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 581-584.
[4] 李俨. 中算史论丛(第一集)[M]. 北京: 中国科学院, 1954: 143.
[5] 李俨, 钱宝琮. 李俨钱宝琮科学史全集(第 1 卷)[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1998: 39-41.
[6] 吴文俊, 主编. 秦九韶与《数书九章》[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1987: 205-212.
[7] 祖春慧. 张敦仁数学工作研究[D]. 天津: 天津师范大学, 2018.
[8] 钱宝琮. 钱宝琮科学史论文选集[M]. 北京: 科学出版社, 1983: 541.
[9] 侯钢. 秦九韶“大衍总数术”中问数化定数算法解析[J]. 自然科学史研究, 2011, 30(4): 435-449.
[10] 王渝生. 中国算学史[M]. 上海: 上海人民出版社, 2006: 252.
[11] 秦九韶. 数书九章[M]. 上海: 商务印书馆, 1937: 58.
[12] 王冀勋. 秦九韶演纪积年法初探[J]. 自然科学史研究, 1997, 16(1): 10-20.
[13] 时曰醇. 求一术指[M]. 扫叶斋清光绪五年(1879)重校本.
[14] 黄宗宪. 求一术通解[M]. 白芙堂算学丛书本, 国家图书馆藏.
[15] 骆腾凤. 艺游录[M]. 清刻本, 国家图书馆藏.

Zhang Dunren's Contribution to the Development of the *"Dayan Zongshu Shu"*

YANG Xiaoming　HUO Xingchen　YANG Lingxia

(*College of Humanities, Donghua University, Shanghai* 200051, *China*)

Abstract　In the history of solving congruence equations, Zhang Dunren (张敦仁, 1754—1834) of the mid Qing Dynasty played a crucial role bridging the past and the future. Almost a contemporary of the German mathematician Gauss, Zhang proposed the *qiuyi shu* (求一术, method for finding unity) based on the Southern Song mathematician Qin Jiushao(秦九韶)'s *dayan zongshu shu*

(大衍总数术, general *dayan* method). Zhang also observed that the *qiuyi shu* originated from the problem of *wu buzhi shu*(物不知数, things not knowing their numbers) in the *Sunzi suanjing*(孙子算经, *Mathematical Classic of Sunzi*), and the great mathematical practice of ancient Chinese astronomy and calendrical science for solving the problem of the *shangyuan jinian*(上元积年, accumulation of years of the upper element). Zhang simplified and proceduralized Qin's methods from the aspects of "transforming question numbers into fixed numbers", "calculating multiplication rates", and "*calculating the shangyuan jinian*", creating the *dayan zongshu shu*, a pearl of pre-modern Chinese mathematics. This method in turn served as the foundation for the subsequent work of Luo Tengfeng (骆腾凤), Shi Yuechun(时曰醇), Huang Zongxian(黄宗宪), and others.

Keywords Zhang Dunren(张敦仁); *qinyi shu*(求一术, method for finding unity); *dayan zongshu shu*(大衍总数术, general *dayan* method); multiplication rates; *shangyuan jinian*(上元积年, accumulation of year of the upper element)