

中国古代对行星盈缩历起点黄经 及其进动值的测算

唐 泉

(西北大学 科学史高等研究院, 西安 710127)

摘 要 唐代天文学家一行在《大衍历》中,首次用行星变差来刻画行星盈缩历起点每年相对于冬至点的进动,此后的历法或者沿袭《大衍历》的做法直接给出行星变差,或者将行星变差隐含在相关算法中。本文全面考察了《大衍历》类历法中的行星变差常数及其含义,对于未直接给出行星变差的历法,则根据历法中的相关术文,重新构建了这些历法中行星盈缩历起点平均每年进动数值的表达式,并总结了行星盈缩历起点的进动规律。本文的研究结果表明,行星盈缩历起点并非行星近日点,但是由于外行星盈缩历起点黄经与其近日点黄经相差较小,因此可以将外行星盈缩历起点视为近日点。与此相应,行星变差或盈缩历起点进动并非行星近日点进动,由于各部历法中的行星变差或盈缩历起点进动值没有明显的规律可循,因此历法家很有可能已经具备了通过实测确定行星盈缩历起点的能力,而行星变差或盈缩历起点进动值应该是历法家确定行星盈缩历起点之后,配合上元积年而调整出来的数值。

关键词 行星变差;盈缩历;进动;大衍历;纪元历

中图分类号 N092

文献标识码 A

文章编号 1000-0224(2024)02-0146-25

1 引 言

由于地球和其他行星摄动等因素的影响,当行星从近日点出发公转一周后,并非回到近日点,而是在行星运行的方向上有一个微小的移动,这就是行星近日点进动现象。根据牛顿定律和爱因斯坦的广义相对论,行星的近日点每年都在进动。行星近日点黄经的变化,主要是由坐标系的岁差引起的,能真正体现行星近日点进动的,只是近日点黄经变化量中的10%—20%左右。以水星为例,如果扣除岁差影响,其近日点进动值约为 $5.75''$ /年。

收稿日期: 2022-05-06; 修回日期: 2024-01-31。

作者简介: 唐泉, 1974年生, 甘肃靖远人, 教授, 主要从事数理天文学史研究, Email: tangquan74@nwu.edu.cn。

基金项目: 国家社科基金冷门绝学研究专项学术团队项目“中国古代历法中的‘步五星术’研究”(项目编号: 20VJXT005); 国家社科基金重大项目“中国历史学”(项目编号: 22&ZD221)。

那么,中国古代历法家是否已经认识到行星近日点进动现象?要回答这个问题并不容易,因为中国古代历法家并未明确提出行星近日点概念,行星近日点进动更无从谈起。不过,在中国古代行星理论中,却有与行星近日点及其进动类似的概念。唐代天文学家一行在《大衍历》步五星术中,为每个行星设计了一个常数——“变差”,用来刻画行星盈缩历起点每年相对于冬至点的进动值。根据一行的定义,“变差”其实就是行星盈缩历起点黄经每年的变化量,为方便叙述,本文借用现代天文学中的“进动”概念,来描述行星盈缩历起点黄经的变化现象。《大衍历》以后的历法,或者直接给出行星变差常数,或者在相关算法中隐含了行星盈缩历起点进动。这些历法中的行星盈缩历起点与行星近日点密切相关,而行星变差或盈缩历起点的进动则与行星近日点进动相关。

关于中国古代历法家对行星盈缩历起点黄经及其进动数值的测算,此前已引起学者关注。陈美东详细讨论过中国古代行星近日点黄经及其进动数值的误差,以及《纪元历》等未采用行星变差的历法中行星近日点的进动规律。^[1-3] 由于他认为行星盈缩历起点就是行星近日点,因此《大衍历》等历法中的行星变差就被视为行星近日点进动。曲安京认为行星盈缩历起点并非行星近日点,他在讨论《大衍历》等历法中行星盈缩历起点的黄经及其进动值时明确指出,行星盈缩差是行星中心差和太阳中心差的叠加函数,因此行星盈缩历的起点并不完全等同于行星近日点,但是由于中国古代历法家通常假定太阳近地点在冬至点,在此前提下,行星盈缩历起点黄经的进动值可以等同于行星近日点黄经的进动值。^[4] 此外,也有个别学者讨论过某一部历法中行星近日点和远日点黄经^[5],但其他比较深入的研究并不多见。

上述学者的相关研究,对我们客观评价中国古代历法家对行星盈缩历起点黄经及其进动值的测算水平,具有重要的参考意义。不过,前人关于这个课题的研究还有一些需要补充的地方,主要表现在如下两方面:其一,对于《钦天历》等未直接给出行星变差的历法,此前学者推导的内行星盈缩历起点黄经平均每年进动公式以及逐年进动规律均存在一些问题;其二,此前学者在讨论行星盈缩历起点黄经的进动值的误差时,历法计算结果为盈缩历起点的地心黄经,而相应的理论结果为行星近日点的日心黄经,二者之间并不具备可比性。有鉴于此,本文将在前人研究基础上,重新考察中国古代历法中行星盈缩历起点黄经及其进动的相关问题,以期不断推进中国古代行星运动理论的研究。

2 《大衍历》类历法中的行星变差

北齐天算学家张子信发现行星不均匀运动现象后,隋代天文学家刘焯在《皇极历》中率先设计五星入气加减差算法修正行星的不均匀运动,该算法被《大业历》、《戊寅元历》、《麟德历》和《正元历》等历法继承。唐代天文学家一行在《大衍历》中,在五星入气加减差算法的基础上,设计了五星爻象历计算行星的不均匀运动,并用行星“变差”来刻画行星爻象历起点相对冬至点的进动。此后,一部分历法沿袭了《大衍历》的做法直接给出行星变差,另一部分历法虽然未直接给出行星变差,但从这些历法的相关算法中可以推导出行星变差常数。

与以前的历法相比,唐代《大衍历》在行星理论方面取得了长足的进步,特别是《大衍

历》设计的行星算法框架,五星爻象历和行星变差对此后历法产生了深远的影响。《大衍历》在行星理论方面的创新之一,是提出了行星爻象历起点进动的概念并给出了具体数值,一行将其称为“变差”。《大衍历》中的五星变差常数如表 1 所示。

表 1 《大衍历》中的五星变差

行星	变差(单位:分/年)	变差(单位:度/年)	变差(单位:年/度)
木星	34. 14	0. 0112	89. 0451
火星	32. 02	0. 0105	94. 9407
土星	22. 92	0. 0075	132. 6353
金星	30. 53	0. 0100	99. 5742
水星	136. 78	0. 0450	22. 2255

表 1 中第 2 列数据采自《新唐书·历志四下》所载《大衍历》^[6],《旧唐书·历志三》所载《大衍历》缺火星变差常数,木星、土星和金星变差常数与《新唐书·历志四下》所载相同,水星变差与《新唐书》略有不同。《大衍历》中行星变差的单位是“分/年”,1 度 = 3040 分。第 2 列数据除以《大衍历》通法 3040,即可得到第 3 列以“度/年”为单位的变差数值,通法 3040 除以第 2 列数据,即可得到第 4 列以“年/度”为单位的变差数值。

《大衍历》中的行星“变差”主要用于“求平合入爻象历”算法,其术文称:

求平合入爻象历:置积年,各以其星变(以)差乘之,满乾实去之,不满者,以大衍通法约之,为日。不尽为余秒。以减其星冬至夜半后平合日算及余秒,即平合入历算数及余秒也。各四约其余,同其辰法也。([6],2092 页)

爻象历是《大衍历》为修正行星不均匀运动而设计的天文算表,类似的天文算表在宋代及以后的历法中称为盈缩历,五星爻象历和盈缩历在行星计算中扮演着非常重要的角色。需要指出,《大衍历》五星爻象历中的进退积与宋代历法盈缩历中盈缩差的天文含义并不完全相同,从进退积到盈缩差,需要用到一个转换系数,这个系数与太阳和行星的公转角速度有关。^[7]所谓“求平合入爻象历”,就是要计算平合时行星在爻象历中的位置,即平合时行星距离爻象历起点的度距,这个度距是计算行星进退积的自变量。

术文中,“积年”(N_n)意为上元至所求年天正冬至的积年数,“乾实”(S)意为周天分,若令 r 表示所求年天正冬至点距离爻象历起点的度分, q 表示“变差”,则根据术文, r 可由下式求出:

$$qN_n \equiv r(\text{mod } S) \quad (1)$$

若令冬至夜半后平合日算及余秒为 γ_0 日,行星平合入历算数及余秒为 λ_0 度,则根据《大衍历》术文, λ_0 可由下式求出:

$$\lambda_0 = \gamma_0 - \frac{r}{A} \quad (2)$$

式(2)中,通法 $A = 3040$,为《大衍历》中的日法, γ_0 可以根据《大衍历》“推五星平合”算法求出,所谓“推五星平合”,就是要推算平合时刻距离所求年天正冬至晨前夜半的日数。由于平太阳日行一度,因此平合时太阳和行星的位置距离所求年天正冬至晨前夜半太阳位置亦为 γ_0 度。通常来说,“平合日算”意为平合时刻距离所求年冬至的时距,但是在

《大衍历》中,“平合日算”指的是平合时刻距离所求年冬至晨前夜半的时距,与其他历法中的“平合日算”略有不同。根据上面的讨论可以看到,《大衍历》中的行星变差,意为行星交象历起点每年相对于冬至点的进动数值。

《大衍历》中行星变差的意义可以借助图 1 进行说明。图 1 中,令 E 表示地球, W_1 为某一年冬至点和行星交象历起点重合,经过一个回归年后,太阳逆时针运动至冬至点 W_2 ,行星交象历起点移动至 A 或 B , W_1W_2 即为岁差, W_2A 或 W_2B 即为行星变差,即行星交象历起点每年相对于冬至点进动的数值。按《大衍历》所取岁差值为 $W_1W_2 = 36.75$,根据表 1 中数据,《大衍历》中木星、火星、土星和金星的变差均小于岁差,只有水星变差大于岁差,因此可用图 1 中 W_2A 表示木星、火星、土星和金星的变差,用 W_2B 表示水星的变差。比较《大衍历》中行星变差与岁差可知,木星、火星、土星和金星这四个行星的交象历起点每年相对于恒星背景实际是退行的,每年退行量为 W_1A ,只有水星交象历起点每年相对于恒星背景是顺行的,每年进动量为 W_1B 。

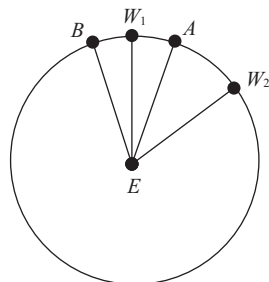


图 1 《大衍历》中的行星变差

《大衍历》以后的部分历法沿袭《大衍历》的做法,直接在步五星术中给出行星变差常数,这些历法中行星变差的含义均与《大衍历》相同,但名称可能略有不同。例如,《大衍历》、《五纪历》、《宣明历》和《应天历》等历法称其为“变差”,《崇玄历》、《仪天历》、《崇天历》、《观天历》和《统元历》等历法称其为“岁差”,《明天历》称其为“历差”,《乾元历》称其为“差”,等等。

虽然《大衍历》等历法中直接给出了行星变差,但是不同历法中的行星变差并不能直接进行比较,因为历法中的行星变差与其所取日法有关,而不同历法选取的日法并不相同。为方便比较,我们可以将各部历法中的行星变差统一化为弧秒,二者的转化需要用到历法中的周天分常数。以《大衍历》木星为例,《大衍历》通法 $A = 3040$,乾实 $S = 1110379.75$,木星变差 $q = 34.14$,将 q 换算为以弧秒为单位的变差 q' ,其结果为:

$$q' = \frac{q}{A} \times \frac{360}{(S/A)} \times 3600'' \approx 39.85''$$

利用上式,可以求出每部历法中行星变差对应的弧秒。需要说明一点,在《大衍历》等历法中,行星变差的单位通常为“分/年”,除以日法即可将其单位化为“度/年”,但是《宣明历》和《明天历》比较特殊。根据《宣明历》算法,在将行星变差的单位化为“度/年”时,需要用变差除以统法(日法)的 300 倍。与《宣明历》类似,《明天历》在将行星变差的单位化为“度/年”时,需要用变差除以元法(日法)的 160 倍。

我们将计算结果列在表 2 中,表 2 中同时列出了各部历法所取岁差值对应的弧秒。表 2 中,第 1 列为历法名称,第 2 列为各部历法所取岁差值,第 3—7 列分别为五星的变差。据《明天历》称:“金、水附日而行,更不求历差。”^[8]即《明天历》明确提及金星和水星不设历差,故在表 2 中,《明天历》金水二星历差用“/”进行标示。《统元历》金星常数有明显脱漏,其金星岁差值应在脱漏文字中,故在表 2 中《统元历》金星岁差值用“缺”进行标示。

表 2 《大衍历》等历法中的行星变差

历法	岁差	木星	火星	土星	金星	水星
大衍历	42". 89	39". 85	37". 37	26". 75	35". 63	159". 65
五纪历	38". 92	39". 40	86". 24	26". 13	131". 65	134". 65
宣明历	41". 82	0". 14	4". 23	0". 39	1". 74	4". 51
崇玄历	42". 12	35". 20	35". 08	34". 94	35". 34	35". 12
应天历	41". 93	35". 42	34". 41	33". 42	34". 64	34". 13
乾元历	40". 74	34". 93	35". 14	34". 94	35". 22	35". 14
仪天历	41". 80	34". 76	34". 56	35". 17	42". 45	34". 43
崇天历	41". 89	34". 53	34". 69	34". 77	34". 78	34". 83
明天历	45". 74	35". 11	34". 82	35". 45	/	/
观天历	45". 59	34". 43	34". 25	34". 30	34". 42	34". 33
统元历	45". 50	34". 81	34". 35	34". 48	缺	34". 66

从表 2 可以看出,《大衍历》等历法中的行星变差常数基本都在 34"–35"左右徘徊,取值相对比较稳定,只有个别历法中行星变差取值比较反常。例如,《大衍历》中水星变差为 159. 65",《五纪历》中火星、金星和水星变差分别为 86. 24"、131. 66"和 134. 65",取值均偏大;《宣明历》中木星、火星、土星、金星和水星的变差分别为 0. 14"、4. 23"、0. 39"、1. 74"和 4. 51",取值均偏小。此外,根据陈美东计算,《应天历》中五星变差依次为木星 0. 06"、火星 1. 06"、土星 2. 05"、金星 0. 84"、水星 1. 34",他由此指出《应天历》中行星变差取值比较反常。([2], 427 页)实际上,《应天历》中行星变差取值并不反常,这是因为在《应天历》多个算法中都使用了一个称为“展”的特殊算法,由于陈美东和王应伟等学者均将《应天历》中的“展”误解为“乘”^[9],从而在解读涉及“展”这个特殊算法的术文时,均产生了相应误解。李刚指出,“展”的含义并非是“乘”,而是指一种特殊的相减相乘算法。^①《应天历》所给五星变差常数分别为木星 0. 16、火星 3、土星 5. 79、金星 2. 36、水星 3. 78,但是根据《应天历》中特殊算法“展”的使用规则,需要从 100 中减去《应天历》所给行星变差常数,即《应天历》中实际参与运算的五星变差依次为木星 99. 84、火星 97、土星 94. 21、金星 97. 64、水星 96. 22,将其化为弧秒,依次为木星 35. 42"、火星 34. 41"、土星 33. 42"、金星 34. 64"、水星 34. 13"。由此可见,与《大衍历》等历法相比,《应天历》五星变差取值并不反常。关于行星变差的天文意义,我们将在第 4 节详细讨论。

3 《钦天历》类历法中的行星盈缩历起点进动

从上一节的讨论可以看出,在《大衍历》等采用行星变差的历法中,行星变差即为行星爻象历或盈缩历起点每年相对于冬至点的进动数值。与《大衍历》中五星爻象历类似的天文算表,在宋代以后的历法中通常被称为五星盈缩历,为讨论方便,本文用五星盈缩

① 在西北大学科学史高等研究院组织的历法讨论班上,李刚汇报过《应天历》中“展”这个特殊算法的含义。

历泛指此类天文算表。但是,并非《大衍历》之后的每部历法都直接给出了行星变差,对于《钦天历》、《纪元历》和《授时历》等未直接给出行星变差的历法,只能先利用行星平合入历算法和平合中星算法计算行星盈缩历起点黄经,然后推导出行星盈缩历起点平均每年进动值及其变化规律。由于这些历法中的五星平合入历算法并不完全相同,因此这些历法中行星盈缩历起点进动公式以及逐年变化规律并不相同。对于《钦天历》和《纪元历》这类未采用行星变差的历法而言,行星盈缩历起点进动的计算比较复杂,特别是行星盈缩历起点并非每年均匀进动,其变化规律并不容易把握。

在《钦天历》等未采用行星变差的历法中,行星平合入历算法与另外一个天文常数“历率”或“历度”相关,“历率”或“历度”与行星在一个盈缩周期内运行的度距相关。在这些未采用行星变差的历法中,根据五星平合入历算法,又可分为《钦天历》类算法,《乾道历》类算法和《知微历》类算法。本节将以《纪元历》、《乾道历》和《知微历》等三部代表性历法为例,从这些历法中的平合中星算法和平合入历算法入手,推导出各部历法中行星盈缩历起点进动公式以及逐年变化规律。

3.1 《钦天历》、《纪元历》和《淳熙历》中的行星盈缩历起点进动

3.1.1 《钦天历》和《纪元历》中的平合中星与平合入历算法

采用《钦天历》五星平合入历算法的还有《纪元历》和《淳熙历》。在《钦天历》中,与行星盈缩历起点黄经计算相关的算法有两个,一个是“中日中星”算法,一个是“入历”算法。《钦天历》“中日中星”算法称:

中日中星:置气积,以其星周率除之,为周数;不尽为天正中气积前合。用减岁率,为前年天正中气后合。如不足减,则加岁率以减之,为次前年天正中气后合。各以统法约之,为日、为度,即所求平合中日、中星也。置中日,以逐段变日累加之,即逐段中日也。置中星,以逐段变度顺加、退减之,即得逐段中星。金水夕伏晨见,皆退变也。([6], 2431-2432 页)

术文中,“周率”(H)意为以日分为单位的行星会合周期,“气积”意为回归年(T)与上元积年(N_n)的乘积,根据术文:

$$\frac{TN_n}{H} = (M - 1) + \frac{r}{H} \quad (3)$$

式(3)中的($M - 1$)即术文中所称“周数”,意为上元至所求年天正冬至这段时间内包含($M - 1$)个完整的行星会合周期; r 称为“天正中气积前合”,即所求年天正冬至距前一个五星平合的时距。若令 γ_0 表示平合中日,则根据术文:

$$\gamma_0 = \begin{cases} (T - r)/A, & T - r > 0 \\ (2T - r)/A, & T - r < 0 \end{cases} \quad (4)$$

式(4)中,统法 $A = 7200$,($T - r$)即为“前年天正中气后合”,意为所求年前一年的天正冬至距离本次五星平合的时距。($2T - r$)即为“次前年天正中气后合”,意为所求年前二年的天正冬至距离本次五星平合的时距。由于火星的会合周期大于两个回归年长度,因此按照《钦天历》算法,有时还会出现 $\gamma_0 = (3T - r)/A$ 的情形。很显然,《钦天历》所求“平合中日”意为所求年冬至前最后一次平合时刻距离其前最后一个冬至时刻的时距。若要计算所求年天正冬至距离其后第一次平合的时距,则有:

$$\gamma_0 = \frac{H - r}{A} \quad (5)$$

一般的历法都是按照式(5)计算平合中日的,很显然,式(4)和(5)中对平合中日的定义虽然不同,但是并无实质区别。由于平合时太阳与行星的黄道宿度相等,而平太阳日行一度,因此从数值上讲,“平合中日”等于“平合中星”,所谓“平合中星”即为平合时行星距离相应的冬至点的度距。平合中积累加诸段变日即得诸段中日,平合中星累加诸段变度即得诸段中星,变日和变度意为行星在一个会合周期内各段目运行的平均时间和度距,二者均为行星动态表中所给常数。

《钦天历》“入历”算法称:

入历:置变率,以周数乘之,以历率去之,余满统法为度。历中以下,为先;以上,减去历中,为后;即所求平合入历。以逐段变历累加之,得逐段入历也。([6], 2432 页)

所谓“入历”,就是要计算行星在盈缩历周期中的位置,这是《钦天历》计算行星先后定数的自变量。《钦天历》中的先后定数在宋代历法中称为盈缩定差,是历法家为修正行星中心差而设计的一个特殊变量。术文中的“平合入历”和“逐段入历”意为行星运行至各段目节点时距离前一个盈历起点或缩历起点的度距。“变率”是《钦天历》步五星术中的常数,对于外行星,“变率”为 $(H - T)$;对于内行星,“变率”为 H 。“周数”意为上元至某次合包含的行星会合的次数,其数值已在“中日中星”算法中求出,即式(3)中的 $(M - 1)$ 。

与《大衍历》等历法不同,《钦天历》中的“平合入历”意为所求平合时行星距离前一个盈历起点或缩历起点的度距,但是在计算行星盈缩历起点黄经时,只需要用到行星平合时距离盈历起点的度距。为讨论方便,令平合入历度 λ_0 表示天正冬至后第一次平合时行星距离盈缩历起点的度距, S_t 表示历率,其意为行星在一个近点周期内运行的度分,上元至所求年天正冬至包含 $(M - 1)$ 个完整的会合周期,根据《钦天历》术文,对于外行星和内行星, λ_0 可分别由以下两式求出:

$$\frac{M \times (H - T)}{A} \equiv \lambda_0 \left(\text{mod } \frac{S_t}{A} \right) \quad (6)$$

$$\frac{M \times H}{A} \equiv \lambda_0 \left(\text{mod } \frac{S_t}{A} \right) \quad (7)$$

由于平合中星 γ_0 和平合入历度 λ_0 已知,则我们可以按照以下思路计算《钦天历》行星盈缩历起点黄经。若设每年行星盈缩历起点到冬至点的度距为 Δ ,则 Δ 可由下式求出:

$$\gamma_0 - \lambda_0 \equiv \Delta \left(\text{mod } S_t \right) \quad (8)$$

进一步可求出所求年的行星盈缩历起点黄经为:

$$\omega = 270^\circ + \Delta \times \frac{360^\circ}{S/A} \quad (9)$$

式(9)中, $S = 2629844.80$ 称为轨率,是《钦天历》所取周天分常数。

《纪元历》中的平合中星算法和平合入历算法基本沿袭了《钦天历》算法,仅在细节上略有差别。《钦天历》按照式(3)和(4)计算平合中星,而《纪元历》则按照式(3)和(5)计

算平合中星。《纪元历》平合入历算法基本沿袭了《钦天历》,只在个别常数定义上略有不同。《钦天历》中的“变率”在《纪元历》中被称为“周差”,由于火星变率大于历率,《纪元历》为计算方便,重新定义火星周差为 $(H - T - S_t)$,除此之外,两部历法计算外行星平合入历度的算法完全一致。与《钦天历》不同的是,《纪元历》不再为内行星设“周差”常数,因此《纪元历》中内行星平合入历算法与《钦天历》内行星平合入历算法在形式上略有不同。根据《纪元历》术文,其内行星平合入历度 λ_0 可由下式求出:

$$\frac{TN_n}{A} + \gamma_0 \equiv \lambda_0 \pmod{\frac{S_t}{A}} \quad (10)$$

由于 $\gamma_0 + \frac{TN_n}{A} = \frac{M \times H}{A}$,故式(10)与(7)等价,即《纪元历》和《钦天历》内行星平合入历算法完全等价。

南宋的部分历法不载术文,但根据《宋史·律历志》记载,这些历法的术文基本沿袭《崇天历》和《纪元历》。《淳熙历》不载术文,仅载天文常数,分析《淳熙历》步五星术中周差常数,可知其五星平合入历算法沿袭了《纪元历》算法。

3.1.2 《纪元历》行星盈缩历起点进动公式

为了更好地理解《钦天历》类历法中行星盈缩历起点的进动规律,我们以算法比较规整的《纪元历》为例,从《纪元历》中的相关算法入手,构建《纪元历》行星盈缩历起点的进动公式。由于《纪元历》外行星和内行星的平合入历算法不同,因此外行星与内行星盈缩历起点进动值的表达式并不相同。

我们首先推导《纪元历》外行星盈缩历起点黄经平均每年进动的公式。如图2所示,假定外行星与太阳会合于冬至点 W_1 , W_1 同时为外行星盈缩历起点,经过一个会合周期后,外行星与太阳在 C 点会合, W_2 表示次年冬至点, A 表示次年冬至时外行星的盈缩历起点,经过一个盈缩历周期后,外行星盈缩历起点从 W_1 运行至 B 。

根据外行星会合运动规律,外行星在一个会合周期内相对于位于 W_1 点的恒星运行 $W_1C = (H - S)/A$ 度,其中 S 表示《纪元历》所取周天分。但是根据式(6),外行星在一个会合周期内相对于盈缩历起点运行 $W_2C = (H - T)/A$ 度,这相当于在一个会合周期内,外行星盈缩历起点从 W_1 退行至 W_2 ,退行距离为 $W_1W_2 = (S - T)/A$ 度,利用比例算法,可以求出外行星盈缩历起点每年退行的距离为:

$$q_1 = \frac{(S - T)}{A} \times \frac{T}{H} \text{ (度)} \quad (11)$$

根据《纪元历》中历率 S_t 的定义方式,行星在一个盈缩历周期内运行 S_t/A 度,设行星一个盈缩历周期为 G/A 日,则外行星盈缩历起点每年还要退行:

$$q_2 = \frac{(S - S_t)}{A} \times \frac{T}{G} \text{ (度)} \quad (12)$$

综合式(11)和(12),可以得到《纪元历》外行星盈缩历起点每年相对于冬至点进动的数

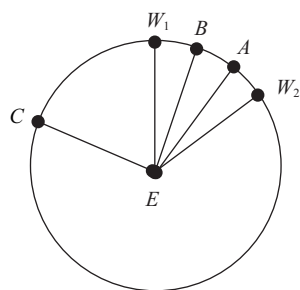


图2 《纪元历》外行星盈缩历起点进动

值为:

$$q = W_2 A = W_1 W_2 - q_1 - q_2 = \frac{(S - T)}{A} - \frac{(S - T)}{A} \times \frac{T}{H} - \frac{(S - S_t)}{A} \times \frac{T}{G} \text{ (度)} \quad (13)$$

由于外行星在一个会合周期内相对盈缩历起点移动 $(H - T)/A$ 度, 因此其速度为 $(H - T)/H$ 度/日, 于是有 $\frac{H - T}{H} \times \frac{G}{A} = \frac{S_t}{A}$, 由此得到 $G = \frac{HS_t}{H - T}$, 代入式 (13) 并进行化简, 得到:

$$q = \frac{(H - T)(S_t - T)}{HS_t} \times \frac{S}{A} \text{ (度)} \quad (14)$$

类似地, 我们可以推导出《纪元历》内行星盈缩历起点黄经平均每年进动公式。如图 3 所示, 假定内行星与太阳会合于冬至点 W_1 , W_1 同时为内行星盈缩历起点, 经过一个会合周期后, 内行星与太阳在 C 点会合, W_2 表示次年冬至点, 经过一个盈缩历周期后, 内行星盈缩历起点从 W_1 退行至 B , A 表示次年冬至时内行星的盈缩历起点。

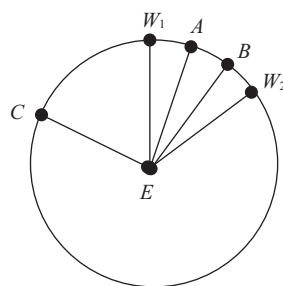


图 3 《纪元历》内行星盈缩历起点进动

根据式 (7), 《纪元历》内行星在一个会合周期内相对于盈缩历起点运行 $W_1 C = H$ 度。由于内行星平均日行一度, 因此内行星在一个盈缩周期 S_t/A 日内运行 S_t/A 度, 相当于内行星盈缩历起点在一个盈缩周期内退行的度距为: $W_1 B = (S - S_t)/A$ 度。利用比例算法, 可求出内行星盈缩历起点每年退行的度距为 $W_1 A = (S - S_t)/A \times (T/S_t)$ 度, 由此得到内行星盈缩历起点每年相对于冬至点进动的数值为:

$$q = W_2 A = W_1 W_2 - W_1 A = \frac{(S - T)}{A} - \frac{(S - S_t)}{A} \times \frac{T}{S_t} = \frac{(S_t - T)}{A} \times \frac{S}{S_t} \text{ (度)} \quad (15)$$

事实上, 关于《纪元历》中行星盈缩历起点进动问题, 前人有非常细致深入的研究。根据陈美东的研究 ([2], 413-415 页), 《纪元历》木星和土星近日点黄经平均每年进动数值为:^①

$$q = \frac{(H - T) \times (S_t - T)}{S_t \times H} \times \frac{T}{A} \text{ (度)} \quad (16)$$

火星近日点黄经平均每年进动数值为:

$$q = \frac{[S_t \times H + (H - T - S_t) \times T] \times (S_t - T)}{2 \times S_t \times H \times A} \text{ (度)} \quad (17)$$

内行星近日点黄经平均每年进动数值为:

$$q = \frac{(S_t - T)}{A} + \frac{(S - S_t) \times (S_t - T)}{S \times A} \text{ (度)} \quad (18)$$

① 陈美东使用的符号系统与本文不同, 为方便比较, 本文将陈美东使用的符号全部统一按本文使用的符号系统转换, 本文使用的符号则基本沿用曲安京《中国数理天文学》中采用的符号系统。

在式(18)中,陈美东认为 $\frac{(S - S_t) \times (S_t - T)}{S \times A}$ 很小,因此《纪元历》内行星近日点黄经平均每年进动数值约为 $q = \frac{(S_t - T)}{A}$ 。

根据曲安京的研究([4], 572 页),《钦天历》和《纪元历》外行星和内行星近日点黄经平均每年进动值分别为:

$$q = \frac{(H - T) \times (S_t - T)}{H \times S_t} \times \frac{S}{A} \text{ (度)} \quad (19)$$

$$q = \frac{S_t - T}{A} \text{ (度)} \quad (20)$$

通过比较可以看出,我们推导的《纪元历》外行星盈缩历起点进动公式与曲安京推导的结果完全相同,但是与陈美东推导的结果并不相同。为了进一步讨论二者的区别,我们将陈美东推导的火星盈缩历起点进动公式(17)进行变形,得到:

$$q = \frac{(H - T) \times (S_t - T)}{H \times S_t} \times \frac{(S_t + T)}{2A} \text{ (度)} \quad (21)$$

比较我们推导的公式(14)与陈美东推导的公式(16)和(21),可以看出三式均可表示为两个因子的乘积,且三式中的第一个因子相同,第二个因子则各不相同,由于 $S/A \approx (S_t + T)/2A \approx T/A$,所以三式之间的差别尽管极其细微,但它们的含义明显不同。

关于《纪元历》内行星盈缩历起点进动公式,我们推导的结果与两位学者的推导结果各不相同。那么,如何判断各位学者的推导结果是否正确?前面的讨论表明,《大衍历》和《纪元历》中的平合入历算法不同,前者以行星变差入算,后者以周差和历率入算。显然,如果《纪元历》行星盈缩历起点进动公式推导正确,那么根据《大衍历》和《纪元历》中的平合入历算法分别配合《纪元历》中的平合中星算法,计算得到的行星盈缩历起点黄经应该相等。

我们按照陈美东、曲安京和本文所推导的三组公式,计算出《纪元历》行星盈缩历起点平均每年进动值,然后按照《大衍历》中平合入历算法配合《纪元历》平合中星算法计算出崇宁五年(1106)天正冬至时的行星盈缩历起点黄经,分别记做 ω_e 、 ω_q 和 ω_t ,按照《纪元历》算法求出的行星盈缩历起点黄经记为 ω_j 。我们将计算结果列在表3中。

表3 《纪元历》五星盈缩历起点黄经

行星	$\omega_e / ^\circ$	$\omega_q / ^\circ$	$\omega_t / ^\circ$	$\omega_j / ^\circ$
木星	4. 5319	4. 6562	4. 6562	4. 6651
火星	315. 8499	317. 3011	317. 3011	317. 3001
土星	40. 7492	76. 4085	76. 4085	75. 8800
金星	249. 4318	246. 4704	249. 4318	249. 4510
水星	82. 0026	99. 1202	82. 0030	81. 9981

从表 3 中的数据来看,对于土星, ω_c 和 ω_j 之差超过了 25° ; 对水于星, ω_q 和 ω_j 之差超过了 17° ; 而对所有行星, ω_i 和 ω_j 之差都非常小。事实上, 根据三组公式求出的《纪元历》行星盈缩历起点进动值差别非常微小, 特别是对于内行星, ω_c 和 ω_i 与 ω_j 的差别更小, 即使将《纪元历》所用上元积年扩大到 1 000 倍, 三者之间的差别也并不明显。为了更清楚比较三组公式推算结果的差别, 我们将上元积年扩大到 100 000 倍, 分别计算出内行星的 ω_c 、 ω_i 和 ω_j , 结果如表 4 所示。

表 4 《纪元历》内行星盈缩历起点黄经

行星	$\omega_c / ^\circ$	$\omega_i / ^\circ$	$\omega_j / ^\circ$
金星	128. 2937	131. 5249	131. 5319
水星	85. 2718	130. 1023	130. 0986

从表 4 中的数据可以看出, 对于金星和水星, ω_c 和 ω_j 之差分别为 $3. 2382^\circ$ 和 $44. 8268^\circ$, 而 ω_i 和 ω_j 之差分别为 $0. 0007^\circ$ 和 $0. 0037^\circ$ 。

上面的讨论表明, 本文所推导的《纪元历》行星盈缩历起点公式无误, 曲安京推导的外行星盈缩历起点进动公式无误, 内行星盈缩历起点公式需要修正, 陈美东所推《纪元历》外行星和内行星盈缩历起点进动公式均需修正。需要指出, 与《大衍历》等直接给出行星变差的历法不同, 按照《纪元历》算法, 其行星盈缩历起点并非每年均匀进动, 此外, 行星盈缩历起点黄经计算涉及的数据非常庞大, 计算机在处理时会出现浮点误差, 因此, 即使我们推导的行星盈缩历起点平均每年进动公式无误, ω_i 和 ω_j 之间的细微差别也不可避免。

3.1.3 《纪元历》行星盈缩历起点的进动规律

陈美东指出, 对于《钦天历》和《纪元历》等未采用行星变差的历法, 其行星近日点每年进动数值并不均匀, 而且变化规律比较复杂。陈美东对《纪元历》中行星近日点进动的规律进行了揭示 ([2], 414-415 页), 尚未见到其他学者做相关研究。陈美东的研究, 对我们进一步考察那些未采用行星变差的历法中行星盈缩历起点进动规律提供了非常有益的借鉴。不过, 由于他推导的行星盈缩历起点进动公式需要修正, 因此他对行星盈缩历起点黄经逐年变化规律的描述并不是特别准确。

现在我们重新考察《纪元历》行星盈缩历起点黄经每年变化规律。我们根据《纪元历》平合中星和平合入历算法, 计算出《纪元历》自上元至崇宁五年每年五星盈缩历起点黄经, 通过分析这些数据, 并结合行星盈缩历起点平均每年进动公式, 可以总结出《纪元历》五星盈缩历起点黄经进动数值的变化规律如下。

木星以 $H \times S_i / ((H - T) \times S)$ 年为周期, 在每个周期内, 木星盈缩历起点有一年变动 $(S_i - T) / A$ 度 ($4. 9743''$), 其他各年不进不退, 平均每年进动 $0. 4196''$ 。土星以 $H \times S_i / ((H - T) \times S)$ 年为周期, 在每个周期内, 盈缩历起点有一年变动 $(S_i - T) / A$ 度 ($3553. 0029''$), 其他各年不进不退, 平均每年进动 $120. 4107''$ 。火星以 $H \times S_i / ((H - T - S_i) \times S)$ 年为周期, 在每个周期内, 每相邻两年, 盈缩历起点遵循一年进动 $(S_i - T) / A$ 度 ($10. 3185''$), 而另一年不进不退的进动规律, 若某一个会合周期内包括两个完整的回归

年,则这两年均按每年 $(S_i - T)/A$ 度进动,平均每年进动 $5.4864''$ 。金星以 $S_i/(S_i - T)$ 年 (37951.7697) 为周期,在每个周期内,盈缩历起点每年变动 $(S_i - T)/A$ 度 ($34.1482''$),最后一年进动值为 $(S - T)/A$ 度 ($48.2886''$),平均每年进动 $34.1486''$ 。水星 $S_i/(S_i - T)$ 年 (15760.8461) 为周期,在每个周期内,盈缩历起点每年变动 $(S_i - T)/A$ 度 ($82''.2312$),最后一年进动值为 $(S - T)/A$ 度 ($48.2886''$),平均每年进动 $82.2291''$ 。

关于行星盈缩历起点黄经进动的周期,可以通过本文推导的盈缩历起点黄经进动公式(14)和(15),并结合行星盈缩历起点黄经进动规律进行验证。以木星为例,设盈缩历起点黄经进动周期为 X ,则 X 可以根据下式求出:

$$\frac{(S_i - T)/A}{X} = \frac{(H - T)(S_i - T)}{HS_i} \times \frac{S}{A} \quad (22)$$

解得 $X = H \times S_i / ((H - T) \times S)$ 。类似地,内行星盈缩历起点进动周期 X 可以根据下式求出:

$$\frac{(S - T) + (X - 1)(S_i - T)}{X} = (S_i - T) \times \frac{S}{S_i} \quad (23)$$

解得 $X = S_i / (S_i - T)$ 。

上面的讨论表明,由于《纪元历》和《钦天历》等历法中的行星平合入历度和平合中星分别涉及对历率和回归年的取模运算,而历率和回归年的长度并不相等,从而使得这些历法中行星盈缩历起点的进动变得比较复杂。从这个角度而言,无论是对行星盈缩历起点进动这个天文现象的认识,还是对行星盈缩历起点进动的刻画,《大衍历》等直接采用行星变差的历法都要明显优于《纪元历》等未采用行星变差的历法。

此外,从《纪元历》内行星盈缩历起点黄经进动数值的变化规律可以看到,金星和水星盈缩历起点黄经进动的周期分别约为 37952 年和 15761 年,在这么长的周期内,内行星盈缩历起点只有一年进动 $(S - T)/A$ 度,而其他各年均进动 $(S_i - T)/A$ 度。很显然,如果对内行星盈缩历起点黄经变化不做长时段的考察,就很难发现内行星盈缩历起点还存在反常进动的现象,这可能是导致此前学者认为内行星盈缩历起点黄经平均每年进动 $(S_i - T)/A$ 度的一个原因。

3.2 《乾道历》行星盈缩历起点进动公式

南宋历法只载天文常数和算表而不载术文,在涉及具体算法时,《宋史·律历志》仅列出各算法名称,并注明“法同前历,此不载”。通常认为,这些历法的术文基本沿袭《崇天历》和《纪元历》。由于《崇天历》沿袭《大衍历》算法采用行星变差,而《纪元历》沿袭《钦天历》算法采用“历率”和“周差”,因此只需分析南宋诸历中的天文常数,即可判断其平合入历算法究竟是沿袭《崇天历》还是《纪元历》。《乾道历》也仅载天文常数和算表而不载术文,根据《乾道历》步五星术中的“历率”和“周差”常数,可以初步判断《乾道历》中的平合入历算法继承了《纪元历》算法。

3.2.1 《乾道历》中的五星平合入历算法和平合中星算法

《乾道历》行星理论中所给常数并不完整,其中土星缺周差数据,内行星不设周差,金星缺历率数据。陈美东([2],415 页)和曲安京([4],573 页)等学者的研究指出,《乾道历》中的“周差”,与《钦天历》中“变率”和《纪元历》中“周差”常数的含义并不相同,对于木星和土星,周差为 $(H - S)$,对于火星,周差为 $(H - S - S_i)$ 。

根据《乾道历》行星理论中的常数,其五星平合入历度算法应该与《纪元历》类似,即《乾道历》中木星和土星的平合入历度 λ_0 由下式求出:

$$\frac{M \times (H - S)}{A} \equiv \lambda_0 \left(\bmod \frac{S_i}{A} \right) \quad (24)$$

火星的平合入历度 λ_0 可由下式求出:

$$\frac{M \times (H - S - S_i)}{A} \equiv \lambda_0 \left(\bmod \frac{S_i}{A} \right) \quad (25)$$

其内行星平合入历度算法与《钦天历》和《纪元历》相同,即如式(7)所示。

总体来说,唐宋历法中的平合中星算法没有本质区别,因此《乾道历》和《纪元历》中的平合中星算法应该相同。由此,按照讨论《纪元历》行星盈缩历起点进动的思路,我们可以讨论《乾道历》行星盈缩历起点进动公式及进动规律。陈美东指出,《开禧历》和《成天历》也沿用《乾道历》算法。([2], 416 页)曲安京认为,由于《乾道历》之后的《会元历》《开禧历》和《成天历》等三部历法中的周差常数遗失,因此我们无法判断这三部历法究竟是沿袭《纪元历》算法还是《乾道历》算法。([4], 573 页)

3.2.2 《乾道历》行星盈缩历起点进动

采用推导《纪元历》行星盈缩历起点进动公式类似的方法,我们可以推导出《乾道历》行星盈缩历起点进动公式。参考图 2,根据《纪元历》算法,外行星在一个会合周期内相对于盈缩历起点运行的距离为 $W_2C = (H - T)/A$ 度,而根据《乾道历》算法,外行星在一个会合周期内相对于恒星 W_1 运行的距离为 $W_1C = (H - S)/A$ 度,根据《乾道历》中行星历率 S_i 的定义方式,设行星一个近点周期长度为 G/A 日,行星在一个近点周期内运行 S_i/A 度,则在一个近点周期内,外行星盈缩历起点退行 $W_1B = (S - S_i)/A$ 度^①,按照比例算法,盈缩历起点每年退行 $(S - S_i)/A \times T/G$ 度,由此得到《乾道历》外行星盈缩历起点每年进动数值为:

$$q = \frac{(S - T)}{A} - \frac{(S - S_i)}{A} \times \frac{T}{G} \text{ (度)} \quad (26)$$

由于外行星在一个会合周期相对恒星 W_1 移动 $\frac{(H - S)}{A}$ 度,因此其速度为 $\frac{(H - S)}{H}$ 度/

日,于是有 $\frac{H - S}{H} \times \frac{G}{A} = \frac{S_i}{A}$,由此得到 $G = \frac{HS_i}{H - S}$,代入式(26),得到《乾道历》外行星盈缩历起点每年进动数值为:

$$q = \frac{(S - T)}{A} - \frac{(S - S_i) \times (H - S) \times T}{HS_i A} \text{ (度)} \quad (27)$$

由于《乾道历》内行星入历算法与《纪元历》相同,因此,其内行星盈缩历起点进动算法与《纪元历》完全相同,如式(15)所示。

陈美东和曲安京均对《乾道历》中的行星盈缩历起点进动进行了深入研究。根据陈

① 由于《乾道历》中的土星历率大于周天分,故土星在一个近点周期内,相对于恒星 W_1 表现为进动,而不是退动,其进动值为 $(S_i - S)$ 度。

美东研究([2], 416 页),《乾道历》木星和土星近日点黄经平均每年进动值为:

$$q = [(S - T) - \frac{(S - S_t) \times T \times (H - S)}{HS_t}] / A \text{ (度)} \quad (28)$$

火星近日点黄经平均每年进动值为:

$$q = [(S - T) - (\frac{1}{2} + \frac{(H - S - S_t)T}{2HS_t}) \times (S - S_t)] / A \text{ (度)} \quad (29)$$

根据曲安京研究([4], 573 页),《乾道历》外行星近日点黄经平均每年进动值为:

$$q = [(S - T) - \frac{(S - S_t)T}{G}] / A = \frac{[S_t(H - T) - T(H - S)]S}{HS_t} / A \text{ (度)} \quad (30)$$

从形式上看,式(28), (29)和(30)的表达式略有不同,但实际上,式(28)和(30)是完全等价的,对二式进行变形,可以得到

$$q = [(S - T) - \frac{(S - S_t)}{HS_t} \times (H - S) \times T] / A \text{ (度)} \quad (31)$$

进一步对式(29)变形,得到

$$q = [(S - T) - \frac{(S - S_t)}{HS_t} \times \frac{(H - T)S_t + (H - S)T}{2}] / A \text{ (度)} \quad (32)$$

比较式(31)与(32),由于 $(H - T)S_t \approx (H - S)T$,所以 $(H - S)T \approx [(H - T)S_t + (H - S)T] / 2$,因此式(31)和式(32)之间的差别极其细微。

关于《乾道历》内行星近日点进动算法,陈美东认为其与《纪元历》内行星近日点进动算法相同,即如式(18)所示。([2], 415 页)曲安京则认为对于未采用行星变差的历法,均按式(20)计算其近日点黄经的进动。([4], 575-576 页)

比较式(27)、(28)和式(30)可以发现,本文所推导《乾道历》外行星盈缩历起点进动结果与曲安京推导结果完全相同,陈美东推导的木星和土星盈缩历起点进动公式与本文推导结果相同,火星盈缩历起点进动公式则与本文推导结果不同。需要指出,陈美东直接给出了外行星盈缩历起点平均每年进动公式,具体推导过程不详,曲安京则比较详细给出了推导过程,本文借助图 2 给出了推导过程,其推导思路基本与曲安京推导思路相同。由于《乾道历》内行星入历算法与《纪元历》相同,因此,其内行星盈缩历起点进动算法与《纪元历》完全相同,如本文推导的结果式(15)所示;而陈美东和曲安京推导的《乾道历》内行星盈缩历起点平均每年进动数值分别如式(18)和(20)所示。

类似地,我们按照陈美东、曲安京和本文的推导结果,分别计算出《乾道历》行星盈缩历起点平均每年进动数值,然后利用相应计算结果和直接采用行星变差的历法中使用的行星平合入历算法,求出乾道三年(1167)天正冬至时的行星盈缩历起点黄经,并与直接按照《乾道历》算法求出的行星盈缩历起点黄经进行比较。结果表明,本文推导的《乾道历》行星盈缩历起点进动公式无误,陈美东推导的火星盈缩历起点进动公式需要修正,陈美东和曲安京推导的《乾道历》内行星盈缩历起点进动公式均需修正。限于篇幅,此处不再列出具体的计算结果。

3.2.3 《乾道历》行星盈缩历起点进动规律

与讨论《纪元历》行星盈缩历起点进动的方法类似,我们计算出《乾道历》上元至乾道

三年每年的行星盈缩历起点黄经,通过比较这些数据,可以发现《乾道历》行星盈缩历起点进动值的变化规律如下。

木星以 $H \times S_i / ((H - S) \times T)$ 年为周期,每个周期内,木星盈缩历起点只有一年变动 $(S_i - T)/A$ 度 $(-6.9675'')$,其余各年均进动 $(S - T)/A$ 度 $(48.3795'')$,木星盈缩历平均每年进动 $43.7133''$ 。土星以 $H \times S_i / ((H - S) \times T)$ 年为周期,在每个周期内,盈缩历起点有一年变动 $(S_i - T)/A$ 度 $(3553.3576'')$,其余各年均进动 $(S - T)/A$ 度 $(48.3795'')$,土星盈缩历起点平均每年进动 $167.0305''$ 。火星以 $H \times S_i / ((H - S - S_i) \times T)$ 年为周期,在每个周期内,每相邻两年,盈缩历起点遵循一年进动 $(S_i - T)/A$ 度 $(11.1425'')$,而另一年进动 $(S - T)/A$ 度 $(48.3795'')$ 。若某一个会合周期内包括两个完整的回归年,则这两年均按每年 $(S_i - T)/A$ 度 $(11.1425'')$ 进动。火星盈缩历起点平均每年进动 $28.5815''$ 。《乾道历》缺金星历率,无法计算盈缩历起点进动值。水星以 $S_i / (S_i - T)$ 年 (15813.3239) 为周期,在每个周期内,盈缩历起点每年变动 $(S_i - T)/A$ 度 $(81.9583'')$,最后一年水星盈缩历起点进动值为 $(S - T)/A$ 度 $(48.3795'')$,水星盈缩历起点平均每年进动 $81.9562''$ 。

陈美东对《乾道历》行星盈缩历起点进动规律进行过比较详细的讨论([2], 415-416 页)。他对《乾道历》外行星盈缩历起点变化的周期和内行星盈缩历起点进动规律的理解是正确的,但是对外行星盈缩历起点进动规律和内行星盈缩历变化的周期的理解还需要进行细微的修正。

3.3 《知微历》类历法中的行星盈缩历起点进动

《知微历》对《钦天历》和《纪元历》五星平合入历度算法进行了改进,不再设“周差”或“变率”常数。此外,《钦天历》、《纪元历》和《乾道历》等历法对外行星和内行星分别设计了不同的平合入历度算法,而《知微历》则将外行星和内行星的平合入历度算法统一为一个算法,从而使算法更加简洁。《知微历》算法被《庚午元历》、《授时历》和《大统历》等历法沿袭。

3.3.1 《知微历》等历法中的平合入历算法与平合中星算法

《知微历》“求五星平合及诸段入历算法”称:

求五星平合及诸段入历:置前通积分,各加其星后合分,以历率去之,不尽,各以其星历度法除为度,不满退为分秒,即为其星平合入历度及分秒。以诸段限度累加之,即得诸段入历。^[10]

术文中,“通积分”意为上元至所求年天正冬至的累积日分,其含义与《纪元历》中“气积分”相同,“后合分”即《纪元历》中的“平合中积”,其数值等于“平合中星”。若令行星后合分为 γ_0 ,“历率”为 L ,“历度法”为 F ,则根据术文,行星平合入历度 λ_0 可由下式求出:

$$\frac{N_n T + \gamma_0}{F} \equiv \lambda_0 \pmod{\frac{L}{F}} \quad (33)$$

若上元至所求年天正冬至后行星首合包含 M 个会合周期,显然有 $N_n T + \gamma_0 = M \times H$,于是,上式可变为:

$$\frac{M \times H}{F} \equiv \lambda_0 \pmod{\frac{L}{F}} \quad (34)$$

由《知微历》五星平合入历度算法可以看出,《知微历》将外行星和内行星入历度算法统一

为一个算法,计算更加方便。特别需要指出,《知微历》与《钦天历》和《纪元历》等历法中五星平合入历算法的最大区别是,《知微历》中的历率 L 与《纪元历》等历法中的历率 S_i 的含义完全不同。阐明《知微历》中历率的含义,对我们理解《知微历》中五星平合入历算法的天文意义非常关键。在《知微历》中,与历率密切相关的另外一个天文常数是历度法,《知微历》所取五星历率和历度法常数如表 5 所示。表 5 中的历率、历度法和历度均为《金史·历志下》所载《知微历》所给常数([10],3262-3276 页),最后一列“历率/日法”为笔者所加,采用去尾法取小数点后四位有效数字。历率和历度法之比意为行星在一个近点周期内运行的度距,五星的历度法各不相同。

表 5 《知微历》中五星历率与历度法

五星	历率	历度法	历度	历率/日法
木星	22650507	62014	365.2482	4330.8808
火星	3592758.32	9836.5	365.2476	686.9518
土星	56223219	153928	365.2566	10750.1374
金星	1910241.11	5230	365.2468	365.2468
水星	1910242.35	5230	365.2471	365.2471

表 5 中,历率,历度法和历度三者之间的关系为“历度 = 历率/历度法”,根据验算结果,《知微历》未使用四舍五入法则,而是采用去尾法得到小数点后四位小数。考察表 5 中最后一列数据可以看出,《知微历》中的历率相当于行星近点周期的日分,“历率/日法”即为行星以日为单位的近点周期,历度则为行星在一个近点周期内运行的度数。由于中国古代历法家认为金、水二星“日行一度”,故金、水二星的历度法均等于日法。可以看出,《知微历》中的历率与《钦天历》和《纪元历》等历法中的历率含义并不相同,《知微历》中的历率相当于行星近点周期的长度,而历度则相当于行星在一个近点周期内运行的度数,而《钦天历》和《纪元历》等历法中行星的历率本身不具备时间度量的功能,历率与日法的比值为行星在一个近点周期内运行的度距。若令历度为 D ,则在《知微历》中, $D = L/F$,而在《纪元历》等历法中, $D = S_i/A$,由此得到 L 和 S_i 的关系为 $S_i = LA/F$ 。

《庚午元历》求五星平合及诸段入历算法与《知微历》完全相同,五星的历率与历度法数据基本与《知微历》相同,个别数据略有差别。由于《授时历》废除上元积年,其五星平合入历算法与《知微历》等历法稍有不同。《授时历》“推五星平合及诸段入历”算法称:

推五星平合及诸段入历:各置中积,加历应及所求后合分,满历率,去之;不尽,如度率而一为度,不满,退除为分秒,即其星平合入历度及分秒;以诸段限度累加之,即诸段入历。上考者,中积内减历应,满历率去之,不尽,反减历率,余加其年后合,余同上。([10],3435 页)

《授时历》废除上元积年,以至元十八年(1281)辛巳岁天正冬至为历元。历元时刻五星并不位于盈缩历起点,为计算方便,《授时历》测得历元时刻冬至点距离冬至之前最近的行星盈缩历起点的度分,称为历应。例如,《授时历》测得木星历应为 18999481,除以木星度率 118582,得到:

$$\frac{\text{木星历应}}{\text{木星度率}} = \frac{18999481}{118582} \approx 160.2223 (\text{度})$$

即至元十八年辛巳岁天正冬至时刻,木星盈缩历起点在冬至点之前 160.2223 度。《授时历》中的度率与《知微历》中历度法的含义相同。若设历应为 Δl , 后合分为 γ_0 , 则《授时历》五星平合入历度 λ_0 可由下式求出:

$$\frac{TN_n + \gamma_0 + \Delta l}{F} \equiv \lambda_0 \pmod{\frac{L}{F}} \quad (35)$$

上面的讨论表明,《授时历》中的五星平合入历度算法,其基本思想与《知微历》和《庚午元历》相同,二者的主要区别体现在《授时历》由于废除上元积年而引入了历应,此外再无本质区别。《大统历》沿袭《授时历》废除上元积年做法,以洪武十七年甲子岁(1384)天正冬至为历元,距《授时历》历元 103 年,因此《大统历》中所给五星历应数值与《授时历》不同,五星平合入历度算法则与《授时历》完全相同,此处不再赘述。

《知微历》等四部历法中的平合中星算法与以前历法基本没有区别,此处不再赘述。

3.3.2 《知微历》等历法中的行星盈缩历起点进动

为了更好地理解《知微历》中的行星盈缩历起点进动,我们根据《知微历》平合入历算法,重新构建行星盈缩历起点的进动公式。我们首先推导《知微历》外行星盈缩历起点黄经平均每年进动公式。参考图 2,根据外行星会合运动规律,外行星在一个会合周期内相对于位于 W_1 点的恒星运行 $W_1C = (H - S)/A$ 度,其中 S 表示《知微历》所取周天分,但是根据式(32),外行星在一个会合周期内相对于盈缩历起点运行 H/F 度,这相当于在一个会合周期内,外行星盈缩历起点退行距离为 $H/F - (H - S)/A$ 度,利用比例算法,可以求出外行星盈缩历起点每年退行的距离为:

$$q_1 = \left(\frac{H}{F} - \frac{H - S}{A} \right) \times \frac{T}{H} \text{ (度)} \quad (36)$$

除此之外,根据《知微历》中历率 L 的定义方式,行星在一个近点周期内运行 L/F 度,设行星一个近点周期长度为 L/A 日,则外行星盈缩历起点每年还要退行:

$$q_2 = \left(\frac{S}{A} - \frac{L}{F} \right) \times \frac{T}{L} \text{ (度)} \quad (37)$$

综合式(36)和(37),可以得到《知微历》外行星盈缩历起点平均每年相对于冬至点进动的数值为:

$$q = \frac{S - T}{A} - q_1 - q_2 = \frac{S - T}{A} - \left(\frac{H}{F} - \frac{H - S}{A} \right) \times \frac{T}{H} - \left(\frac{S}{A} - \frac{L}{F} \right) \times \frac{T}{L} \text{ (度)} \quad (38)$$

对式(38)进行化简,得到:

$$q = \left(\frac{H - T}{H} - \frac{T}{L} \right) \times \frac{S}{A} \text{ (度)} \quad (39)$$

《知微历》内行星盈缩历起点进动与《纪元历》和《乾道历》相同,即如式(15)所示,其中 $S_i = LA/F$ 。

关于《知微历》行星盈缩历起点进动,仅有陈美东和曲安京等学者进行过研究。根据陈美东研究([2], 416-419 页),《知微历》木星和土星近日点黄经每年平均进动值为:

$$q = \frac{(H - T)T(S_i - T) - [H \times S_i - (H - T)T][S_i - (H - T)]}{H \times S_i \times A} \text{ (度)} \quad (40)$$

火星近日点黄经每年平均进动值为:

$$q = \frac{[H \times S_t + (H - T)T](S_t - T) - [H \times S_t - (H - T)T][S_t - (H - T)]}{2H \times S_t \times A} \text{ (度)} \quad (41)$$

式(40)和(41)中, $S_t = LA/F$, 其含义与《纪元历》等历法中的历率 S_t 的含义相同。

根据曲安京研究([4], 574-575 页), 《知微历》外行星近日点黄经进动值的表达式与《钦天历》相同, 其结果为:

$$q = \frac{(S_t - T) \times 360^\circ}{G} = [1 - (\frac{T}{H} + \frac{T}{L})] \times 360^\circ \quad (42)$$

上式中, $S_t = G(H - T)/H$ 。此外, 《知微历》中历率除以日法还可表示盈缩周期的长度, 即有 $G = L/A$ (日)。

从形式上看, 式(40)和(41)要比式(42)复杂许多, 为方便比较, 可以将式(40)和(41)进行化简, 分别得到如下二式:

$$q = \frac{(H - T)(S_t - T)}{HS_t} \times \frac{T}{A} - \frac{[HS_t - (H - T)T][\frac{HS_t}{L} - (H - T)]}{HS_t A} \quad (43)$$

$$q = \frac{(H - T)(S_t - T)}{2HS_t} \times \frac{T}{A} + \frac{(S_t - T)}{2A} - \frac{[HS_t - (H - T)T][\frac{HS_t}{L} - (H - T)]}{2HS_t A} \quad (44)$$

比较式(39)与式(42)至(44), 由于 360° 与 S/A 均表示一周天的度数, 可以看出, 本文推导结果与曲安京推导结果完全等价, 与陈美东推导结果不同。

陈美东([2], 418 页)指出, 《知微历》内行星近日点进动公式如式(20)。按理来说, 根据他的研究, 《知微历》和《纪元历》中内行星近日点进动公式应如式(18)所示, 也许正如他在研究《纪元历》内行星近日点进动时指出的那样, 式(18)中的第二项很小, 几乎可以忽略, 因此他直接用式(20)表示《知微历》内行星近日点进动公式。曲安京([4], 575-576 页)认为未采用行星变差的历法均按式(20)计算其近日点黄经的进动。

我们按照陈美东、曲安京和本文推导的公式, 分别计算出《知微历》行星盈缩历起点黄经平均每年进动值, 然后利用直接采用行星变差的历法中的平合入历算法以及《知微历》平合中星算法求出金大定庚子年(1180)天正冬至行星盈缩历起点黄经, 并与直接按照《知微历》算法求出的行星盈缩历起点黄经进行比较。结果表明, 本文所推《知微历》五星盈缩历起点黄经进动公式无误, 曲安京所推《知微历》外行星盈缩历起点进动公式无误, 内行星盈缩历起点进动公式需要修正, 陈美东推导的《知微历》五星盈缩历起点进动公式均需修正。

3.3.3 《知微历》中行星盈缩历起点进动规律

与讨论《纪元历》等历法五星盈缩历起点进动的方法类似, 我们计算出《知微历》上元至大定庚子(1180)每年的五星盈缩历起点黄经, 通过比较这些数据, 并结合本文推导的盈缩历起点进动公式, 可以总结出《知微历》五星盈缩历起点进动值的变化规律如下。

木星盈缩历起点进动以 $(H - S_t - HS_t/L)/[(H - T) - HS_t/L - (1 - T/H - T/L) \times$

$S]$ 年为周期,期间有一年进动 $(S_i - T)/A$ 度(16.6339"),其他各年均进动 $[(H - T) - HS_i/L]/A$ 度(-12.1777"),平均每年进动-9.7484"。

土星盈缩历起点进动以 $(H - S_i - HS_i/L)/[(H - T) - [HS_i/L - (1 - T/H - T/L) \times S]$ 年为周期,期间有一年进动 $(S_i - T)/A$ 度(46.1702"),其他各年均进动 $[(H - T) - HS_i/L]/A$ 度(1.4020"),平均每年进动 2.9231"。

火星盈缩历起点进动以 $(H - S_i - HS_i/L)/[(H - T) - HS_i/L - (1 - T/H - T/L) \times S]$ 年为周期,期间每相邻两年中有一年变动 $(S_i - T)/A$ 度(14.3209"),另一年进动 $[(H - T) - HS_i/L]/A$ 度(12.9981"),每个周期内有连续两年进动 $(S_i - T)/A$ 度(14.3209"),其他各年都是相间进动,平均每年进动 13.7018"。

金星以 $S_i/(S_i - T)$ 年(111644.7171)为周期,其盈缩历起点每年进动值为 $(S_i - T)/A$ 度(11.6079"),最后一年进动值为 $(S - T)/A$ 度(46.8476"),平均每年进动 11.6083"。

水星以 $S_i/(S_i - T)$ 年(104100.4005)为周期,在每个周期内,盈缩历起点每年进动值为 $(S_i - T)/A$ 度(12.4492"),最后一年进动 $(S - T)/A$ 度(46.8476"),平均每年进动 12.4495"。

从形式上看,《知微历》外行星盈缩历起点进动周期要比《纪元历》和《乾道历》外行星盈缩历起点进动周期复杂,不过,通过比较可以发现,《知微历》外行星盈缩历起点进动周期与《纪元历》周期 $H \times S_i/((H - T) \times S)$ 和《乾道历》周期 $H \times S_i/((H - S) \times T)$ 的差别均比较细微。陈美东([2],416-419 页)也曾对《知微历》行星近日点进动的变化规律进行过非常细致的研究,但是他推导的五星近日点进动的周期变化规律与本文的得出的结果不同。

3.4 未采用行星变差的历法中行星盈缩历起点进动值

与《大衍历》等直接给出行星变差的历法不同,《钦天历》等历法并未直接给出行星变差。不过,根据前面推导出的《钦天历》等历法中行星盈缩历起点黄经平均每年进动公式,可以求出各部历法中行星盈缩历起点平均每年进动数值,结果如表 6 所示。作为对比,表 6 中第二列列出了各部历法中的岁差常数。

表 6 《钦天历》等历法中的五星盈缩历起点进动值

历法	岁差	木星	火星	土星	金星	水星
钦天历	41". 59	0". 06	-0". 10	-0". 01	-4". 85	0". 02
纪元历	48". 29	0". 42	5". 49	120". 41	34". 15	82". 23
乾道历	48". 38	44". 71	28". 58	167". 03	/	81". 96
淳熙历	48". 29	0". 38	5". 32	120". 43	/	79". 96
知微历	46". 85	-9". 75	13". 70	2". 92	11". 61	12". 45
庚午元历	46". 80	-9". 76	13". 56	2". 46	11". 37	12". 30
授时历	53". 22	4". 54	21". 79	1". 76	53". 22	53". 22
大统历	53". 22	4". 54	21". 79	1". 76	53". 22	53". 22

《乾道历》和《淳熙历》缺金星历率数据,其盈缩历起点进动数值无法计算,表 6 中用“/”进行标识。从表 6 中的数据可以看出,《钦天历》等八部历法中五星盈缩历起点进动值的大体情况,对于木星,《乾道历》盈缩历起点进动值超过 $44''$,其他各历取值都在 $10''$ 以下;对于火星,各历盈缩历起点进动值没有规律,最大接近 $30''$,最小接近 0 ;对于土星,《纪元历》、《乾道历》和《淳熙历》取值偏大,均超过 $120''$,其他各历取值均在 $3''$ 以下;对于金星和水星,各历的取值同样没有规律,《钦天历》取值偏小,《授时历》和《大统历》取值约为 $53''$ 左右,《知微历》和《庚午元历》取值约为 $12''$ 左右,而《纪元历》、《乾道历》和《淳熙历》等三部历法取值约为 $80'' - 82''$ 。很明显,与《大衍历》等历法中行星变差的数值相比,《钦天历》等未直接给出行星变差的历法中,行星盈缩历起点进动值的分布完全没有规律可循。

4 行星盈缩历起点及其进动的天文含义

本文第 2 节和第 3 节详细讨论了一些代表性历法中盈缩历起点平均每年进动公式及进动规律,但是关于行星盈缩历起点和行星变差或盈缩历起点进动的天文含义,我们并未展开讨论。关于这个问题,此前已有学者进行过比较细致的讨论。陈美东认为,行星盈缩历起点就是行星近日点,行星变差或盈缩历起点进动就是行星近日点进动。([1], 131—143 页)曲安京指出,行星盈缩差是行星中心差和太阳中心差的叠加函数,因此行星盈缩历起点不能等同于行星近日点,但是由于中国古代历法家总是假设太阳近地点的黄经为 270° ,在这个前提下,行星盈缩历起点黄经的进动可以视为行星近日点黄经的进动。([4], 570 页)在本节中,我们将重新考察这两个问题。

我们首先计算出《大衍历》以后各部历法中行星盈缩历起点的黄经。根据《大衍历》类历法中行星变差的天文意义,若取历法推算的冬至点黄经为 270° ,则行星盈缩历起点黄经可由下式求出:

$$\omega = 270^\circ + \frac{r}{A} \times \frac{360^\circ}{(S/A)} \quad (45)$$

上式中的 r 根据式(1)求出。以《大衍历》木星为例,上元距开元十二年(724)所积年数为 $N_n = 96961740$,变差 $q = 34.14$,乾实 $S = 1110379.75$,代入式(45)求出开元十二年天正冬至木星盈缩历起点黄经为 $\omega = 345.14^\circ$ 。与《大衍历》类历法不同,计算《钦天历》类历法中行星盈缩历起点黄经需要利用式(8)和(9)。我们分别计算出直接采用行星变差的《大衍历》类历法和未直接采用行星变差的《钦天历》类历法行用当年五星盈缩历起点黄经,分别如表 7 和表 8 中的历取值所示。作为对比,我们同时根据《中国天文年历》^[11]中行星近日点黄经公式计算了相应年份五星近日点黄经的理论结果, Δ 指历取值与理论值之差,表中数据单位均为“°”。

表 7 《大衍历》类历法中的五星盈缩历起点黄经及其误差

历法	水星			火星			土星			金星			水星		
	历取	理论	Δ	历取	理论	Δ	历取	理论	Δ	历取	理论	Δ	历取	理论	Δ
大衍历	345.14	353.92	-8.78	300.20	312.59	-12.39	69.90	67.86	2.04	260.11	113.50	146.61	286.56	57.64	-131.08
五纪历	344.83	354.52	-9.69	257.65	313.29	-55.64	69.96	68.62	1.34	63.25	114.04	-50.79	287.64	58.23	-130.59
宣明历	1.46	355.48	5.98	299.56	314.39	-14.83	78.23	69.81	8.42	88.16	114.90	-26.74	123.37	59.16	64.21
崇玄历	345.56	356.59	-11.03	314.12	315.68	-1.56	66.05	71.20	-5.15	292.71	115.90	176.81	303.07	60.25	-117.18
应天历	225.56	357.70	-132.14	315.09	316.96	-1.87	68.40	72.58	-4.18	259.42	116.89	142.53	304.19	61.33	-117.14
乾元历	348.05	358.01	-9.96	300.56	317.31	-16.75	69.46	72.96	-3.50	259.45	117.16	142.29	303.63	61.63	-118
仪天历	348.53	358.32	-9.79	308.67	317.68	-9.01	69.63	73.36	-3.73	78.43	117.45	-39.02	282.31	61.94	-139.63
崇天历	8.23	358.69	9.54	315.61	318.10	-2.49	65.50	73.81	-8.31	247.09	117.78	129.31	78.23	62.29	15.94
明天历	12.09	359.33	12.76	314.76	318.84	-4.08	79.55	74.60	4.95	/	118.34	/	/	62.91	/
观天历	238.91	359.77	-120.86	311.55	319.35	-7.80	34.35	75.16	-40.81	224.30	118.74	105.56	83.05	63.35	19.70
统元历	7.84	359.87	7.97	317.58	319.47	-1.89	68.77	75.28	-6.51	缺	118.83	/	80.45	63.44	17.01

表 8 《钦天历》类历法中的五星盈缩历起点黄经及其误差

历法	水星			火星			土星			金星			水星		
	历取	理论	Δ	历取	理论	Δ	历取	理论	Δ	历取	理论	Δ	历取	理论	Δ
钦天历	348.27	357.61	-9.34	313.44	316.85	-3.41	67.28	72.46	-5.18	261.70	116.81	144.89	308.08	61.24	-53.16
纪元历	4.67	360.00	4.67	317.30	319.61	-2.31	75.88	75.43	0.45	249.45	118.94	130.51	82.00	63.56	18.43
乾道历	328.15	0.97	-32.82	314.28	320.73	-6.75	74.20	76.64	-2.44	缺	119.81	/	83.26	64.51	18.75
淳熙历	355.87	1.11	-5.24	109.71	320.90	-211.19	78.87	76.82	2.05	缺	119.94	/	82.97	64.65	18.32
知微历	4.49	1.18	3.31	317.19	320.97	-3.78	244.56	76.90	167.66	249.84	119.99	129.85	83.65	64.71	18.94
庚午元历	4.13	1.82	2.31	317.53	321.71	-4.18	77.76	77.69	0.07	249.65	120.56	129.09	84.42	65.33	19.09
授时历	5.60	2.79	2.81	316.98	322.83	-5.85	78.28	78.89	-0.61	258.21	121.43	136.78	67.44	66.28	1.16
大统历	5.73	4.45	1.28	317.60	324.74	-7.14	78.34	80.95	-2.61	259.73	122.90	136.83	68.96	67.89	1.07

从表 7 中的数据可以大体看出《大衍历》等 11 部采用行星变差的历法中行星盈缩历起点与近日点黄经的差值大小。对于木星,大部分历法中的差值都在 10° 左右徘徊,只有《应天历》和《观天历》比较反常;对于火星,大部分历法中的差值都在 10° 以内,《大衍历》、《宣明历》和《乾元历》误差稍大一些,均在 $12^\circ - 17^\circ$ 之间,其中《五纪历》比较反常,超过 55° ;关于土星,大部分历法中的差值基本都在 10° 以下,其中《宣明历》和《观天历》偏大;关于金星,大多数历法中的差值均超过 100° ,只有《五纪历》、《宣明历》和《仪天历》中差值较小,也在 $20^\circ - 50^\circ$ 之间。关于水星,《崇天历》以前的大多数历法中的差值都在 $117^\circ - 140^\circ$,《宣明历》相对较小,也达到了 64.21° ,从《崇天历》开始,各历中的差值明显下降至 20° 以内。

从表 8 中的数据可以大体看出《钦天历》等 8 部历法中行星盈缩历起点与近日点黄经的差值大小。《淳熙历》与《乾道历》均缺土星周差和金星历率数据,我们根据这两部历法中周差的定义补充了周差数据,但是金星历率无法补充,故其盈缩历起点黄经用“缺”标识,其差值用“/”标识。关于木星,除了《乾道历》超过 30° 比较反常,《钦天历》接近 10° ,其他历法基本在 5° 以内;关于火星,《淳熙历》比较反常超过 200° ,其他历法都在 10° 以内;关于土星,除了《知微历》比较反常达到 167.66° ,其他历法基本在 5° 以内;关于金星,都在 $130^\circ - 140^\circ$ 左右徘徊;关于水星,《钦天历》比较反常达到 53.16° ,从《纪元历》到《庚午元历》各历差值均在 19° 左右,而从《授时历》开始,差值在 1° 左右。

由于中国古代历法采用的上元积年比较庞大,因此行星变差或历率的细微变化都会引起行星盈缩历起点黄经较为显著的变化,因此可以推测,对于外行星,那些行星盈缩历起点与近日点黄经差值比较反常的例子,很大可能是由相应的常数传抄错误而导致的,当然也不完全排除是历法家测量盈缩历起点黄经水平的真实反映。

这里需要说明一点,我们虽然在表 7 和表 8 中比较了各部历法中五星盈缩历起点黄经和近日点黄经的差值,但实际上,这样的比较是不合理的。其中的原因很简单,我们计算的五星盈缩历起点黄经为地心黄经,而根据行星近日点黄经公式计算得到的行星近日点黄经为日心黄经,二者并不具备可比性。事实上,对地球上的观测者而言,行星近日点的地心黄经是不确定的,根据我们的计算,内行星近日点的日心黄经和地心黄经最大可以相差 180° ,外行星近日点的日心黄经和地心黄经最大差值分别为木星 11.08° 、火星 41.02° 、土星 6.01° 。由于此前学者在讨论五星盈缩历起点黄经的误差时,是将其与行星近日点的日心黄经进行比较,从而得到内行星近日点黄经误差很大的结论。由于行星盈缩差是关于太阳中心差和行星中心差的叠加函数,因此,行星盈缩历起点并不能完全等同于行星近日点。但是根据曲安京([2], 587 页)和唐泉^[12]等学者的研究,外行星中心差是其盈缩差的主项,即使外行星盈缩差中包含太阳中心差的影响,这种影响也是非常小的。从这个角度来讲,将外行星盈缩历起点理解为近日点并没有很大问题,特别是对土星和木星而言更是如此,这一点从外行星盈缩历起点的黄经与其近日点黄经的差值也可以得到验证。但是对于内行星而言,由于其近日点的日心黄经和地心黄经本身就相差很大,因此并不好判断其盈缩历起点是否为其近日点。

与盈缩历起点黄经相关的另一个问题是其进动。由于行星盈缩历起点并不等同于行星近日点,因此行星盈缩历起点进动也并不等同于行星近日点进动。此外,根据行星近日

点黄经计算公式得到的行星近日点进动值也是其日心黄经的进动,数值分别为木星 $58.09''$ 、火星 $66.28''$ 、土星 $70.67''$ 、金星 $50.44''$ 、水星 $56.04''$,而本文所计算的行星盈缩历起点的进动是地心黄经的进动,二者并非同一个概念,因此也并不具备可比性。从各历中盈缩历起点黄经进动数值来看,《大衍历》类历法中的行星变差常数基本都在 $34''-35''$ 左右徘徊,取值相对比较稳定,只有个别历法中行星变差取值比较反常,但是《钦天历》类历法中的取值则比较混乱,很难看出变化的规律性。由此可见,中国古代历法家对盈缩历起点黄经的进动规律把握的并不准确。通过比较各历中的岁差和盈缩历起点进动值的大小,我们认为一行等人对行星盈缩历起点的进动已经有一定程度的认识,但是对行星盈缩历起点究竟是“进动”还是“退动”,认识显然还不够清楚。

5 结 论

行星盈缩历起点进动是中国古代历法步五星术中的重要概念之一。本文在前人研究工作的基础上,重新详细梳理了唐代《大衍历》以后各部历法中的行星变差和盈缩历起点黄经算法,特别是利用图示方式并结合数理方法,推导出《钦天历》等未直接给出行星变差的历法中行星盈缩历起点进动的数学公式和逐年变化规律。通过本文的讨论,我们对中国古代行星盈缩历起点黄经及其进动应该有一个比较全面的认识和理解,具体而言,可以概括为如下三个方面。

一是关于中国古代历法家对行星盈缩历起点进动的认识问题。很明显,由于行星盈缩历起点并非行星近日点,因此行星盈缩历起点进动并不等同于行星近日点进动。通过比较各部历法中行星盈缩历起点进动数值与岁差常数,可以说明中国古代历法家已经明确认识到行星盈缩历起点进动现象。《大衍历》类历法直接用行星“变差”来刻画行星盈缩历起点每年相对于冬至点进动的数值,而对于《钦天历》类历法,只能通过考察每年行星盈缩历起点黄经,归算出行星盈缩历起点进动数值,其进动数值并非每年都是均匀的。

二是关于中国古代历法家对行星盈缩历起点进动值的测算问题。对《大衍历》类历法而言,除了个别历法比较反常,其他历法中的行星变差通常在 $34''-35''$ 左右徘徊,而且五个行星的变差常数差别不大。但是对于《钦天历》等历法而言,行星盈缩历起点进动值并没有明显的规律可寻,而且各历数值差别较大。尽管如此,《大衍历》等历法推算的外行星盈缩历起点黄经的误差并不明显,这很有可能说明一个事实,即从唐代《大衍历》开始,历法家已经具备了通过实测确定行星盈缩历起点的能力,而历法中的行星变差应该是历法家确定行星盈缩历起点之后,配合上元积年而调整出来的数值。

三是关于中国古代历法家所取行星盈缩历起点黄经及其误差的问题。很明显,由于行星盈缩历起点并不等同于行星近日点,行星盈缩历起点黄经也并非行星近日点黄经,因此通过比较行星盈缩历起点黄经与行星近日点黄经的差值去讨论中国古代历法家测量行星盈缩历起点黄经的水平,是不合理的。通过考察《大衍历》以后各部历法中行星盈缩历起点黄经和行星近日点黄经的差值,再结合行星近日点日心黄经和地心黄经的关系,我们认为,将外行星盈缩历起点视为其近日点是可以接受的,但是由于内行星近日点的日心黄经和地心黄经相差太大,因此我们并不能确定内行星盈缩历起点就是其近日点。

致 谢 本文在修改过程中,两位匿名审稿人和本刊主编邹大海研究员提出了宝贵的修改建议,在此表示诚挚的感谢!

参 考 文 献

- [1] 陈美东. 我国古代对五星近日点黄经及其进动值的测算[J]. 自然科学史研究, 1985, 4(2): 131-143.
- [2] 陈美东. 古历新探[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1995: 406-432.
- [3] 陈美东. 中国古代五星运动不均匀性改正的早期方法[J]. 自然科学史研究, 1990, 9(3): 208-218.
- [4] 曲安京. 中国数理天文学[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 570-583.
- [5] 刘金沂. 麟德历行星运动计算法[J]. 自然科学史研究, 1985, 4(2): 144-158.
- [6] 中华书局编辑部. 历代天文律历等志汇编(七)[M]. 北京: 中华书局, 1976: 2253-2255.
- [7] 唐泉. 中国唐宋时期五星盈缩差算法的演变轨迹—从爻象历到盈缩历[J]. 科学技术哲学研究, 2016, 33(2): 76-83.
- [8] 中华书局编辑部. 历代天文律历等志汇编(八)[M]. 北京: 中华书局, 1976: 2682.
- [9] 王应伟. 中国古历通解[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1998: 560.
- [10] 中华书局编辑部. 历代天文律历等志汇编(九)[M]. 北京: 中华书局, 1976: 3279.
- [11] 中国科学院紫金山天文台. 2018 年中国天文年历[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 569-570.
- [12] 唐泉. 再论中国古代的五星盈缩差算法[J]. 自然科学史研究, 2011, 30(4): 393-408.

A Study on the Calculation of the Longitude of the Starting Point of Planetary *Yingsuo Li* and its Precession Value in Ancient China

TANG Quan

(The Institute for Advanced Studies in History of Science, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract The Tang dynasty astronomer Yixing (一行) was the first to use planetary *biancha* (变差, change difference) to describe the precession of the starting point of planetary *yingsuo li* (盈缩历 the table of planetary expansion-contraction difference) relative to the winter solstice point every year in the *Great Expansion System* (*Dayan li* 大衍历). From then on, some systems followed the practice of the *Great Expansion System* and directly gave the value of the planetary *biancha*. For those systems that did not directly give this value, it can be calculated according to related algorithms in the systems. In this paper, we comprehensively examine the values of planetary *biancha* in the *Great Expansion System* and similar systems. For those systems that did not directly give the value of planetary *biancha*, we reconstruct the formula of the precession of the planetary starting point of planetary *yingsuo li* and summarize its rules. The discussion in this paper shows that the starting point of planetary *yingsuo li* is not planetary perihelion. However, since the error of the longitude of the starting point of planetary *yingsuo li* and the longitude of planetary perihelion is relatively small, thus for the outer planets, the starting point of planetary *yingsuo li* can be viewed as planetary perihelion. Accordingly, planetary *biancha* and the precession of the starting point of planetary *yingsuo li* is not the precession of planetary perihelion. Since there is no obvious rule to follow in the planetary *biancha*

and the precession of starting point of planetary *yingsuo li*, it is speculated that the ancient Chinese astronomers may have mastered the ability to measure the planetary perihelion, and planetary *biancha* and the precession value of the starting point of planetary *yingsuo li* should be a value adjusted by the astronomers using the high epoch accumulated years (*shangyuan jinian*, 上元积年) after they determined the starting point of planetary *yingsuo li*.

Keywords planetary *biancha* (变差, *change difference*); *yingsuo li* (盈缩历, *the table of planetary expansion-contraction difference*); precession; *Dayan li* (大衍历, *the Great Expansion System*); *Jiyuan li* (纪元历, *the Era Epoch System*)