中 国 科 学
1992 年 5 月　　A 辑　　第 5 期

平面应力裂纹问题的高阶渐近场*

李松涛　　王自强
(中国科学院力学研究所，北京 100080)

摘　　要

本文对平面应力 I 型裂纹问题高阶渐近场，进行了严格的数学分析．证实了二阶渐近场不是含有独立常数的高阶本征场，而必须与一阶渐近场的弹性应变项相匹配．二阶渐近场对裂纹前方的应力场的影响很小．裂纹前方应力场由 HRR 奇性场表征，因而 J 积分单参数准则可以作为平面应力问题的起裂准则．

关键词：平面应力，高阶渐近场，J 积分，弹塑性

一、引　　言

Hutchinson[1,2]，Rice 和 Rosengren[3] 提出了著名的 HRR 奇性场以来，人们对 J 积分作为单参数断裂准则寄予很大希望．Rice[4] 和 Черепанов[5] 发展的 J 积分表征了 HRR 奇性场强度．为此，Begley 和 Landes[6] 建议单参数 J 积分作为裂纹起始扩展准则．

为了确保 J 积分能够作为裂纹起始扩展的单参数准则，必须证实 HRR 奇性场的控制区域大于断裂过程区．

Hilton 和 Hutchinson[7] 研究了平面应力、小范围屈服问题，设想在裂纹顶端附近的一个小圆上给定了 HRR 奇性场．Shih[8] 采用类似的方法研究了复合型裂纹问题．

Swedlow[9] 对平面应力含裂纹薄板试样进行了有限元计算，并与实验结果进行了比较．Luxmoore, Light 和 Evens[10] 对铝合金材料含中心裂纹薄板进行了有限元计算，得到的结果与实验符合得很好．庄韬[11]对不同几何类型的含裂纹合金钢试样进行了弹塑性应力应变有限元分析．证实平面应力条件下，裂纹尖端的应力应变场由 HRR 场控制，他的有限元计算结果与 HRR 奇性场比较是用对数坐标表示的．

Narasimhan 和 Rosakis[12] 对幂硬化材料平面应力 I 型裂纹问题进行了精细的弹塑性有限元计算．结果表明，裂纹前方应力应变场与 HRR 奇性场一致．

文献[13]给出了平面应力 I 型裂纹问题弹塑性有限元全场解．计算分别对三种不同的含裂纹试样几何进行的．通过精细的比较，证实当 $\tilde{r}\bar{\sigma}_0/\tilde{J} < 25$ 时，裂纹前方的应力场与 HRR 奇性场符合得很好．试样几何的影响可忽略不计．

在渐近意义上，HRR奇性场只是一阶近似，不能完全描述几何构形的影响．文献[14,15]对

本文 1991 年 3 月 13 日收到，1991 年 8 月 26 日收到修改稿．
* 国家自然科学基金资助项目．

平面应变 I 型问题进行了高阶渐近场分析.导出了二阶渐近场,借助于两个幅值系数k_1和k_2的作用,可以对不同几何构形的影响加以恰当的描述. 由此,对双参数断裂判定提供理论依据.

本文对平面应力 I 型裂纹问题高阶渐近场进行了严格的数学分析. 证实二阶渐近场不是独立的本征场,它必须与一阶场的弹性应变项相匹配, 其应力奇性强度为 r^{s_2}, $s_2=\dfrac{(n-2)}{(n+1)}$, 二阶场的幅值系数 k_2 只依赖于一阶场. 二阶场对裂纹前方应力场贡献很小.

二、二阶渐近场的控制方程

对平面问题,取 Descartes 坐标系 $o\bar{x}\bar{y}$, 坐标原点位于裂纹顶端. $\bar{x}$ 轴正向沿裂纹延伸线方向,相应的极坐标为 $(\bar{r},\theta)$, 如图 1 所示.

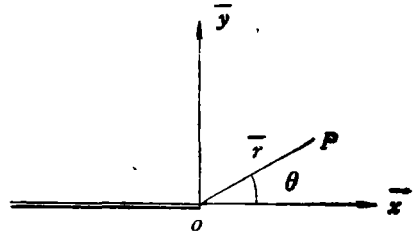


图 1　裂纹顶端坐标系

引入下列无量纲量:

$$\begin{cases}\phi=\bar{\phi}/(\bar{\sigma}_0\bar{L}^2),\ \sigma_{ij}=\bar{\sigma}_{ij}/\bar{\sigma}_0,\\ \varepsilon_{ij}=\bar{\varepsilon}_{ij}/\bar{\varepsilon}_0,\\ u_i=\bar{u}_i/(\bar{\varepsilon}_0\bar{L}),\ r=\bar{r}/\bar{L},\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $\bar{\phi}$, $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$, $\bar{u}_i$ 和 $\bar{r}$ 分别为有量纲的应力函数、应力分量、应变分量、位移分量和距坐标原点的径向距离. $\bar{\sigma}_0$ 为材料的屈服强度, $\bar{\varepsilon}_0$ 等于 $\bar{\sigma}_0/\bar{E}$, $\bar{E}$ 为杨氏模量. $\bar{L}$ 为特征长度,可取为裂纹长度,结构特征尺寸,韧带宽度等. 本文取 $\bar{L}=\bar{J}_1/\bar{\sigma}_0$ 它表征塑性区大小,因此外载水平可以用 $\bar{c}\bar{\sigma}_0/\bar{J}_1=\bar{c}/\bar{L}$ 来表示, $\bar{c}$ 为韧带宽度, $\bar{J}_1$ 为带量纲的 J 积分.

引进无量纲应力函数 ϕ,平衡方程自动得到满足. 应力分量为

$$\begin{cases}\sigma_r=\dfrac{1}{r}\phi'+\dfrac{1}{r^2}\phi^{\cdot\cdot},\\ \sigma_\theta=\phi'',\\ \tau_{r\theta}=-\left(\dfrac{1}{r}\phi^{\cdot}\right)',\end{cases}\tag{2.2}$$

式中 $(\ )'=\dfrac{\partial}{\partial r}$, $(\ )^{\cdot}=\dfrac{\partial}{\partial\theta}$.

应力偏量为(对平面应力问题)

$$\begin{cases}S_r=\dfrac{2}{3}\left(\sigma_r-\dfrac{\sigma_\theta}{2}\right),\\ S_\theta=\dfrac{2}{3}\left(\sigma_\theta-\dfrac{\sigma_r}{2}\right),\quad S_{r\theta}=\tau_{r\theta}.\end{cases}\tag{2.3}$$

等效应力为

$$\sigma_e^2=\sigma_r^2+\sigma_\theta^2-\sigma_r\sigma_\theta+3\tau_{r\theta}^2.\tag{2.4}$$

考虑 Ramberg-Osgood 材料,其单轴拉伸应力应变关系为

$$\varepsilon=\sigma+\alpha\sigma^n,\tag{2.5}$$

其中 n 为硬化指数, α 为材料常数.

应变分量可表示为

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \sigma_r - \nu\sigma_\theta + \dfrac{3}{2}\alpha\sigma_e^{n-1}S_r, \\ \varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu\sigma_r + \dfrac{3}{2}\alpha\sigma_e^{n-1}S_\theta, \\ \varepsilon_{r\theta} = (1+\nu)\tau_{r\theta} + \dfrac{3}{2}\alpha\sigma_e^{n-1}\tau_{r\theta}; \end{cases} \tag{2.6}$$

应变位移关系为

$$\begin{cases} \varepsilon_r = u_r', \quad \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{r}u_\theta' + \dfrac{1}{r}u_r, \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}u_r' + u_\theta' - \dfrac{1}{r}u_\theta\right). \end{cases} \tag{2.7}$$

由此得到应变协调方程

$$\frac{1}{r}(r\varepsilon_{r\theta})'' + \frac{1}{r^2}\varepsilon_r'' - \frac{1}{r}\varepsilon_r' - \frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{r}\varepsilon_{r\theta}\right)' = 0. \tag{2.8}$$

设在裂纹顶端附近,应力函数 ϕ 具有如下的渐近展开形式:

$$\phi = K_1 r^{S_1+2}F_1(\theta) + K_2 r^{S_2+2}F_2(\theta), \tag{2.9}$$

则有

$$\begin{cases} \sigma_r = K_1 r^{S_1}\tilde{\sigma}_{r1}(\theta) + K_2 r^{S_2}\tilde{\sigma}_{r2}(\theta), \\ \sigma_\theta = K_1 r^{S_1}\tilde{\sigma}_{\theta1}(\theta) + K_2 r^{S_2}\tilde{\sigma}_{\theta2}(\theta), \\ \tau_{r\theta} = K_1 r^{S_1}\tilde{\tau}_{r\theta1}(\theta) + K_2 r^{S_2}\tilde{\tau}_{r\theta2}(\theta), \end{cases} \tag{2.10}$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{r1} = F_1'' + (S_1+2)F_1, \\ \tilde{\sigma}_{\theta1} = (S_1+1)(S_1+2)F_1, \quad \tau_{r\theta1} = -(S_1+1)F_1'. \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{r2} = F_2'' + (S_2+2)F_2, \\ \tilde{\sigma}_{\theta2} = (S_2+1)(S_2+2)F_2, \quad \tau_{r\theta2} = -(S_2+1)F_2'. \end{cases} \tag{2.12}$$

将上式代入(2.4)式并保留展开式的前两项,则

$$\sigma_e^2 = K_1^2 r^{2S_1}[\tilde{\sigma}_{e1}^2 + 2\eta r^{\Delta S_2}\tilde{\sigma}_{e12}], \tag{2.13}$$

其中

$$\tilde{\sigma}_{e1}^2 = \tilde{\sigma}_{r1}^2 + \tilde{\sigma}_{\theta1}^2 - \tilde{\sigma}_{r1}\tilde{\sigma}_{\theta1} + 3\tilde{\tau}_{r\theta1}^2,$$

$$\tilde{\sigma}_{e12} = \tilde{\sigma}_{r1}\tilde{\sigma}_{r2} + \tilde{\sigma}_{\theta1}\tilde{\sigma}_{\theta2} - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{r1}\tilde{\sigma}_{\theta2} + \tilde{\sigma}_{\theta1}\tilde{\sigma}_{r2}) + 3\tilde{\tau}_{r\theta1}\tilde{\tau}_{r\theta2},$$

$$\Delta S_2 = S_2 - S_1, \quad \eta = K_2/K_1,$$

对(2.6)式作同样的处理,可得

$$\begin{cases} \varepsilon_r^e = K_1 r^{S_1}(\tilde{\varepsilon}_{r1}^e + \eta r^{\Delta S_2}\tilde{\varepsilon}_{r2}^e), \\ \varepsilon_\theta^e = K_1 r^{S_1}(\tilde{\varepsilon}_{\theta1}^e + \eta r^{\Delta S_2}\tilde{\varepsilon}_{\theta2}^e), \\ \tilde{\varepsilon}_{r\theta}^e = K_1 r^{S_1}(\tilde{\varepsilon}_{r\theta1}^e + \eta r^{\Delta S_2}\tilde{\varepsilon}_{r\theta2}^e), \end{cases} \tag{2.14a}$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{r1}^e = \tilde{\sigma}_{r1} - \nu\tilde{\sigma}_{\theta1}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\theta1}^e = \tilde{\sigma}_{\theta1} - \nu\tilde{\sigma}_{r1}, \\ \tilde{\varepsilon}_{r\theta1}^e = (1+\nu)\tilde{\tau}_{r\theta1}, \end{cases} \tag{2.14b}$$

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}^e_{r2} = \tilde{\sigma}_{r2} - \nu\tilde{\sigma}_{\theta 2}, \quad \tilde{\varepsilon}^e_{\theta 2} = \tilde{\sigma}_{\theta 2} - \nu\tilde{\sigma}_{r2}, \\ \tilde{\varepsilon}^e_{r\theta 2} = (1+\nu)\tilde{\tau}_{r\theta 2}. \end{cases} \tag{2.14c}$$

另有

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}^p_r = \alpha K_1^n r^{nS_1}(\tilde{\varepsilon}^p_{r1} + \eta r^{\Delta S_2}\tilde{\varepsilon}^p_{r2}), \\ \varepsilon^p_\theta = \alpha K_1^n r^{nS_1}(\tilde{\varepsilon}^p_{\theta 1} + \eta r^{\Delta S_2}\tilde{\varepsilon}^p_{\theta 2}), \\ \tilde{\varepsilon}^p_{r\theta} = \alpha K_1^n r^{nS_1}(\tilde{\varepsilon}^p_{r\theta 1} + \eta r^{\Delta S_2}\tilde{\varepsilon}^p_{r\theta 2}), \end{cases} \tag{2.15a}$$

其中，

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}^p_{r1} = \dfrac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e1}^{n-1}\tilde{S}_{r1}, \quad \tilde{\varepsilon}^p_{\theta 1} = \dfrac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e1}^{n-1}\tilde{S}_{\theta 1}, \\ \tilde{\varepsilon}^p_{r\theta 1} = \dfrac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e1}^{n-1}\tilde{\tau}_{r\theta 1}, \end{cases} \tag{2.15b}$$

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}^p_{r2} = \dfrac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e1}^{n-1}[\tilde{S}_{r2} + (n-1)\lambda\tilde{S}_{r1}], \\ \tilde{\varepsilon}^p_{\theta 2} = \dfrac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e1}^{n-1}[\tilde{S}_{\theta 2} + (n-1)\lambda\tilde{S}_{\theta 1}], \\ \tilde{\varepsilon}^p_{r\theta 2} = \dfrac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e1}^{n-1}[\tilde{\tau}_{r\theta 2} + (n-1)\lambda\tilde{\tau}_{r\theta 1}], \end{cases} \tag{2.15c}$$

$$\lambda = \tilde{\sigma}_{e12}/\tilde{\sigma}^2_{e1}. \tag{2.16}$$

将(2.14)和(2.15)式代入(2.8)式，保留前三项，则应变协调方程可写成

$$\alpha K_1^n r^{nS_1-2} f_1^p + \alpha K_1^n \eta r^{nS_1+\Delta S_2-2} f_2^p + K_1 r^{S_1-2} f_1^e = 0, \tag{2.17}$$

其中

$$f_1^p = (\tilde{\varepsilon}^p_{r1})'' - nS_1\tilde{\varepsilon}^p_{r1} - 2(nS_1+1)(\tilde{\varepsilon}^p_{r\theta 1})' + nS_1(nS_1+1)\tilde{\varepsilon}^p_{\theta 1}, \tag{2.18}$$

$$f_1^e = (\tilde{\varepsilon}^e_{r1})'' - S_1\tilde{\varepsilon}^e_{r1} - 2(S_1+1)(\tilde{\varepsilon}^e_{r\theta 1})' + S_1(S_1+1)\tilde{\varepsilon}^e_{\theta 1}, \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} f_2^p = {} & (\tilde{\varepsilon}^p_{r2})'' - (nS_1+\Delta S_2)\tilde{\varepsilon}^p_{r2} - 2(nS_1+\Delta S_2+1)(\tilde{\varepsilon}^p_{r\theta 2})' \\ & + (nS_1+\Delta S_2)(nS_1+\Delta S_2+1)\tilde{\varepsilon}^p_{\theta 2}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

方程(2.17)中，奇性最高的项为 $\alpha K_1^n r^{nS_1-2} f_1^p$，因此有

$$f_1^p = 0, \tag{2.21}$$

这就是 HRR 奇性场的控制方程[1,2].

裂纹面面力自由条件为 $\sigma_\theta(r,\pi) = \tau_{r\theta}(r,\pi) = 0$. 由(2.10)式，可得

$$F_1(\pi) = F_i(\pi) = 0, \quad F_2(\pi) = F_i'(\pi) = 0. \tag{2.22}$$

对于 I 型问题，对称性条件要求

$$F_i(0) = F_i''(0) = 0, \quad F_i'(0) = F_i'''(0) = 0. \tag{2.23}$$

为求得非平凡解，还需补充一个条件. 本文取 $F_1(0) = 1$. 结合条件(2.22)和(2.23)，求解(2.21)式得到 HRR 奇性场，其本征值为

$$S_1 = -\frac{1}{n+1}. \tag{2.24}$$

现在考察二阶渐近场，先设想方程(2.17)中的第二项奇性高于第三项，此时一阶场的弹性应变项的影响可以忽略. 因此，有

$$nS_1 + \Delta S_2 - 2 < S_1 - 2 \tag{2.25}$$

或
$$\Delta S_2 < -(n-1)S_1 = \frac{n-1}{n+1}. \tag{2.26}$$

二阶场的控制方程为 $f_2^p = 0$，也就是

$$(\tilde{\varepsilon}_{r2}^p)'' - (nS_1 + \Delta S_2)\tilde{\varepsilon}_{r2}^p - 2(nS_1 + \Delta S_2 + 1)(\tilde{\varepsilon}_{r\theta 2}^p)' + (nS_1 + \Delta S_2)(nS_1 + \Delta S_2 + 1)\tilde{\varepsilon}_{\theta 2}^p = 0. \tag{2.27}$$

这是线性齐次四阶常微分方程. 为了求得非平凡解，也需要一个补充条件

$$F_2(0) = 1. \tag{2.28}$$

方程(2.27)与边界条件(2.22)和(2.23)构成了本征值问题.

如果该本征值问题，找不到满足约束条件(2.25)的本征值 ΔS_2，此时一阶场弹性应变项的贡献不能忽略，二阶渐近场必须与一阶场弹性项相匹配，才能使协调方程在二阶近似意义上得以成立. 所以方程(2.17)的第二、三项具有相同的奇性，

$$nS_1 + \Delta S_2 - 2 = S_1 - 2,$$

$$\Delta S_1 = \frac{n-1}{n+1}. \tag{2.29}$$

由此得到二阶场的控制方程为

$$f_2^p + \frac{1}{\alpha\eta K_1^{n-1}} f_1^e = 0. \tag{2.30}$$

这是四阶线性非齐次常微分方程，其中可取为任意常数，不妨取

$$\eta = 1/(\alpha K_1^{n-1}),\quad K_2 = 1/\alpha K_1^{n-2}, \tag{2.31}$$

则得到如下控制方程：

$$f_2^p + f_1^e = 0,$$

具体的可写为

$$(\tilde{\varepsilon}_{r2}^p)'' - (nS_1 + \Delta S_2)\tilde{\varepsilon}_{r2}^p - 2(nS_1 + \Delta S_2 + 1)(\tilde{\varepsilon}_{r\theta 2}^p)' + (nS_1 + \Delta S_2)(nS_1 + \Delta S_2 + 1)\tilde{\varepsilon}_{\theta 2}^p = -\{(\tilde{\varepsilon}_{r1}^e)'' - S_1\tilde{\varepsilon}_{r1}^e - 2(S_1 + 2)(\tilde{\varepsilon}_{r\theta 1}^e)' + S_1(S_1 + 1)\tilde{\varepsilon}_{\theta 1}^e\}. \tag{2.32}$$

三、二阶渐近场的求解

先讨论特征方程(2.27)的求解. 此时特征值需要满足约束条件(2.26)

$$0 < \Delta S_2 < \frac{(n-1)}{(n+1)}, \tag{3.1}$$

对于纯 I 型问题，边界条件归结为

$$F_2(0) = F_2''(0) = 0, \tag{3.2}$$

$$F_2(\pi) = F_2'(\pi) = 0. \tag{3.3}$$

方程(2.27)是关于未知函数 $F_2(\theta)$ 的线性齐次变系数常微分方程.

考察两组特解，分别满足下述条件：

$$\text{(i)}\quad F_2(0) = 1,\ F_2'(0) = 0, \tag{3.4}$$

$$\text{(ii)}\quad F_2(0) = 0,\ F_2'(0) = 1. \tag{3.5}$$

同时，这两组特解均满足条件(3.2)

利用(3.2),(3.4)式,我们通过精度可控制的自动变步长四阶 Runge-Kutta 法，积分方程(2.27),得到第一组特解 $F_2^{(1)}(\theta)$。

类似的可求得第二组特解 $F_2^{(2)}(\theta)$ 满足条件(3.2)式的方程(2.27)的通解可写为

$$F_2(\theta) = \alpha_1 F_2^{(1)}(\theta) + \alpha_2 F_2^{(2)}(\theta). \tag{3.6}$$

为了满足边界条件(3.3)必有:

$$\begin{cases} \alpha_1 F_2^{(1)}(\pi) + \alpha_2 F_2^{(2)}(\pi) = 0, \\ \alpha_1 F_2^{(1)\cdot}(\pi) + \alpha_2 F_2^{(2)\cdot}(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

线性齐次代数方程(3.7)有非零解 (α_1, α_2) 的充要条件是下述行列式为零:

$$\Delta = F_2^{(1)}(\pi) F_2^{(2)\cdot}(\pi) - F_2^{(2)}(\pi) F_2^{(1)\cdot}(\pi). \tag{3.8}$$

显然行列式 Δ 是 ΔS_2 的函数，调节 ΔS_2 使行列式 Δ 为零即可求得特征值 ΔS_2 及相应的特征函数。

在 $0 < \Delta S_2 < \dfrac{n-1}{n+1}$ 的范围内，寻找使 Δ 为零的特征值 ΔS_2。对不同的材料幂硬化指数 n,进行了精细的求解尝试(积分方程(2.27)时,控制精度 10^{-10})，均未找到特征值 ΔS_2。这表明与一阶场弹性应变项相独立的二阶渐近场并不存在。

为此,我们寻找方程(2.32)的解。方程(2.32)是线性非齐次常微分方程，其右端项便是非齐次项,该项代表一阶场弹性应变项对应变协调方程的贡献。我们先寻找满足方程 (2.32) 的特解 $F_2^{(0)}(\theta)$。该特解满足齐次初始值条件。

$$F_2(0) = F_2'(0) = F_2''(0) = F_2'''(0) = 0. \tag{3.9}$$

注意到(3.6)式,满足方程(2.32)及初值条件(3.2)的通解为

$$F_2(\theta) = \alpha_1 F_2^{(1)}(\theta) + \alpha_2 F_2^{(2)}(\theta) + F_2^{(0)}(\theta), \tag{3.10}$$

式中 α_1, α_2 为待定系数。为了满足边界条件(3.3),我们有

$$\begin{cases} \alpha_1 F_2^{(1)}(\pi) + \alpha_2 F_2^{(2)}(\pi) = -F_2^{(0)}(\pi), \\ \alpha_1 F_2^{(1)\cdot}(\pi) + \alpha_2 F_2^{(2)\cdot}(\pi) = -F_2^{(0)\cdot}(\pi). \end{cases} \tag{3.11}$$

由于线性代数方程(3.11)的系数行列式 Δ 不为零,因此,方程(3.11)有唯一解答 (α_1, α_2)。这里要强调的是对应于方程(2.32)有

$$\Delta S_2 = \frac{n-1}{n+1}. \tag{3.12}$$

图 2 画出了两个典型的计算结果。从图 2 不难看出,平面应力的二阶渐近场,与一阶渐近场相仿的是径向应力 σ_{r2} 的角分布函数 $\tilde{\sigma}_{r2}(\theta)$ 存在着一个急剧变化的区域。这个区域与一阶渐近场的急剧变化区域是一致的。通过这个急剧变化区域 $\tilde{\sigma}_{r2}$ 由正值转为负值。材料的硬化指数越高,急剧变化程度越强烈。

考察裂纹前方的法向正应力分布。我们有:

$$\sigma_\theta = K_1 r^{S_1}(\tilde{\sigma}_{\theta 1}(0) + \eta r^{\Delta S_2}\tilde{\sigma}_{\theta 2}(0)). \tag{3.13}$$

参照 Hutchinson[1] 李尧臣和王自强[14]，塑性应力强度因子 K_1 与无量纲 J 积分之间的关系为

$$J_1 = \alpha K_1^{n+1} I_1 \quad 或 \quad K_1 = (J_1/\alpha I_1)^{\frac{1}{n+1}}, \tag{3.14}$$

I_1 为积分模量,它只是 n 的函数。

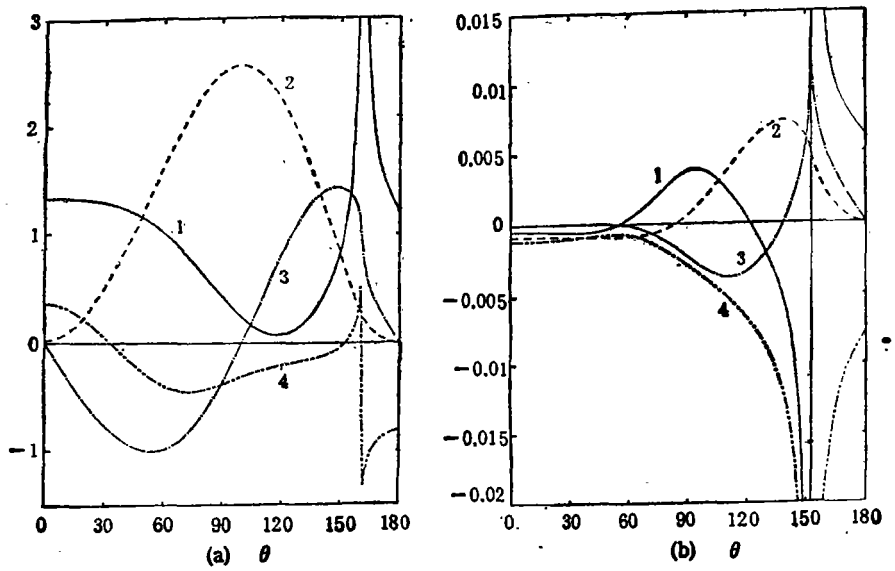


图 2 裂纹尖端二阶渐近场应力分布

((a) $n=3$, (b)$n=13$; 1——$\tilde{\sigma}_{r2}(\theta)$, 2——$\tilde{\sigma}_{\theta 2}$, 3——$\tilde{\sigma}_{r\theta 2}$, 4——$\tilde{\sigma}_{r12}$)

$$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{n}{n+1}\tilde{\sigma}_{r1}^{n+1}\cos\theta+[\tilde{\tau}_{r\theta 1}(\tilde{u}_{\theta 1}+\tilde{u}_{r1})-\tilde{\sigma}_{r1}(\tilde{u}_{\theta 1}-\tilde{u}_{r1})]\sin\theta\right.$$
$$\left.+(1+nS_1)(\tilde{\sigma}_{r1}\tilde{u}_{r1}+\tilde{\tau}_{r\theta 1}\tilde{u}_{\theta 1})\cos\theta\right\}d\theta. \tag{3.15}$$

表 1 K_1, K_2 和 ρ_{max} 计算结果

n	3.0	13.0
S_1	−0.25	−0.07143
S_2	0.25	0.7857
$\tilde{\sigma}_{\theta 1}(0)$	1.106	1.149
$\tilde{\sigma}_{\theta 2}(0)$	0.02263	-0.5377×10^{-3}
I_1	3.855	2.871
K_1	3.375	1.446
K_2	0.2963	0.01735
η	0.08781	0.0120
ρ_{max}	0.00803	0.732×10^{-4}

有量纲的 J 积分 $\bar{J}_1$ 可表示为

$$\bar{J}_1=\bar{\sigma}_0\bar{\varepsilon}_0\bar{L}J_1. \tag{3.16}$$

本文特征长度 $\bar{L}=\bar{J}_1/\bar{\sigma}_0$, 因此有: $$J_1=1/\varepsilon_0, \tag{3.17}$$

代入(3.14)式得 $$K_1=(1/\alpha\varepsilon_0 I_1)^{\frac{1}{n+1}},$$

进而由(2.30)式得 $\eta = \frac{1}{\alpha}(\alpha\varepsilon_0 I_1)^{\frac{n-1}{n+1}}$，$K_2 = \eta K_1$。

表 1 列出了若干量的计算结果。计算是针对 $\alpha = 1$，$\varepsilon_0 = 0.002$ 的情况进行的。

在裂纹顶端区域附近，我们考察区间：

$$0 < \bar{r}/(\bar{J}/\bar{\sigma}_0) < 20,$$

也就是

$$0 < r < 20. \tag{3.18}$$

由(3.13)式看出，二阶场对于裂纹前方应力分布的贡献与一阶场对于裂纹前方应力分布的贡献的相对比值为

$$\rho = |\eta r^{\frac{n-1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{\theta 2}(0)/\tilde{\sigma}_{\theta 1}(0)|. \tag{3.19}$$

在(3.18)式确定的区间内，比值 ρ 的最大值为 ρ_{max}。其数值已列于表 1。从表 1 不难看出，二阶渐近场的贡献可以忽略不计，也就是说本文的高阶渐近场分析表明，对于平面应力状态，一阶渐近场确实控制了裂纹前方区域的应力场。

精细的有限元全场分析表明[13]，当 $\bar{r}\sigma_0/\bar{J} = r < 25$ 时，裂纹前方的应力场与 HRR 奇性场符合得很好，试样几何的影响可忽略不计。这些是与本文的分析完全一致的。

四、结　论

1. 本文对平面应力 I 型裂纹问题的高阶渐近场进行了严格的数学分析，表明二阶渐近场不是独立的本征场而必须与一阶渐近场的弹性应变项相匹配。二阶渐近场对裂纹前方的应力场的影响很小。裂纹前方的应力场与 HRR 奇性场一致。因而单参数 J 积分可以表征裂纹顶端附近的应力应变场。

2. HRR 奇性场控制区域可以用 J 积分表征：$0 < \bar{r} < 20\bar{J}/\bar{\sigma}_0$。

在这个区域内，裂纹前方延伸线上的应力应变场可以用 HRR 奇性场准确地表征。在这个区域之外，有限元计算得到的应力场逐渐偏离 HRR 奇性场。

参　考　文　献

[1] Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 16(1968), 13.
[2] Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 16(1968), 337.
[3] Rice, J. R. & Rosengren, G. F., *J. Mech. Phys. Solids*, 16(1968), 1.
[4] Rice, J. R., *J. Appl. Mech.*, 35(1968), 379.
[5] Черепанов, Г. П., 脆性断裂力学，黄克智等译，科学出版社，1990.
[6] Begley, J. A. & Landes, J. D., *ASTM*, STP 514, 1972, 1.
[7] Hilton, P. D. & Hutchinson, J. W., *Eng. Fracture Mech.*, 8(1974), 461.
[8] Shih, C. F., *ASTM*, STP 560, 1974, 187.
[9] Swedlow, J. L., *Int. J. Fracture Mech.*, 5(1969), 256.
[10] Luxmoore, A. R. et al., *J. Strain Anal.*, 12(1977), 208.
[11] 庄韬，钢铁研究总院学报，6(1986)，27.
[12] Narasimhan, R. & Rosakis, A. J., *J. Mech. Phys. Solids*, 36(1988), 77.
[13] Deng, H. T. & Wang, T. C., *Plane Stress Elastic-Plastic Fracture Criterion and Stress-Strain Field Around Crack Tip*, ICF 7, 1989, Vol. 1, 323—331.
[14] 李尧臣、王自强，中国科学 A 辑，1986，2：182.
[15] 王克仁、王自强，应用数学和力学，9，1987)，791.