中 国 科 学
1987 年 11 月　　A 辑　　第 11 期

理想弹塑性介质的余能原理

高　扬　　黄克智
（合肥工业大学应用数学力学系）　（清华大学工程力学系，北京）

摘　要

本文建立了 Hencky 介质变分边值问题的最小余能原理．根据其中塑性余超势的性质，构造了不同类型的余能变分原理，并证明了一个理论上严格、实用方便的罚-对偶型变分原理，给出了相应地计算方法．

一、引　言

关于理想弹塑性理论的边值问题，由于数学上的困难，至今仍存在着许多尚未解决的课题．鉴于它在工程上具有较大的实用价值，自七十年代以来，许多学者为此做出了很大的努力[1-3]．Temam 在其新著[4]中给予了系统地阐述．然而，由于物理模型的特殊性，不能采用经典的 Legendre 变换确定其塑性位势的共轭余势，先前所有关于对偶型变分原理的结果，都是基于经典的 Haar-Karman 原理建立的．而此原理实质上是定义在一个具有强物理非线性单边约束条件凸子集上的优化问题，它并不具有一般介质对偶变分原理中完美的互补对偶性[1)]，在使用上也存在着很大的困难．事实上，关于理想弹塑性介质的最小余能原理，至今尚未得到正确的建立．

在文献 [5] 中，曾发现理想塑性介质的余能原理只是硬化介质余能原理的极限情况，从而建立了此问题的罚余能原理[6]．本文将根据凸分析理论，建立并证明理想弹塑性介质边值问题的余能原理，并根据其中塑性余超势的性质，构造了不同类型的变分原理．

二、边值问题及势能原理

为讨论方便计，假定材料是均匀、各向同性的．在变形前，其占有物理空间 $\Omega\subset R^3$ 为一有界开域，并具有充分光滑边界 $\partial\Omega=\Gamma_t\cup\Gamma_u$，$\Gamma_t$ 和 Γ_u 分别为给定外力和位移边界，$\Gamma_t\cap\Gamma_u=\varnothing$．于是理想弹塑性介质的边值问题为：求位移场 u 及应力场 σ．使其满足如下控制方程：

1. 平衡方程

$$\nabla\cdot\sigma+b=0(\text{in}\Omega),\quad \sigma\cdot n-t=0(\text{on}\Gamma_t). \tag{1}$$

2. 几何方程

$$\varepsilon=\frac{1}{2}(\nabla u+u\nabla)(\text{in}\Omega),\quad u-\bar{u}=0(\text{on}\Gamma_u). \tag{2}$$

本文 1986 年 11 月 4 日收到，1987 年 4 月 6 日收到修改稿．

1) 高扬，弹性系统的互补原理及泛延罚有限元素法，清华大学博士学位论文，1985.

3. Hencky 本构方程

$$\left.\begin{aligned}&\text{(a)}\ \ \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p,\\&\text{(b)}\ \ \varepsilon^e = \frac{1}{9\kappa_0}(\mathrm{tr}\,\sigma)I + \frac{1}{2\mu_0}\sigma^d,\\&\text{(c)}\ \ \varepsilon^p = \begin{cases}\lambda\dfrac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma}, & \text{当 } f=0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } f<0 \text{ 时}.\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中 κ_0, μ_0 为材料常数，σ^d 为应力偏量，I 为单位张量，$f(\sigma)$ 为应力屈服函数：

$$f(\sigma) := |\sigma^d| - \sqrt{2}k = \sqrt{\sigma^d_{ij}\sigma^d_{ij}} - \sqrt{2}k, \tag{4}$$

$f(\sigma)$ 与塑性流动因子 λ 间应满足如下约束品性条件：

$$\lambda \geqslant 0,\ f(\sigma) \leqslant 0,\ \lambda \cdot f(\sigma) = 0 \qquad (\text{a.e.in}\Omega), \tag{5}$$

引入阶跃函数

$$\Phi(\xi) := \begin{cases}1, & (\xi \geqslant 0),\\ 0, & (\xi < 0).\end{cases}$$

塑性本构方程(3(c))式可统一地写成

$$\varepsilon^p = \lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma}\Phi(\varphi) \quad (\text{in}\Omega), \tag{6}$$

此处 φ 为应力型分域函数：$\varphi = f(\sigma)$[1]。

定义位移许可空间 U_a

$$U_a := \{v \in W^1_p(\Omega)^3 \mid v - \bar{u} = 0(\text{on}\Gamma_u)\}, \tag{7}$$

此处 W^1_p 为 Sobolev 空间记号，则 Hencky 介质边值问题的最小势能原理可以表述为如下变分问题：

求 $u \in U_a$ 使得

$$(P) \qquad \Pi(u) = \inf_{v\in U_a}\left\{\int_\Omega w(\varepsilon(v))d\Omega - \int_\Omega b\cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_t} t\cdot v d\Gamma\right\}, \tag{8}$$

其中 $w(\varepsilon)$ 为弹塑性超势函数：

$$w(\varepsilon) := \frac{1}{2}\kappa_0(tr\varepsilon)^2 + \mu_0|\varepsilon^d|^2\Phi(-\phi) + k\left[\sqrt{2}\,|\varepsilon^d| - \frac{k}{2\mu_0}\right]\Phi(\phi), \tag{9}$$

这里 ϕ 为应变型分域函数：

$$\phi = |\varepsilon^d| - \frac{k}{\sqrt{2}\,\mu_0}.$$

关于变分问题 (P) 解的属性业已由 Temam 等广泛研究，此不赘述，现在所关心的仅是其对偶问题.

三、Hencky 介质的最小余能原理

由于超势函数 $w(\varepsilon)$ 的非光滑性，不能采用经典的 Legendre 变换建立相应的共轭函数。

1) 见 1147 页脚注高扬文章.

但是利用凸分析理论中的 Fenchel 变换，可以克服这一困难．根据高扬文章，有

$$w^*(\sigma)=\sup_{\varepsilon}\{\langle\sigma,\varepsilon\rangle-w(\varepsilon)\}=\frac{1}{18\kappa_0}(\mathrm{tr}\,\sigma)^2+\frac{1}{4\mu_0}|\sigma^d|^2+\Psi_K(\sigma),\tag{10}$$

这里 Ψ_K 为塑性超余势，定义为：

$$\Psi_K(\sigma):=\begin{cases}0 & \forall\sigma\in K\\ +\infty & \forall\sigma\notin K,\end{cases}\tag{11}$$

K 为屈服集合：

$$K:=\{\sigma\in W_q^1(\Omega)^6\mid f(\sigma)\leqslant 0(\text{in }\Omega)\},\tag{13}$$

这里 q 为(7)式中 p 的对偶数：$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$．显然 K 为一闭凸集．在凸分析理论中(参见[7])，Ψ_K 称为集合 K 的指标函数，它是凸、下半连续常态函数，它的次微分表示为如下的凸子集：

$$\partial\Psi_K(\sigma):=\{\varepsilon^p\mid\langle\varepsilon^p,\sigma-\tau\rangle\geqslant 0\quad\forall\tau\in K\},\tag{14}$$

其几何意义为：$\partial\Psi_K(\sigma)$ 表示在 σ 点垂直于 K 的所有外法线集合，即 K 在 σ 点的外法向锥．

定义静力许可集合 Σ_a：

$$\Sigma_a:=\{\sigma\in W_q^1(\Omega)^6\mid\nabla\cdot\sigma+b=0(\text{in}\Omega),\sigma\cdot n-t=0(\text{on}\Gamma_t)\},\tag{15}$$

于是可以建立理想弹塑性介质边值问题的最小余能泛函 $\Pi^*(\sigma):\Sigma_a\to(-\infty,+\infty]$．

$$\Pi^*(\sigma):=\int_\Omega w^*(\sigma)d\Omega-\int_{\Gamma_u}\bar{u}\cdot\sigma\cdot ndT.\tag{16}$$

定理 1．若 Σ_a 是非空有界的，$\mathrm{dom}\Psi_K\neq\emptyset$，则存在唯一的 $\sigma\in\Sigma_a$ 使得

$$(P^*)\qquad\Pi^*(\sigma)=\inf_{\tau\in\Sigma_a}\Pi^*(\tau),\tag{17}$$

且 σ 为 Hencky 介质边值问题的完全解．

证．因为对于任意的 $\tau\in\Sigma_a$，$w^*(\tau)$ 是严格凸的，且 $\mathrm{dom}\Psi_K\neq\emptyset$($\mathrm{dom}f$ 表示 f 的有效域)，则由凸分析理论即知极值问题 (P^*) 存在唯一的解 $\sigma\in\Sigma_a$[1]．现证明此解 σ 满足 Hencky 介质边值问题的全部控制方程．为此，引入 Lagrange 乘子 $v\in U_a$ 对(16)式进行分解，则导致鞍点泛函 $\mathscr{L}(v,\tau)$：

$$\mathscr{L}(v,\tau):=\int_\Omega\tau\cdot\varepsilon(v)d\Omega-\int_\Omega w^*(\tau)d\Omega-\int_\Omega b\cdot vd\Omega-\int_{\Gamma_t}t\cdot vd\Gamma,\tag{18}$$

相应的极值问题 (P^*) 即等价于鞍点问题：

求 (u,σ) 使得：

$$\mathscr{L}(u,\sigma)=\inf_{v\in U_a}\sup_{\tau\in W_q^1}\mathscr{L}(v,\tau).\tag{19}$$

根据高扬文章和文献[7]，(u,σ) 为鞍点的充要条件是满足如下次微分型驻值条件：

$$(0,0)\in\partial\mathscr{L}(u,\sigma).\tag{20}$$

这将导致(这里 $\partial_\sigma\mathscr{L}(u,\sigma)$ 应被理解为 $-\partial_\sigma(-\mathscr{L}(u,\sigma))$)：

$$\nabla\cdot\sigma+b=0\quad(\text{in}\Omega),\qquad\sigma\cdot n-t=0\quad(\text{on}\Gamma_t)\tag{21}$$

$$\varepsilon(u)\in\partial w^*(\sigma)\quad(\text{in}\,\Omega).\tag{22}$$

---

1) 见前脚注高扬文章．

由 $w^*(\sigma)$ 的性质(10)式，次微分关系(22)式可分解成

$$\varepsilon^e(u) = \frac{1}{9\kappa_0}(\mathrm{tr}\,\sigma)I + \frac{1}{2\mu_0}|\sigma^d|, \tag{23}$$

$$\varepsilon^p(u) \in \partial\Psi_K(\sigma). \tag{24}$$

由于 K 为凸函数 $f(\sigma)$ 构成的凸集，则由次微分本构定律[1]，(24)式可写成

$$\varepsilon^p(u) = \begin{cases} \lambda\dfrac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma}, & \text{若 } f(\sigma)=0,\ \lambda\geqslant 0, \\ \{0\}, & \text{若 } f(\sigma)<0, \\ \varnothing & \text{若 } f(\sigma)>0. \end{cases} \tag{25}$$

这正是 Hencky 介质的本构定律. 即与 σ 相关连的位移场 u 是运动许可的，故 σ 必为 Hencky 介质边值问题的完全解，于是证毕.

定理 1 就是理想弹塑性介质边值问题的最小余能原理，它与此问题的最小势能原理 (P) 之间存在着完美的互补对偶关系[1]. 根据其中的塑性余超势函数 Ψ_K 的性质(11)式，可以构造出各种类型的余能原理.

四、塑性余超势 Ψ_K 的各种构造

引入罚因子 $\alpha>0$，可以给出 Ψ_K 的一种最简单的构造：

$$\Psi_\alpha(\sigma) := \frac{1}{2\alpha}f^2(\sigma)\Phi(\varphi). \tag{26}$$

显然，对于任意给定的 σ，有

$$\Psi_K(\sigma) = \sup_{\alpha>0}\Psi_\alpha(\sigma) = \lim_{\alpha\to 0^+}\Psi_\alpha(\sigma). \tag{27}$$

惩罚型塑性余势 Ψ_α 具有明确的物理意义：它相当于双线性硬化材料的塑性余势[3]，当硬化参数 $\alpha\to 0^+$ 时，即退化为理想塑性情况. 将(27)式代入(16)式中，即可得到：

$$\Pi_P^*(\sigma,\alpha) = \int_\Omega [w_e^*(\sigma)+\Psi_\alpha(\sigma)]d\Omega - \int_{\Gamma_u}\bar{u}\cdot\sigma\cdot n d\Gamma, \tag{28}$$

式中 w_e^* 为弹性余势：

$$w_e^*(\sigma) := \frac{1}{18\kappa_0}(\mathrm{tr}\,\sigma)^2 + \frac{1}{4\mu_0}|\sigma^d|^2. \tag{29}$$

于是由定理 1 可建立如下罚余能原理：

$$\Pi_P^*(\sigma,\alpha) = \lim_{\alpha\to 0^+}\inf_{\tau\in\Sigma_a}\Pi_P^*(\tau,\alpha). \tag{30}$$

根据最优化理论，若 Σ_a 为弱紧的，则对于任给的严格递减数列 $\{\alpha_k\}$，解列 $\{\sigma_{\alpha_k}|\inf\Pi_P^*(\tau,\alpha_k)\forall\tau\in\Sigma_a\}$ 存在着唯一的弱极限点 $\sigma=\lim_{k\to\infty}\sigma_{\alpha_k}$，且它必为 Hencky 介质边值问题的解. 罚余能原理(30)式实质上为理想弹塑性介质提供了一个序列无约束(仅对屈服约束而言)的最优化算法.

引入屈服函数 $f(\sigma)$ 的对偶变量 $\lambda\geqslant 0$，则可给出 Ψ_K 的一种对偶型构造：

$$\Psi_d(\sigma,\lambda) := \lambda f(\sigma)\Phi(\varphi). \tag{31}$$

1),2) 见前注高扬文章.

显然，对于任给的 σ，我们有：

$$\Psi_K(\sigma)=\sup_{\lambda\geqslant 0}\Psi_d(\sigma,\lambda). \tag{32}$$

将此式代入鞍点泛函(18)中，则有

$$\mathscr{L}_d(u,\sigma,\lambda):=\int_\Omega[\sigma\cdot\varepsilon(u)-w_c^*(\sigma)-\Psi_d(\sigma,\lambda)]d\Omega$$
$$-\int_\Omega b\cdot u d\Omega-\int_{\Gamma_t}t\cdot u d\Gamma. \tag{33}$$

于是由(19)式可以得到理想弹塑性边值问题的对偶型广义变分原理：

$$\mathscr{L}_d(u,\sigma,\lambda)=\inf_v\sup_\tau\inf_{\lambda\geqslant 0}\mathscr{L}_d(v,\tau,\lambda), \tag{34}$$

若取 $f(\tau)=|\tau^d|-\sqrt{2}k$，则利用驻值条件消去对偶变量可得 $\lambda=|\varepsilon^p(v)|$[1]。这表明了 $\lambda(v)$ 与 $f(\tau)$ 间的对偶关系。对于理想刚塑性介质，(34)式即退化为文献[8]的结果。

结合以上 Ψ_K 的两种构造，可以得到所谓的罚-对偶型构造：

$$\Psi_{pd}(\sigma,\lambda,\alpha):=\frac{\alpha}{2}\left\{\left[\lambda+\frac{1}{2}f(\sigma)\right]^2\Phi(\varphi_\alpha)-\lambda^2\right\}, \tag{35}$$

其中 $\varphi_\alpha=\lambda+\frac{1}{2}f(\sigma)$ 为罚-对偶型应力分域函数。可以证明[2]，对于任给的 σ，有

$$\Psi_K(\sigma)=\sup_{\alpha>0}\sup_\lambda\Psi_{pd}(\sigma,\lambda,\alpha). \tag{36}$$

根据定理 1，可以得到如下的罚-对偶型变分原理：

定理 2. 存在一个有限的罚因子 $\alpha_*>0$，使得罚-对偶变分问题

$$\Pi_{pd}^*(\sigma_\alpha,\lambda_\alpha)=\inf_{\tau\in\Sigma_\sigma}\sup_\lambda\Pi_{pd}^*(\tau,\lambda,\alpha)\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_*] \tag{37}$$

的鞍点 $(\sigma_\alpha,\lambda_\alpha)$ 为 Hencky 介质边值问题的解。

证。引入 Lagrange 乘子 $v\in U_a$，于是罚-对偶问题(37)式可以被分解成：

$$\mathscr{L}_{pd}(u_\alpha,\sigma_\alpha,\lambda_\alpha)=\inf_v\sup_\tau\inf_\lambda\mathscr{L}_{pd}(v,\tau,\lambda), \tag{38}$$

其中

$$\mathscr{L}_{pd}(v,\tau,\lambda)=\int_\Omega\tau\cdot\varepsilon(v)d\Omega-\int_\Omega[w_c^*(\tau)+\Psi_{pd}(\tau,\lambda,\alpha)]d\Omega$$
$$-\int_\Omega b\cdot v d\Omega-\int_{\Gamma_t}v\cdot t d\Gamma. \tag{39}$$

对于给定的 $\alpha>0$，$\mathscr{L}_{pd}$ 在 Ω 上是分片连续的，由次微分型鞍点条件

$$(0,0,0)\in\partial\mathscr{L}_{pd}(u_\alpha,\sigma_\alpha,\lambda_\alpha) \tag{40}$$

导致：

$$\nabla\cdot\sigma_\alpha+b=0\quad(\text{in}\Omega),\qquad\sigma_\alpha\cdot n-t=0\quad(\text{on}\Gamma_t), \tag{41}$$

$$\varepsilon(u_\alpha)=\frac{\partial w_c^*(\sigma_\alpha)}{\partial\sigma_\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}f(\sigma_\alpha)+\lambda_\alpha\right)\frac{\partial f(\sigma_\alpha)}{\partial\sigma_\alpha}\Phi(\varphi_\alpha), \tag{42}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(a)\quad f(\sigma_\alpha)=0, & \text{若 }\varphi_\alpha\geqslant 0,\\ (b)\quad \lambda_\alpha=0, & \text{若 }\varphi_\alpha<0.\end{array}\right\}(\text{in}\Omega) \tag{43}$$

---

1),2) 见 1147 页脚注高扬文章.

根据阶跃函数 $\Phi(\varphi_\alpha)$ 的性质，由 Euler-Lagrange 方程(43(a))式即知对于有限的 $\alpha_* > 0$，

$$\frac{1}{\alpha} f(\sigma_\alpha)\Phi(\varphi_\alpha) = 0 \quad (\text{in}\Omega), \quad \forall \alpha \in (0,\alpha_*]$$

于是(42)式应为：

$$\varepsilon(u_\alpha) = \frac{\partial w_c^*(\sigma_\alpha)}{\partial \sigma_\alpha} + \lambda_\alpha \frac{\partial f(\sigma_\alpha)}{\partial \sigma_\alpha} \Phi(\varphi_\alpha). \tag{44}$$

由于 $\varphi_\alpha = \lambda_\alpha + \alpha^{-1} f(\sigma_\alpha)$ (此可由 $\mathscr{L}_{pd}$ 对 φ_α 求 Gâteaux 微分得以证明[1])，则采用排谬法由 Euler-Lagrange 方程(43)可以证明[2]：

$$f(\sigma_\alpha) \leqslant 0, \ \lambda_\alpha \geqslant 0, \ \lambda_\alpha f(\sigma_\alpha) = 0 \tag{45}$$

这正是 Lagrange 乘子 λ 所应满足的约束品性条件. 这就证明了 $\forall \alpha \in (0,\alpha_*]$，罚-对偶变分问题(37)的鞍点 $(\sigma_\alpha,\lambda_\alpha)$ 满足 Hencky 介质边值问题的全部方程和条件，于是证毕.

罚-对偶型变分原理同时兼备了惩罚型和对偶型变分原理两方面的优点，它不仅在理论上严格成立，同时在使用上也是十分方便的. 另外，在以上的证明过程中，对屈服函数 $f(\sigma)$ 并没有具体的要求，这即意味着定理 2 可适用于具有任何形式凸屈服条件的理想塑性介质，在极限分析中，它可以用于分析岩土力学等结构问题.

根据定理 2，可以建立如下理想弹塑性介质余能原理的罚-对偶迭代算法：

对于给定的 λ_n，确定 σ_n 使得

$$\Pi_{pd}^*(\sigma_n,\lambda_n) = \inf_{\tau \in V} \Pi_{pd}^*(\tau,\lambda_n), \ \forall \alpha_n > 0. \tag{46}$$

然后由下式修正对偶变量

$$\lambda_{n+1} = \left[\lambda_n + \frac{1}{\alpha_n} f(\sigma_n)\right] \Phi(\varphi_{\alpha_n}). \tag{47}$$

这里 $\varphi_{\alpha_n} = \lambda_n + \frac{1}{\alpha_n} f(\sigma_n)$. 对于预先给定的允许误差 $\omega \geqslant 0$，若在第 n 次迭代后有 $|f(\sigma_n)| \leqslant \omega(\text{in}\,\Omega)$，则 σ_n 即为满足精度要求的解.

在此算法中，选择不同的罚因子序列，可以达到控制收敛速度的目的. 一般而言，较小的 α_n 导致较快的收敛速度，但从数值分析观点出发，太小的 α_n 将会使得以上算法出现单纯的惩罚型方法中数值不稳定的现象. 对于一般工程问题而言，建议采用下式调整罚因子序列：

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \gamma\alpha_n, & \text{若 } |f(\sigma_n)| \geqslant \theta |f(\sigma_{n-1})|, \\ \alpha_n, & \text{若 } |f(\sigma_n)| < \theta |f(\sigma_{n-1})|, \end{cases} \tag{48}$$

其中 θ,γ 为常参数，一般可取为

$$\gamma \in [0.01,0.25], \ \theta \in [0.25,0.5].$$

根据以上算法，作者编制了相应的有限元程序，并在极限分析问题中得以成功的应用[3]，大量的数值实验结果证明了此方法具有较高的数值精度和较好的数值稳定性.

参 考 文 献

[1] Duvaut, G. and Lions, J. L., *Les inequations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, 1972.

[2] Temam, R. and Strang, G., Duality and relaxation in the variational problems of Plasticity, *J. de Mécanique*, **19**

1),2)3)，见前注高扬文章.

(1980), 3: 493—527.

[3] Kohn, R. and Temam, R., Dual spaces of stresses and strains, with applications to Hencky plasticity, *Appl. Math. Optim.*, 10(1983), 1—35.

[4] Temam, R. *Problèmes Mathematiques en Plasticité*, Bordas, Paris, 1983

[5] 高扬，合肥工业大学学报，4(1983)，91—97.

[6] Gao Yang (高扬) and Hwang Keh-chih (黄克智), On the complementary energy variational principle for Hencky plasticity, in *Proc Int Conf. Nonlinear Mechanics*, Science Press, 1985, 489—494.

[7] Ekeland, I. and Temam, R., *Convex Analysis and Variational Problems*, North Holland, 1976.

[8] 高扬，应用数学和力学，4(1983)，4：527—538.