中 国 科 学 (A 辑)
第 24 卷 第 9 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1994 年 9 月

湍流边界层近壁区相干结构起因的研究 *

周 恒 熊忠民
(天津大学力学系，天津 300072)

摘 要

利用流动稳定性理论中的一般共振三波的概念，提出了一种湍流边界层近壁区相干结构产生机理的理论模型. 由此所得的相干结构的空间形态，展向尺度，传播速度等都与数值模拟所得结果相近. 特别是计算了多数是不对称的各种流向涡对环量差的概率密度分布曲线，得到了与数值模拟结果相比基本满意的结果.

关键词 相干结构、共振三波、湍流边界层近壁区

1 引 言

本世纪 60 年代，Kline 等[1] 在湍流边界层近壁区发现了相干结构，这为湍流研究开辟了一个新途径. 对相干结构的研究，不仅有助于认识湍流的本质，也为通过控制相干结构进而控制湍流提供了一种可能. 因此，对相干结构的研究已成为湍流研究中有重要意义的课题之一.

湍流边界层近壁区的相干结构与湍流动能的产生紧密相关，是湍流边界层中最活跃的大尺度运动. 过去人们认为这种相干结构可用对称的一对反向旋转的流向涡或发卡涡来表示[2, 3]，对这种涡的起因也建立了一些以流动稳定性分析为基础的理论模型[4—7]. 但最近的研究发现[8—10]，近壁区的相干结构虽然近似地为流向涡，但多数不是对称的涡对，而是在环量和尺度上不对称的涡对，有时甚至只以一个涡的形式出现. 过去的对称结果是对大量相干结构做系综平均的结果，并不真实反映单个相干结构的特征. 这一特点在以往的理论模型中都没有得到体现. 而且这些模型在采用流动稳定性理论来分析时，除文献[7] 外，都以湍流平均速度剖面为基本流，而实际上，瞬时速度剖面与平均速度剖面可以相差很大[11]. 更重要的是平均速度剖面已包含了相干结构所起的作用，因而用以研究相干结构的起因是不合适的.

在文献[7] 中提出，作为研究相干结构起因的基本流，在近壁区应是粘性起主要作用的一种剖面. 因而可将其法向坐标压缩了的部分 Blasius 剖面，在适当地方与外部平均流剖面光滑相接，以此作为稳定性分析的出发点，这相当于假定无猝发时，在近壁处存在一个由外区流动带

1993-06-14 收稿、1993-10-20 收修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目.

动的薄的粘性边界层. 本文也采用这样一种剖面. 但我们选取由3个三维T-S波组成的更一般的共振三波作为出发点,利用改进了的弱非线性理论[12—14]导出它们的演化方程,为湍流边界层近壁区相干结构的产生机理提供一个理论模型. 可以由此算出相干结构的若干特征,如展向尺度,流向涡对环量差的概率密度分布等,可以与数值模拟的结果相比. 比较的结果证实,这一理论模型是可信的.

2 理论分析

无量纲化的Navier-Stokes方程及连续方程可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\nabla p=\frac{1}{R}\nabla^2\boldsymbol{u},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{u}=\{u,\ v,\ w\}^{\mathrm{T}}$ 是速度,u, v, w 是其在流向 x,法向 y 和展向 z 的分量,t 是时间,p 是压力,R 是Reynolds数,∇ 是梯度算子.

略去湍流的小尺度脉动,将瞬时速度和压力分解为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}},\quad p=P+p_{\mathrm{c}}, \tag{2.2}$$

其中 $\boldsymbol{U}$, P 为基本流,$\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$, p_{c} 则由相干结构引起. 不难得到 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$, p_{c} 满足的方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}}{\partial t}+(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}+(\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}=\frac{1}{R}\nabla^2\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}-\nabla p_{\mathrm{c}}-(\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}=0. \tag{2.3}$$

采用平行流近似,设 $\boldsymbol{U}=\{U(y),\ 0,\ 0\}^{\mathrm{T}}$. 在(2.3)式中消去 p_{c},可得

$$\tilde{L}_0 v_{\mathrm{c}}=F_0, \tag{2.4a}$$

$$\tilde{L}_1\left(\frac{\partial u_{\mathrm{c}}}{\partial z}-\frac{\partial w_{\mathrm{c}}}{\partial x}\right)=U'\frac{\partial v_{\mathrm{c}}}{\partial z}+F_1, \tag{2.4b}$$

$$\frac{\partial u_{\mathrm{c}}}{\partial x}+\frac{\partial w_{\mathrm{c}}}{\partial z}=-\frac{\partial v_{\mathrm{c}}}{\partial y}, \tag{2.4c}$$

其中

$$\tilde{L}_0\equiv\left(\frac{1}{R}\nabla^2-\frac{\partial}{\partial t}-U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2+U''\frac{\partial}{\partial x},$$

$$\tilde{L}_1\equiv\left(\frac{1}{R}\nabla^2-\frac{\partial}{\partial t}-U\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$F_0=\nabla^2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\cdot\nabla v_{\mathrm{c}})-\frac{\partial}{\partial y}\nabla\cdot(\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}),$$

$$F_1=\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\cdot\nabla u_{\mathrm{c}})-\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\cdot\nabla w_{\mathrm{c}}).$$

方程(2.4(a)—2.4(c))为相干结构引起的扰动速度所满足的方程.

如前所述,由于猝发过程是Reynold应力的主要贡献者,因而在猝发过程的间歇期间,近壁区应由粘性起主要作用,从而其瞬时速度剖面不如湍流平均速度剖面丰满. 而相干结构正

是在这种条件下发生、发展而导致猝发，从而引起强烈的法向的流体动量交换，使速度剖面变得丰满，且在一段时间内比湍流平均速度剖面丰满．而在长期平均下就得到通常的平均速度剖面．这一过程实际上可从实验中观察到．

近壁区相干结构最活跃部分集中在 $y^+<100$ 的底层，这里 y^+ 是以粘性长度度量的法向坐标．因此，在这一范围内我们用在 y 向压缩了的部分 Blasius 剖面，并使之与外部湍流边界层的平均速度剖面—— Spalding 所给的剖面，在某一适当位置，如 $y^+=100$ 处光滑相接，以构成基本流速度剖面．应该说，这种速度分布并不满足 N-S 方程，所以严格讲，(2.3)式只是一个近似的方程．

在文献[7] 中已用了这种剖面和共振三波，但用的仍是一个二维 T-S 波和一对斜的亚谐 T-S 波．这在与转换实验比较时是可行的，因为在转换实验中多半是人为地引进一个二维波．但对在背景湍流之上发展起来的相干结构，就不太切合实际．因此，我们选取更一般的，由三个斜 T-S 波组成的共振三波作为研究对象．当然，一个二维和一对三维 T-S 波是它的一个特例．这样，我们将基本扰动波写成

$$\boldsymbol{u}_{c1}=A_1\boldsymbol{u}_1e^{i\theta_1}+A_2\boldsymbol{u}_2e^{i\theta_2}+A_3\boldsymbol{u}_3e^{i\theta_3}+\text{c.c.}, \tag{2.5}$$

其中 $\theta_j=\alpha_j x+\beta_j z-\omega_{jr}t$，$j=1,\ 2,\ 3$．$A_j$ 为复数幅值，是时间的函数．到一阶近似时有 $\mathrm{d}A_j/\mathrm{d}t=\omega_{ji}A_j$，$\mathrm{d}\theta_j/\mathrm{d}t=-\omega_{jr}$．以上角标 1，2，3 分别指在 α-β 平面内波矢位于中间，左边及右边的波，r 及 i 分别指复数的实数及虚数部分，c.c. 指共轭复数．

形成共振三波的条件是 $\theta_1=\theta_2+\theta_3$，亦即

$$\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_1=\beta_2+\beta_3,\ \omega_{1r}=\omega_{2r}+\omega_{3r}. \tag{2.6}$$

三个波可以有不同的相速度，但任两个的非线性作用将产生其相速度与第三个波的相同的驱动项，从而保持能量传递的关系不变．

这种一般的共振三波，在给定其中任意一个的波矢后，满足共振条件的另两个波，其波矢及频率有一连续谱．而在对称情况下，则由于亚谐的条件限制，在给定二维波后，另一对三维波参数是唯一的．

在线性情况下，一般这三个波都是衰减的．必须考虑非线性影响，而 A_j 等就将满足 Landau 型的演化方程

$$\frac{\mathrm{d}A_j}{\mathrm{d}t}=\omega_{ji}A_j+\text{非线性项},\quad \frac{\mathrm{d}\theta_j}{\mathrm{d}t}=-\omega_{jr}+\text{非线性项}, \tag{2.7}$$

其具体形式，将在求解过程中确定．

若将 $\boldsymbol{u}_{c1}$ 代入(2.4)式的非线性项，则可推出二阶扰动应取以下形式

$$\boldsymbol{u}_{c2}=\sum_{j,\,k=1}^{3}A_jA_k\boldsymbol{u}_{jk}e^{i(\theta_j+\theta_k)}+A_jA^*_k\bar{\boldsymbol{u}}_{jk}e^{i(\theta_j-\theta_k)}+\text{c.c.}, \tag{2.8}$$

其中角标 * 表示共轭复数．但在实际计算中，(2.8)式的各项指数函数真正独立的只有 12 项(不计 c.c.)．而与 $\boldsymbol{u}_{23}$，$\bar{\boldsymbol{u}}_{13}$，$\bar{\boldsymbol{u}}_{12}$ 相关的指数函数与 $\boldsymbol{u}_{c1}$ 中的相同，因而在求解时需应用可解条件确定(2.7)式中的各项．

在文献[14] 中已论述，只有在线性化扰动方程中对 t 的导数利用(2.7)式来求，并将由(2.7)式的非线性项带来的高阶项(对 A_j 而言)移至相应的高阶方程中．而在高阶扰动方程中

对 t 的导数则是直接计算的，而且高阶波的形状是变化的，因而应写为

$$\boldsymbol{u}_{jk}=\boldsymbol{u}_{jk}(y,t),$$

它将满足一偏微分方程而构成初边值问题.

定义以下算子:

$$L(\alpha,\ \beta)=D^2-(\alpha^2+\beta^2),$$

$$L_1(\alpha,\ \beta,\ \omega)=\frac{1}{R}\ L(\alpha,\ \beta)+\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}\alpha U,$$

$$L_0(\alpha,\ \beta,\ \omega)=L_1(\alpha,\ \beta,\ \omega)L(\alpha,\ \beta)+\mathrm{i}\alpha U'',$$

$$\begin{aligned}
&f_0(\alpha_j+\alpha_k,\ \beta_j+\beta_k,\ \boldsymbol{u}_j,\ \boldsymbol{u}_k)\\
&\quad=-D^2[\mathrm{i}\alpha(v_ju_k+u_jv_k)+\mathrm{i}\beta(v_jw_k+v_kw_j)]\\
&\qquad-2D[\alpha^2(v_jv_k-u_ju_k)+\beta^2(v_jv_k-w_jw_k)-\alpha\beta(u_jw_k+w_ju_k)]\\
&\qquad-(\alpha^2+\beta^2)[\mathrm{i}\alpha(u_jv_k+u_kv_j)+\mathrm{i}\beta(w_jv_k+w_kv_j)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_1(\alpha_j+\alpha_k,\ \beta_j+\beta_k,\ \boldsymbol{u}_j,\ \boldsymbol{u}_k)\\
&\quad=D[\mathrm{i}\beta(u_jv_k+u_kv_j)-\mathrm{i}\alpha(u_jw_k+u_kw_j)]\\
&\qquad+\alpha^2(u_jw_k+u_kw_j)-\beta^2(w_ju_k+w_ku_j)+2\alpha\beta(w_jw_k-u_ju_k),
\end{aligned}$$

其中 $D\equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}y$.

不难导出 $\boldsymbol{u}_{jk}$ 等满足的方程. 例如对 $\boldsymbol{u}_{13}$ 有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\ L(\alpha_1+\alpha_3,\ \beta_1+\beta_3)v_{13}=L_0\left(\alpha_1+\alpha_3,\ \beta_1+\beta_3,\ \omega_{1r}+\omega_{3r}+\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}(A_1A_3)}{A_1A_3\mathrm{d}t}\right)v_{13}\\
&\qquad\qquad-f_0(\alpha_1+\alpha_3,\ \beta_1+\beta_3,\ \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_3),\\
&\frac{\partial}{\partial t}\ \xi_{13}=L_1\left(\alpha_1+\alpha_3,\ \beta_1+\beta_3,\ \omega_{1r}+\omega_{3r}+\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}(A_1A_3)}{A_1A_3\mathrm{d}t}\right)\xi_{13}\\
&\qquad\qquad-\mathrm{i}(\beta_1+\beta_3)U'v_{13}-f_1(\alpha_1+\alpha_3,\ \beta_1+\beta_3,\ \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_3),\\
&\qquad\qquad\mathrm{i}(\alpha_1+\alpha_3)u_{13}+\mathrm{i}(\beta_1+\beta_3)w_{13}+Dv_{13}=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(2.9)$$

其中 $\xi_{13}=\mathrm{i}(\beta_1+\beta_3)u_{13}-\mathrm{i}(\alpha_1+\alpha_3)w_{13}$. 解这一类方程无需可解条件.

对 $\boldsymbol{u}_{23}$, $\overline{\boldsymbol{u}}_{13}$, $\overline{\boldsymbol{u}}_{12}$ 等，则类似于(2.9)式的第一个方程右端将多出一项由(2.7)式的非线性项带来的项，它是在线性(即一阶)扰动方程中求对 t 的导数时利用(2.7)式时相应地移下来的. 例如，对 $\boldsymbol{u}_{23}$，其与(2.9)式第一式对应的方程为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\ L(\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_2+\beta_3)v_{23}=L_0\left(\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_2+\beta_3,\ \omega_{2r}+\omega_{3r}+\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}(A_2A_3)}{A_2A_3\mathrm{d}t}\right)v_{23}\\
&\qquad-[f_0(\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_2+\beta_3,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)+Q_{23}L(\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_2+\beta_3)v_1].
\end{aligned}\qquad(2.10)$$

而 $\bar{u}_{jj}$ 这类相当于平均流修正满足的方程则为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}_{jj}=-\frac{\mathrm{d}(A_jA_j^*)}{A_jA_j^*\mathrm{d}t}\bar{u}_{jj}+\frac{1}{R}D^2\bar{u}_{jj}-D(v_ju_j^*+u_jv_j^*),\\
&\frac{\partial}{\partial t}\bar{w}_{jj}=-\frac{\mathrm{d}(A_jA_j^*)}{A_jA_j^*\mathrm{d}t}\bar{w}_{jj}+\frac{1}{R}D^2\bar{w}_{jj}-D(w_j^*v_j+w_jv_j^*),\\
&\bar{v}_{jj}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(2.11)$$

所有这些未知函数都满足如下初边值条件：

$$\boldsymbol{u}_{jk}(y,\ 0)=0,\ y=0\text{ 及 }y\text{ 大时 }\boldsymbol{u}_{jk}=0.$$

解出 $\boldsymbol{u}_{c2}$ 后，还可以导出相应的三阶扰动项，而在三阶扰动项中，同样会出现其指数函数与 $\boldsymbol{u}_{c1}$ 中的相同的项．而在求解这些项时，又将要利用可解条件确定相应的 (2.7) 式中的非线性项．到三阶为止，可以得相应的 Landau 方程如下：

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}=\omega_{1i}A_1+Q_{23}A_2A_3+Q_{131}A_1^2A_1^*+Q_{231}A_1A_2A_2^*+Q_{331}A_1A_3A_3^*,\\
&\frac{\mathrm{d}A_j}{\mathrm{d}t}=\omega_{ji}A_j+Q_{1j}A_1A_j^*+Q_{13j}A_j^2A_j^*+Q_{23j}A_1A_1^*A_j+Q_{33j}A_jA_kA_k^*,\\
&\qquad j=2,\ 3,\ k=3,\text{ 当 }j=2,k=2,\text{ 当 }j=3.
\end{aligned}\qquad(2.12)$$

注意，这里和原弱非线性理论中的一个很大的区别是从 (2.9)—(2.12) 式是联立求解的，(2.12) 式中的诸系数 Q 等是时间的函数．

在具体计算时，先设定 $\boldsymbol{u}_{c1}$ 中一个波的波矢，寻找满足共振条件的另两个波的波矢，求出这些基本波，就可进行上述计算．由 (2.12) 式的积分，可知这些扰动波是否会迅速增长．满足一定增长条件的波就认为能形成相干结构，可进一步考虑其流场形态，再按照类似于实验中的象限法判据，以判断是否对应于一种相干结构．如果是对应的，则可进一步计算其包含的涡对的环量差等．

为了计算简单，采用时间模式，其流场在 x-z 平面上是周期性的，由于相干结构的流向长度小于边界层厚度，在此范围内边界层厚度增长很少，这样的假定其近似程度是可以接受的，我们只取一个周期内的流场与一个“事件”对应．为了减少计算量，我们参照实验及数值模拟结果所发现的相干结构平均流向尺度而固定 α_1．原则上，选择一组 β_1 及 α_2，可寻找满足共振条件的一组三波．先将找到的共振三波的 β_1-α_2 参数平面均匀地划分网格，对每一个网格点进行一次计算，求出其幅值演化规律，判断是否能形成相干结构，然后再进行综合分析．

3　计算结果及讨论

计算中取 $Re=\dfrac{U_0\delta}{\nu}=50000$，其中 U_0 为来流速度，δ 为湍流边界层厚度．基本流速度在 $y^+>100$ 处取 Spalding 速度型，$y^+<100$ 处，为法向坐标压缩后的 Blasius 剖面．先令两者在 $y^+=100$ 处光滑相接，即速度及其一阶导数连续，由此可决定 Blasius 剖面 y 向压缩比．然后在 $y^+=100$ 附近将剖面再次局部光滑化，使速度二阶导数也连续．这样的剖面在 $y^+<100$ 处满足边界层方程，在 $y^+>100$ 处则不满足 N-S 方程或其简化型式．但由于相干结构的最活跃部分

是在 $y^+\approx 10$—30 之间，所以外区的这种误差可能引起的后果不严重.

对这种剖面 $U_0/u_\tau=26.83$. 在解各阶 $\boldsymbol{u}_c$ 时，均令在 $y=0$ 及 $y^+=300$ 处以及 v 及 $\partial v/\partial y=0$，这种取法的合理性，在文献[6, 7]中讨论过. 在各阶方程中所用的 Reynolds 数 $R=U_0\delta_L^*/\nu=951.4$, δ_L^* 是经压缩后的 Blasius 剖面的排移厚度. 所有长度均以 δ_L^* 无量纲化. 由相干结构在流向的平均周期(实验及数值模拟结果)决定 $\alpha_1=0.6$. 在 β_1-α_2 平面中，网格点间距为 $\Delta\beta_1=0.05$, $\Delta\alpha_2=0.005$. 对每个网格点对应的参数，都可以找到一组共振三波. 表1给出了一些例子，对所有的情况，所取初值为 $\boldsymbol{A}_{10}=\boldsymbol{A}_{20}=\boldsymbol{A}_{30}=0.002$，而 $\boldsymbol{u}_j$ 则都按条件 $\max|\boldsymbol{u}_j|=1/2$ 正规化. 这相当于假定背景湍流场分解为 O-S 方程

$$\{[D^2-(\alpha^2+\beta^2)]^2-\mathrm{i}R[(D^2-(\alpha^2+\beta^2))(\alpha U-\omega)-\alpha^2U'']\}v=0 \tag{3.1}$$

的规一化的特征函数谱时，在有效波数范围内其谱是白噪声.

表1 给定 $\alpha_1=0.6$, $\beta_1=0.2$, $\omega_1=0.15845-0.02849\mathrm{i}$ 时与之对应的共振三波的其它两波的参数

α_2	β_2	ω_{2r}	ω_{2i}	α_3	β_3	ω_{3r}	ω_{3i}
0.51	−1.57353	0.12467	−0.04492	0.09	1.77353	0.03376	−0.01530
0.50	−1.64238	0.12213	−0.04498	0.10	1.84238	0.03632	−0.01675
0.49	−1.70541	0.11966	−0.04497	0.11	1.90541	0.03878	−0.01814
0.48	−1.76212	0.11727	−0.04487	0.12	1.96212	0.04117	−0.01946
0.47	−1.81337	0.11494	−0.04470	0.13	2.01337	0.04349	−0.02073
0.46	−1.85984	0.11266	−0.04446	0.14	2.05984	0.04576	−0.02194
0.45	−1.90215	0.11043	−0.04418	0.15	2.10215	0.04799	−0.02312
0.44	−1.94025	0.10824	−0.04385	0.16	2.14025	0.05017	−0.02425
0.43	−1.97264	0.10612	−0.04346	0.17	2.17264	0.05233	−0.02534
0.42	−2.00376	0.10400	−0.04303	0.18	2.20376	0.05444	−0.02640

按第2节中说明的方法，对每一组共振三波，积分到 $t=10$，计算 $t=10$ 时的 $H=\left(\sum_{j=1}^{3}|A_j|^2\right)^{1/2}$，$H$ 与 β_1, α_2 的关系示于图1中. 数值方法为：积分(2.12)用4阶 R-K 法，时间步长为 0.01，解方程(2.9)—(2.11)用 Crank-Nicolson 格式，时间步长为 0.1，在此时间间隔内，(2.12)式系数不变.

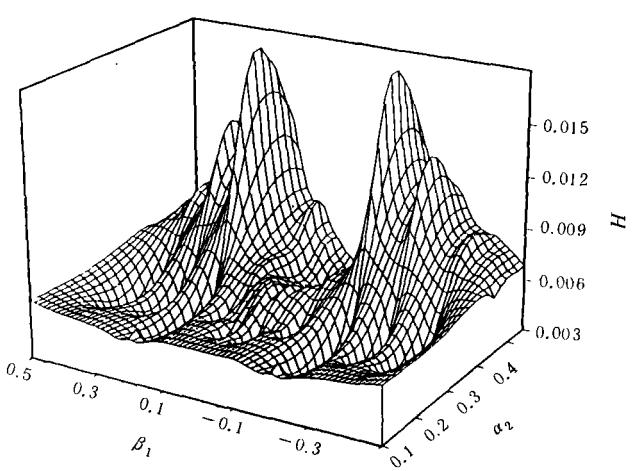

图1 $t=10$ 时 H 与 β_1 及 α_2 的关系

$\alpha_1=0.6$

从图 1 可见，H 增长最快的是非对称的，而对应于 $\beta_1 \approx \pm 0.2$, $\alpha_2 \approx 0.46$. 我们取 $H=0.015$ 为第一个判据. 凡 H 最终能超过 0.015 的均能接受第二次检测. 考察 $H=0.015$ 时，$y^+=25$ 平面上各点的 Reynold 应力为 $u_c v_c$. 结果发现在这些情况中，有 75% 其 $|u_c v_c|$ 的最大值属第二象限，即 $u_c<0$, $v_c>0$ 或称 Q_2 事件. 再选择一个阈值，凡在此 Q_2 事件中，$|u_c v_c|$ 大于此阈值者承认其对应一相干结构. 以此 $|u_c v_c|$ 取最大值之点作为 $z=0$ 之点，并作为通过此点的 y-z 平面中的流速分布图，则得典型图如图 2 如示. 与文献[8] 中一样，取四条不同的途径计算两边环量差 $\Delta\Gamma$, 并取单边的 $|\Gamma|$ 的平均值 Γ_{AV}, 发现途径 2 所给 Γ_{AV} 最大，与文献[8] 中一样，计算每一个相干结构的 $\Delta\Gamma$, 在整个 β_1-α_2 平面内，可检测到约 300 个相干结构，于是可得 $\Delta\Gamma/\Gamma_{AV}$ 的概率密度分布曲线，如图 3 中实线所示. 图 3 中还示出了文献[8] 中通过数值模拟而得的结果，可见两者定性是一致的. 还可算出相干结构的展向平均尺度 $\lambda_z^+ \approx 100$, 传播的相速度平均值约为 $11u_\tau$. 这些都与实验或数值模拟结果相近.

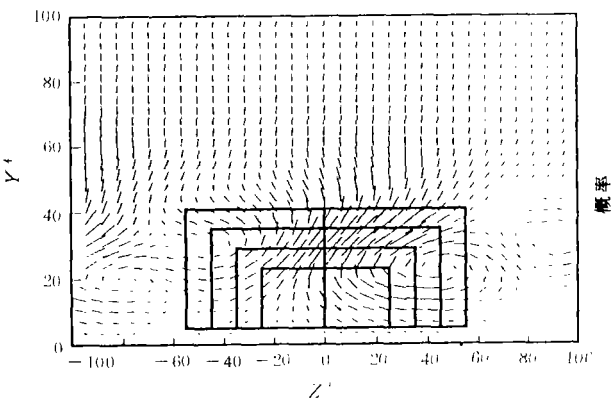

图 2　某一 Q_2 事件 y-z 截面的流速分布及求 Γ 路径
从里向外分别为路径 1、2、3、4

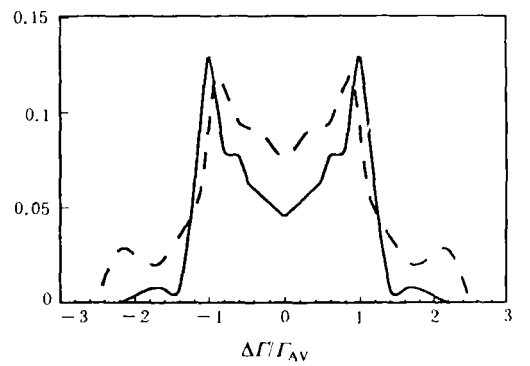

图 3　流向涡对环量差概率密度分布
实线为本文结果，虚线引自文献[8]

如果我们承认在 x-z 平面一个周期内的一个符合条件的事件代表一个相干结构，并承认偏左(相对于流向)与偏右的相干结构有可能相继出现(概率相等)，其典型的等涡量(流向涡量)面，如图 4 如示. 这也和 Hussain 从数值模拟结果引伸出来的图象很相近[16].

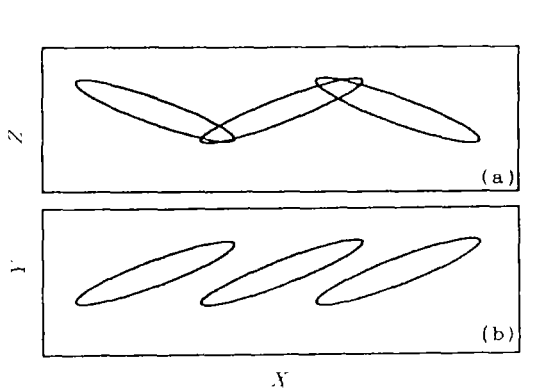

图 4　相干结构等涡量面示意图
(a) x-z 平面投影，(b) x-y 平面投影

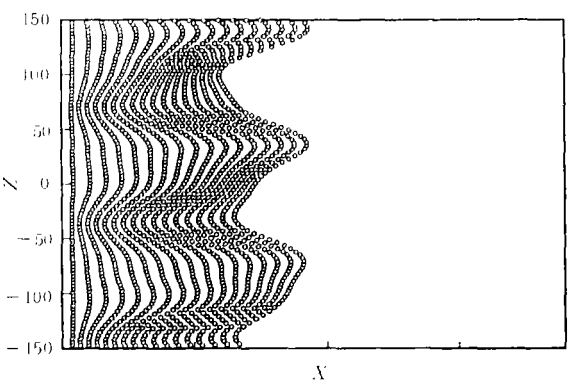

图 5　计算所得氢泡线

假设在 $y^+=25$ 处有一条氢泡线并计算间歇发送的氢泡线的位置，则可得快慢条纹线，如图5所示．从图5可见，快慢条纹已不再是纯流向的了．由于偏左或偏右方向的相干结构都可能产生，因而条纹是可以左右摆动的．以上各点说明本文理论模型具有合理性．

但在图3中我们所得曲线与文献[8]中所给曲线在定量上不十分一致．原因可能是：(1)文献[8]中对应的Reynolds数比我们的低一个数量级．其最活跃的地方是 $y^+=12$，所以检测的平面是 $y^+=12$，而我们则在 $y^+=25$ 处．(2)数值模拟可以反映充分非线性的事件，而我们只能算到 H 不太大的时侯．因而这可能是 $|\Gamma|$ 大的部分我们明显偏低的原因．(3)我们假定的基本流剖面只是近似的，一点也没有考虑小涡的涡粘作用，因而近壁区剖面可能比实际的更不饱满．(4)如前所述，我们假定背景湍流场展为O-S方程特征函数谱时，在 $\beta_1-\alpha_2$ 平面内相当于白噪声，与实际可能有一定差别．(5)我们的 Q_2 事件的判据受条件限制，无法与文献[8]中完全一致．

参 考 文 献

[1] Kline, S. J., Reynolds, P. W., Schraub, F. H. *et al.*, *J. Fluid Mech.*, 1967, **30**: 741—773.

[2] Cantwell, J., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1981, **13**: 457—515.

[3] Willmarth, W. W., *Phys. Fluids*, 1971, **20**: S9—21.

[4] Landahl, M. T., *J. Fluid Mech.*, 1967, **29**: 441—459.

[5] Jang, P. S., Benney, D. J., Gran, R. L., *J. Fluid Mech.*, 1986, **169**: 109—123.

[6] 周 恒，力学学报，1988, **20**: 481—488.

[7] Zhou, H., Luo, J. S., *Near Wall Turbulent Flow* (eds. So, R. M. C., Speziale, C. G., Launder, B. E.), Elsevier Science Publisher B. V., 1993, 537—546.

[8] Guezennec, Y. G., Piomelli, U., Kim, J., *Phys. Fluids*, 1989, **A1**(4): 764—766.

[9] Adrian, R. J., Moin, P., Moser, R. D., *Report CTR-S87*, Standford University. 7—19,

[10] Robinson, S. K., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1991, **23**: 601—639.

[11] Blackwelder, R. F., *Phys. Fluids*, 1983, **26**: 2807—2815.

[12] Zhou, H., *Chinese Science Bulletin*, 1991, **56**: 372—376.

[13] 周 恒，尤学一，中国科学，A辑，1992, **6**: 615—622.

[14] Zhou, H., You, X., *Acta Mechanica Sinica*, 1993, **9**: 1—12.

[15] Willmarth, W. W., Lu, S. S., *J. Fluid Mech.*, 1972, **55**: 65—92.

[16] Jeong, J., Hussain, F., *Proceedings of The Fijth Asian Congress of Fluid Mechanics*, 1992, 1262—1265.