中 国 科 学
1987 年 6 月　　A 辑　　第 6 期

非轴对称的磁流体静力学平衡

胡文瑞　　隆　辉
（中国科学院力学研究所，北京）

摘　　要

本文用摄动展开的方法分析了一类磁流体静力学的平衡，其中基态是轴对称的，并具有强的环向磁场分量，扰动态是非轴对称的．这就在扰动态的环向动量守衡关系中，引进了环向的 Lorentz 力分量．可以组建两类太阳黑子模型，一类的半影纤维内磁场较强，另一类的磁场较弱．后者尽管早有观测报道，但一直缺乏理论的解释．

一、引　　言

太阳黑子上发生的磁过程支配了太阳活动区的活动，因此对于太阳黑子磁场的研究引起了理论工作者和观测工作者的广泛兴趣．在理论方面，对于轴对称位形的研究已归结为求解一个偏微分方程的问题[1]，或者对于细长的磁力线管运用几何变量展开的方法[2]．或者为了与观测得到的黑子磁场相比较得到与实际观测吻合较好的非线性的相似解[3]．事实上，轴对称假定是为简化问题而使用的一种数学近似，这些模型无法概括磁场细微的环状结构．只能在某种意义上视作环向平均的模型．黑子的观测特征证实了环向结构的存在，因而有必要研究非轴对称的黑子磁场模型[4]．

在文献[5]中，我们运用摄动理论提出了几个模型来描述黑子磁力线管的非轴对称位形．其后胡文瑞曾讨论了另一个模型[6]，说明即便引入一个弱轴对称的环向分量，文献[6]中对黑子非轴对称磁场所得的结果仍然成立．由于磁张力的存在，磁场的强扭转分量对平衡态可能产生重要的影响．本文即要研究这一问题，特别是研究在半影纤维中磁压和热力学压力之间的关系．Becker 和 Schroter[7] 曾观测到在暗纤维中磁场相对较强，而 Matting 和 Mechltretter[8] 却得到相反的结果．这些观测可用非轴对称模型在理论上给予解释．对于没有或仅有较弱的环向分量的情形，过去的研究结果支持 Becker 和 Shroter 的结论．如考虑强扭转场则将改变在环向分量上的动量平衡关系．如果扭转量足够强，对 Matting 和 Mechltretter 的结论就可在理论上作出解释．

非轴对称的位形不仅在太阳黑子磁场，而且在许多场合下，例如大尺度的太阳和星际磁场中都可能发现，已有人对线性和非线性的情况作了分析[9,10]．非线性作为线性问题的推广会引起理论工作者的兴趣，近来已得到了一些结果[11,12]．本文把摄动理论进一步用于研究有强扭转分量的太阳黑子问题．

本文 1986 年 1 月 9 日收到，1986 年 10 月 10 日收到修改稿．

二、基本方程组

磁流体静力学方程组可以写为:

$$\frac{1}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}+\rho\boldsymbol{g}=\nabla p, \tag{2.1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{2.2}$$

$$p=\rho\mathscr{R}T, \tag{2.3}$$

p, ρ, T 分别是等离子体的压力、密度和温度. $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 分别是磁场强度和重力加速度,$\mathscr{R}$ 是气体常数. 我们考虑在轴对称基态上的非轴对称的扰动. 在柱坐标系中物理量可写为:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}(r,\theta,z)=\boldsymbol{B}_0(r,z)+\varepsilon\boldsymbol{B}_1(r,\theta,z),\\
&p(r,\theta,z)=p_0(r,z)+\varepsilon p_1(r,\theta,z),\\
&\rho(r,\theta,z)=\rho_0(r,z)+\varepsilon\rho_1(r,\theta,z),\\
&T(r,\theta,z)=T_0(r,z)+\varepsilon T_1(r,\theta,z),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 ε 是小参数. 基态的磁场通常可表为:

$$\boldsymbol{B}_0(r,z)=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial z},\ G_0(\psi_0),\ -\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right), \tag{2.5}$$

G_0 是 ψ_0 的任意函数,确定基态的非线性偏微分方程是

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right)+G_0\frac{dG_0}{d\psi_0}+4\pi r^2\frac{\partial p_0}{\partial z}=0. \tag{2.6}$$

这要求 p_0 满足下述关系:

$$p_0(\psi_0,z)=F_0(\psi_0)\exp\left\{-\int_0^z\frac{g\,dz}{\mathscr{R}T_0(\psi_0,z)}\right\}, \tag{2.7}$$

重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 为常量,其方向指向 $-\boldsymbol{e}_z$, 在 $G_0=0$ 的条件下, 由 (2.6) 式可得到文献[2]中的方程(9). 方程(2.6)的性质曾在对于函数 G_0, T_0 及 F_0 的不同的特殊假定下进行过研究,不同的模式得到不同的特解来说明这个非线性问题的特征.

把(2.4)式代入基本方程组(2.1)—(2.3)中,可得到扰动方程:

$$\frac{1}{4\pi}[(\nabla\times\boldsymbol{B}_1)\times\boldsymbol{B}_0+(\nabla\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{B}_1]+\rho_1\boldsymbol{g}=\nabla p_1, \tag{2.8}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_1=0, \tag{2.9}$$

$$\frac{T_1}{T_0}=\frac{p_1}{p_0}-\frac{\rho_1}{\rho_0}. \tag{2.10}$$

我们假定环向分量 $B_{1\theta}$ 与 θ 无关,由(2.9)式,可知扰动磁场可以表示为:

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z},\ G(r,z),\ -\frac{\partial\psi}{\partial r}\right). \tag{2.11}$$

因而在柱坐标系下方程(2.8)的三个分量方程是:

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\mathscr{L}(\psi)+\mathscr{L}(\psi_0)\frac{\partial\psi}{\partial r}+G_0\left(\frac{\partial G}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial z}\right)+\frac{\partial G_0}{\partial r}G+4\pi r^2\frac{\partial p_1}{\partial r}=0, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial(\psi_0,G)}{\partial(r,z)}-\frac{\partial(G_0,\psi)}{\partial(r,z)}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}+4\pi r^2p_1\right)=0, \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial z}\mathscr{L}(\psi)+\mathscr{L}(\psi_0)\frac{\partial \psi}{\partial z}+G_0\left(\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r}\right)$$
$$+\frac{\partial G_0}{\partial z}G+4\pi r^2\left(\rho_1 g+\frac{\partial p_1}{\partial z}\right)=0, \tag{2.14}$$

其中算子 $\mathscr{L}$ 被定义为：

$$\mathscr{L}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.15}$$

方程组 (2.12)—(2.14) 是具有最一般意义的扰动方程组．(2.13) 式左边的前两项给出沿着磁力线的磁张力，最后一项是扰动态总压梯度的 θ 方向的分量，当 $G_0 \neq 0$ 时，这一项通常不是零．这意味着磁场的扭转分量对于黑子的热力学结构可能产生重要影响，根据 B_θ 为零或很弱而得到的理论上的结论会因此得到进一步修正．

三、磁场和热力学参量之间的联系

具有较高分辨率的黑子照片显示了黑子磁场和热力学参量的分布，不仅具有如明暗相间的半影纤维状的三维结构，而且常常发现呈螺旋状的扭转结构．如果总压与 θ 无关，则有：

$$p_1+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1=W(r,z), \tag{3.1}$$

其中 $W(r,z)$ 是 r 和 z 的任意函数．在 r 与 z 固定的某一个圆上，如(3.1)式所示，较强的等离子体热压力是与较弱的磁压相对应的．故一般说来，磁场在较暗的半影纤维中较强．这个结论支持了 Becker 和 Schröter 的观测结果[7]．但注意(3.1)式仅在沿磁力线方向的磁应力为零，例如在没有磁场环向分量的情况下才能成立．因此，鉴于许多观测表明磁场的环向分量的存在，研究磁场扭转所产生的影响是十分必要的．而在这种条件下，有可能建立与 Matting 和 Mechltretter[8] 的观测结果相吻合的理论模型．

我们首先分析下列表达式的符号：

$$S=\frac{\partial p_1}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1\right), \tag{3.2}$$

S 的符号确定了与磁场相关的等离子体压力的环向变化趋势．光球层中，S 具有负值，则支持了 Beckers 和 Schroter 的结果；反之，S 具有正值，则支持了 Matting 和 Mechltretter 的结果．根据(2.13)式，有

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(p_1+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1\right)=\frac{1}{4\pi r}\left(\frac{\partial(G_0,\psi)}{\partial(r,z)}-\frac{\partial(\psi_0,G)}{\partial(r,z)}\right). \tag{3.3}$$

(3.3)式右端第一项通常是三个变量 r，θ，z 的函数，而第二项仅是 r，z 的函数．如磁场是弱扭转的，$G_0=0$，由(3.3)式可得到：

$$p_1+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1=-\frac{1}{4\pi r}W_1(r,z)\theta+W(r,z), \tag{3.4}$$

其中 $W_1=\dfrac{\partial(\psi_0,G)}{\partial(r,z)}$，$W(r,z)$ 是任意函数．由于(3.4)式左端是 θ 的周期函数，右端也应是 θ 的周期函数，这要求 $W_1(r,z)=0$．即得到(3.1)式，这表明即使引入弱扭转关系也无法改变等离子体压力和磁压的环向变化趋势，S 为正的必要条件是磁场呈强扭转．

由于扰动量是 θ 的周期函数，可以把它们写为下列表达式：

$$p_1(r,\theta,z) = p^{(0)}(r,z) + \sum_{n=1}^{\infty} [p_c^{(n)}(r,z)\cos(n\theta) + p_s^{(n)}(r,z)\sin(n\theta)], \tag{3.5}$$

$$\psi(r,\theta,z) = \psi^{(0)}(r,z) + \sum_{n=1}^{\infty} [\psi_c^{(n)}(r,z)\cos(n\theta) + \psi_s^{(n)}(r,z)\sin(n\theta)]. \tag{3.6}$$

对 T_1 和 ρ_1 可做出类似的表达式. 把以上诸式代入基本方程组 (2.12)—(2.14)，对第 n 次谐波得到一系列只含 r 和 z 的方程.

对扰动态的对称部分，有

$$\frac{\partial(G_0,\psi^{(0)})}{\partial(r,z)} = \frac{\partial(\psi_0,G)}{\partial(r,z)}, \tag{3.7}$$

$$G_0\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial G_0}{\partial r}G + 4\pi r^2\frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial\psi_0}{\partial r}\mathscr{L}(\psi^{(0)}) + \frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial r}\mathscr{L}(\psi_0) = 0, \tag{3.8}$$

$$G_0\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G_0}{\partial z}G + 4\pi r^2\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial\psi_0}{\partial z}\mathscr{L}(\psi^{(0)}) + \frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial z}\mathscr{L}(\psi_0) = -4\pi r^2\rho^{(0)}g. \tag{3.9}$$

当基态量 ψ_0，G_0 和环向分量 G 给定后，$p^{(0)}$，$\psi^{(0)}$ 和 $\rho^{(0)}$ 即可由 (3.7)—(3.9) 式决定. 由于在此我们仅对扰动态的非轴对称部分感兴趣，可令所有的对称部分的未知量为零而不失其一般性.

对扰动态的非轴对称部分，方程为：

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\mathscr{L}(\psi_c^{(n)}) + \mathscr{L}(\psi_0)\frac{\partial\psi_c^{(n)}}{\partial r} - \frac{G_0 n}{r}\frac{\partial\psi_s^{(n)}}{\partial z} + 4\pi r^2\frac{\partial p_c^{(n)}}{\partial r} = 0, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\mathscr{L}(\psi_s^{(n)}) + \mathscr{L}(\psi_0)\frac{\partial\psi_s^{(n)}}{\partial r} + \frac{G_0 n}{r}\frac{\partial\psi_c^{(n)}}{\partial z} + 4\pi r^2\frac{\partial p_s^{(n)}}{\partial r} = 0, \tag{3.11}$$

$$p_c^{(n)} = -\frac{1}{4\pi r}\left[\frac{1}{n}\frac{\partial(G_0,\psi_s^{(n)})}{\partial(r,z)} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\frac{\partial\psi_c^{(n)}}{\partial r} + \frac{\partial\psi_0}{\partial z}\frac{\partial\psi_c^{(n)}}{\partial z}\right)\right], \tag{3.12}$$

$$p_s^{(n)} = +\frac{1}{4\pi r}\left[\frac{1}{n}\frac{\partial(G_0,\psi_c^{(n)})}{\partial(r,z)} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\frac{\partial\psi_s^{(n)}}{\partial r} + \frac{\partial\psi_0}{\partial z}\frac{\partial\psi_s^{(n)}}{\partial z}\right)\right]. \tag{3.13}$$

通过适当的整理，可分别得到扰动磁势 $\psi_c^{(n)}$ 及 $\psi_s^{(n)}$ 的方程为：

$$\mathscr{L}_1^{(n)}(\psi_c^{(n)}) = \mathscr{L}_2^{(n)}(\psi_s^{(n)}), \tag{3.14}$$

$$\mathscr{L}_1^{(n)}(\psi_s^{(n)}) = -\mathscr{L}_2^{(n)}(\psi_c^{(n)}), \tag{3.15}$$

其中

$$\mathscr{L}_1^{(n)} = a_1\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z} + b_1\frac{\partial^2}{\partial z^2} + c_1\frac{\partial}{\partial r} + d_1\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.16}$$

$$\mathscr{L}_2^{(n)} = a_2^{(n)}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z} + b_2^{(n)}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + c_2^{(n)}\frac{\partial}{\partial r} + d_2^{(n)}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.17}$$

算子表达式的各系数是：

$$a_1 = -\frac{\partial\psi_0}{\partial z},\quad b_1 = \frac{\partial\psi_0}{\partial r},\quad c_1 = \frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2},\quad d_1 = \frac{2}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^2\psi_0}{\partial r\,\partial z},$$

$$a_2^{(n)} = \frac{r}{n}\frac{\partial G_0}{\partial r}, \quad b_2^{(n)} = -\frac{r}{n}\frac{\partial G_0}{\partial z},$$

$$c_2^{(n)} = \frac{1}{n}\frac{dG_0}{d\phi_0}\left[\frac{\partial \phi_0}{\partial z} + r\left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r \partial z}\right)\right] - \frac{r}{n}\frac{d^2 G_0}{d\phi_0^2}\frac{\partial \phi_0}{\partial r}\frac{\partial \phi_0}{\partial z},$$

$$d_2^{(n)} = \frac{nG_0}{r} - \frac{1}{n}\frac{dG_0}{d\phi_0}\frac{\partial \phi_0}{\partial r} + \frac{r}{n}\frac{d^2 G_0}{d\phi_0^2}\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial r}\right)^2. \tag{3.18}$$

如基态给定，即可求得 $\phi_c^{(n)}$ 及 $\phi_s^{(n)}$. 并进一步可由 (3.12), (3.13) 式得到磁场与热力学参量之间的关系.

现在回过头来讨论条件(3.2)式，把(3.5)和(3.6)式代入(3.2)式，对于固定的 n，可得

$$S = \left(\frac{n}{4\pi r^2}\right)^2 [(\alpha_n^2 + \beta_n^2)(\gamma_n^2 + \delta_n^2)]^{\frac{1}{2}} \sin(n\theta + \varphi_{1n}) \sin(n\theta + \varphi_{2n}), \tag{3.19}$$

其中

$$\alpha_n = \frac{\partial \phi_0}{\partial r}\frac{\partial \phi_s^{(n)}}{\partial r} + \frac{\partial \phi_0}{\partial z}\frac{\partial \phi_s^{(n)}}{\partial z},$$

$$\beta_n = -\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial r}\frac{\partial \phi_c^{(n)}}{\partial r} + \frac{\partial \phi_0}{\partial z}\frac{\partial \phi_c^{(n)}}{\partial z}\right),$$

$$\gamma_n = \frac{r}{n}\frac{\partial(G_0, \phi_c^{(n)})}{\partial(r, z)} - \frac{\partial \phi_0}{\partial r}\frac{\partial \phi_s^{(n)}}{\partial r} - \frac{\partial \phi_0}{\partial z}\frac{\partial \phi_s^{(n)}}{\partial z},$$

$$\delta_n = \frac{r}{n}\frac{\partial(G_0, \phi_s^{(n)})}{\partial(r, z)} - \frac{\partial \phi_0}{\partial r}\frac{\partial \phi_c^{(n)}}{\partial r} - \frac{\partial \phi_0}{\partial z}\frac{\partial \phi_c^{(n)}}{\partial z},$$

$$\varphi_{1n} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\alpha_n}{\beta_n},$$

$$\varphi_{2n} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\gamma_n}{\delta_n}. \tag{3.20}$$

值得注意的是，S 的符号由因子 $\sin(n\theta + \varphi_{1n})\sin(n\theta + \varphi_{2n})$ 决定，这说明强磁场区域处等离子体压力可大可小，更进一步说，S 的符号在不同的角向区域中会有所不同.

四、扰动磁场

扰动磁场服从(3.14), (3.15)式，为简便起见，讨论仅有 n 次谐波分量的情形，设

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \tag{4.1}$$

其中 ϕ 与 $\phi_c^{(n)}$ 和 $\phi_s^{(n)}$ 的关系是：

$$\phi = \phi_c^{(n)} + i\phi_s^{(n)}, \tag{4.2}$$

则方程(3.14)和(3.15)可以化成复系数的一阶线性偏微分方程组，即

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{a_1}{b_1}\frac{\partial u}{\partial z} - i\left(\frac{a_2}{b_1}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{b_2}{b_1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \left(\frac{c_1}{b_1} + i\frac{c_2}{b_1}\right)u + \left(\frac{d_1}{b_1} + i\frac{d_2}{b_1}\right)v, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial r}, \tag{4.4}$$

这组方程有两个特征根. 不难验证，在一般情况下，一对特征根是复数，方程组是椭圆型的；而当 $G_0 = 0$ 时，一对特征根都是实数，方程组是双曲型的. 对于不同类型的方程组，在数学上

应该提出不同的边值问题.

在这一节中,我们将组建两种类型的解,它们都有较强的环向磁场分量,但是可以分别对应于文献[7]和[8]所观测到的两种不同情况. 从力的平衡来看,没有环向磁场时,总压守恒要求高压区的磁场较弱;而环向分量引进的张力将平衡总压的梯度,使环向的总压不守恒,从而高压区也可能对应较强的磁场.

首先讨论的一种情况是,我们取

$$\psi(r,\theta,z)=\Psi[\psi_0(r,z),\theta], \tag{4.5}$$

这时就有

$$\frac{\partial(G_0,\psi)}{\partial(r,z)}=0. \tag{4.6}$$

此时,方程(2.13)归结为关系式(3.1),这表明在这些模式中等离子体压力越高,磁场越弱. 如在文献[5]中一样,我们消去(3.1)式右端的 $W(r,z)$,把 p_1 代入(2.12)式,可得到确定 ψ 的方程:

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}+\left(\frac{2}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial z}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r\partial z}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{G_0}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial z}=0. \tag{4.7}$$

方程(4.7)可化为文献[5]的方程(19),如果(4.7)式左端的最后一项为零的话.

如假设 $G_0=\alpha\psi_0$,则可通过变量分离法求方程(4.7)的解. 令

$$\psi_0=R_0(r)\exp(-k_0z), \tag{4.8}$$

$$\psi=R(r,\theta)\exp(-kz), \tag{4.9}$$

方程(4.7)式可写作

$$\left(1-\frac{k}{k_0}\right)\frac{\partial\ln R(r,\theta)}{\partial r}+\frac{k\alpha}{k_0^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\ln R(r,\theta)}{\partial\theta}=-\left[\frac{k}{k_0}-\left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right]\frac{R_0'}{R_0}-\frac{2k}{k_0}\frac{1}{r}, \tag{4.10}$$

其中上标"′"认为对变量 r 的微商,(4.10)式的特征方程为:

$$\frac{dr}{1-k/k_0}=\frac{d\theta}{\frac{k\alpha}{k_0^2}\frac{1}{r}}=\frac{d\ln R(r,\theta)}{\left[\frac{k}{k_0}-\left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right]\frac{R_0'}{R_0}-\frac{2k}{k_0}\frac{1}{r}}, \tag{4.11}$$

该方程有两个首次积分

$$\frac{k\alpha}{k_0(k_0-k)}\ln r-\theta=C_1, \tag{4.12}$$

$$R(r,\theta)r^{\frac{2k}{k_0-k}}\cdot R_0(r)^{-k/k_0}=c_2. \tag{4.13}$$

由(4.12),(4.13)式,得方程(4.10)的通解为:

$$R(r,\theta)=R_0(r)^{k/k_0}r^{2k/(k-k_0)}F_1\left(\theta-\frac{k\alpha}{k_0(k_0-k)}\ln r\right), \tag{4.14}$$

F_1 是变量的任意函数,应由边界条件确定. 很明显,比无环向分量或仅有弱环向分量的情形[6],方程(4.10)的解(4.14)式具有更为一般的形式. 特别是,如果令

$$R_0(r) = \frac{1}{2} B_0 r^2 \exp(-r). \tag{4.15}$$

并取 $\alpha = 0$，即可得文献[5]中例 3. 所有这些例子都满足条件 (3.1) 式，因而它们支持了 Beckers 和 Schreter 的观测.

现在，我们来讨论另外一种情况，这时的磁力线在环向的张力对平衡位形有重要的影响. 我们讨论一类级数解，记

$$u(r,z) = \sum u^{(m)}(r) z^m, \tag{4.16}$$

$$v(r,z) = \sum{}' v^{(m)}(r) z^m. \tag{4.17}$$

我们只限于讨论光球层附近的情况，所以 z 的延展宽度相对地较小. 不妨取 $z = 0$ 为光球层的底部边界，$z = l$ 为光球层的顶部边界. 作为椭圆型方程组的一个完整的数学问题，我们需要提出确定的边界条件，它们可以写成

$$\begin{cases} u(r,0) = u_0(r), \ u(r,l) = u_l(r), \\ v(r,0) = v_0(r), \ v(r,l) = v_l(r), \\ u(\infty,z) \to 0, \ v(\infty,z) \to 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

考虑到(4.16)和(4.17)式，不难看出，

$$u^{(0)}(r) = u_0(r), \ v^{(0)}(r) = v_0(r),$$

即可得到级数(4.16)和(4.17)式之零阶项. 我们讨论一类特定的边值，即

$$u(r,l) = \sum u^{(m)} l^m,$$

$$v(r,l) = \sum v^{(m)} l^m,$$

其中 l 是比径向的典型尺度 r_* 小得多的长度. 将级数表达式(4.16)和(4.17)式代入基本方程(4.4)和(4.5)，可以导出 $u^{(m)}$ 和 $v^{(m)}$ 的方程为：

$$u^{(m+1)} = -\frac{1}{m+1} \frac{dv^{(m)}}{dr}, \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} v^{(m+1)} = & -\frac{1}{(m+1) b_1^{(0)}} \Bigg[\sum_{k=0}^{m} \frac{dv^{(k)}}{dr} a_1^{(m-k)} \\ & + \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) v^{(k+1)} b_1^{(m-k)} + i \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{dv^{(k)}}{dr} a_2^{(m-k)} + \frac{du^{(k)}}{dr} b_2^{(m-k)} \right) \\ & + \sum_{k=0}^{m} u^{(k)} (c_1^{(m-k)} + i c_2^{(m-k)}) + \sum_{k=0}^{m} v^{(k)} (d_1^{(m-k)} + i d_2^{(m-k)}) \Bigg], \end{aligned} \tag{4.20}$$

其中 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ 都可写为与 u 和 v 类似的展开式. 最低阶的关系是：

$$u^{(1)} = \frac{dv^{(0)}}{dr}, \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} v^{(1)} = & -\frac{1}{b_1^{(0)}} \left[a_1^{(0)} \frac{dv^{(0)}}{dr} + i \left(\frac{dv^{(0)}}{dr} a_2^{(0)} + \frac{du^{(0)}}{dr} b_2^{(0)} \right) \right. \\ & \left. + u^{(0)} (c_1^{(0)} + i c_2^{(0)}) + v^{(0)} (d_1^{(0)} + i d_2^{(0)}) \right], \end{aligned} \tag{4.22}$$

具有附标“0”的量给出对应的量在 $z = 0$ 时的分布.

引入无量纲量：

$$\xi=\frac{r}{r_*},\ \zeta=\frac{z}{r_*},\ \Psi=\phi/B_*r_*^2,\ \Omega=G_0/B_*r_*,\ \bar{u}=u/B_*r_*,\ \bar{v}=v/B_*r_*. \tag{4.23}$$

附标"*"是对应的参量的典型值，$\bar{u}^{(m)}$ 和 $\bar{v}^{(m)}$ 的方程与(4.19),(4.20)式类似，仔细地建立下述模型，设

$$\Psi_0=\exp(-k_1^2\xi^2e^{-\zeta}), \tag{4.24}$$

$$\Omega=\Psi_0\ln\Psi_0. \tag{4.25}$$

磁势函数(4.24)式与文献[5]中(29)式相同，将 (4.24),(4.25) 式代入(3.18)式，对确定的谐波数 n，可得：

$$\frac{a_1}{B_*r_*}=-\xi,\ \frac{b_1}{B_*r_*}=-2,\ \frac{c_1}{B_*}=\xi(k_1^2\xi^2e^{-\zeta}-1),$$

$$\frac{d_1}{B_*}=2k_1^2\xi^2e^{-\zeta},\ \frac{a_2}{B_*r_*}=\frac{2\xi}{n}(k_1^2\xi^2e^{-\zeta}-1),$$

$$\frac{b_2}{B_*r_*}=\frac{\xi^2}{n}[k_1^2\xi^2e^{-\zeta}-1],\ \frac{c_2}{B_*}=\frac{1}{n}[(\xi+2)(3k_1^2\xi^2e^{-\zeta}-2k_1^4\xi^4e^{-2\zeta}-1)+2k_1^2\xi^3e^{-\zeta}],$$

$$\frac{d_2}{B_*}=\frac{2}{n}(1+k_1^2\xi^2e^{-\zeta})-n. \tag{4.26}$$

考虑到对扰动量正则性的要求，取

$$\bar{v}^{(0)}=\xi^2\exp(-hk_1^2\xi^2),\ h>1. \tag{4.27}$$

容易发现为满足 $z=0$ 时，$S>0$ 的条件，需要

$$i\frac{r}{n}\frac{\partial(G_0,\phi)}{\partial(r,z)}\Big|_{z=0}=s\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial r}u+\frac{\partial\phi_0}{\partial z}v\right)\Big|_{z=0},\quad s>1, \tag{4.28}$$

满足(4.28)式的 $\bar{u}^{(0)}$，可由此确定为：

$$\bar{u}^{(0)}=\left(\frac{i\frac{\xi}{n}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}-s\frac{\partial\Psi_0}{\partial\zeta}}{s\frac{\partial\Psi_0}{\partial\xi}+i\frac{\xi}{n}\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}}\right)_{\zeta=0}\cdot\bar{v}^{(0)}. \tag{4.29}$$

$\bar{u}^{(1)}$ 和 $\bar{v}^{(1)}$ 可由此从(4.21),(4.22)式中解出.

如果选 r_* 为黑子的半径，它比光球层的厚度大得多．在此我们仅对光球层中 $0\leqslant\zeta\leqslant b$ 很薄的一层内黑子半影的特征感兴趣，通过适当的整理，记

$$\bar{u}^{(0)}=\bar{u}_r^{(0)}+i\bar{u}_i^{(0)},\ \bar{v}^{(0)}=\bar{v}_r^{(0)}+i\bar{v}_i^{(0)},$$

$$\bar{u}^{(1)}=\bar{u}_r^{(1)}+i\bar{u}_i^{(1)},\ \bar{v}^{(1)}=\bar{v}_r^{(1)}+i\bar{v}_i^{(1)}. \tag{4.30}$$

扰动态的等离子体压力和磁压在 $z=0$ 到 $z=b$ 的区域中的平均值可由此表为：

$$P_1=\frac{p_1}{\phi_*^2/4\pi r_*^2}=\frac{1}{n\xi}\left\{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\right)_0\bar{u}_i^{(0)}-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right)_0\bar{v}_i^{(0)}+\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\right)_0\bar{u}_i^{(1)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right)_0\bar{v}_i^{(1)}+\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\zeta^2}\right)_0\bar{u}_i^{(0)}-\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi\partial\zeta}\right)_0\bar{v}_i^{(0)}\right]\frac{b}{2}\right\}\cos(n\theta)$$

$$+\frac{1}{n\xi}\left\{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right)_0\bar{v}_r^{(0)}-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\right)_0\bar{u}_r^{(0)}+\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right)_0\bar{v}_r^{(1)}-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\right)_0\bar{u}_r^{(1)}\right.\right.$$

$$+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi\partial\zeta}\right)_0\bar{v}_r^{(0)}-\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial\zeta^2}\right)_0\bar{u}_r^{(0)}\Big]\frac{b}{2}\Big\}\sin(n\theta)-\frac{\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1}{\phi_*^2/r_*^2}, \tag{4.31}$$

$$P_m=\frac{\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1}{\phi_*^2/r_*^2}=\frac{1}{\xi^2}\Big\{\Big(\frac{\partial\Psi_0}{\partial\xi}\Big)_0\bar{u}_r^{(0)}+\Big(\frac{\partial\Psi_0}{\partial\zeta}\Big)_0\bar{v}_r^{(0)}+\Big[\Big(\frac{\partial\Psi_0}{\partial\xi}\Big)_0\bar{u}_r^{(1)}$$
$$+\Big(\frac{\partial\Psi_0}{\partial\zeta}\Big)_0\bar{v}_r^{(1)}+\Big(\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\xi\partial\zeta}\Big)_0\bar{u}_r^{(0)}+\Big(\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\zeta^2}\Big)_0\bar{v}_r^{(0)}\Big]\frac{b}{2}\Big\}\cos(n\theta)$$
$$+\frac{1}{\xi^2}\Big\{\Big(\frac{\partial\Psi_0}{\partial\xi}\Big)_0\bar{u}_i^{(0)}+\Big(\frac{\partial\Psi_0}{\partial\zeta}\Big)_0\bar{v}_i^{(0)}+\Big[\Big(\frac{\partial\Psi_0}{\partial\xi}\Big)_0\bar{u}_i^{(1)}+\Big(\frac{\partial\Psi_0}{\partial\zeta}\Big)_0\bar{v}_i^{(1)}$$
$$+\Big(\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\xi\partial\zeta}\Big)_0\bar{u}_i^{(0)}+\Big(\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\zeta^2}\Big)_0\bar{v}_i^{(0)}\Big]\frac{b}{2}\Big\}\sin(n\theta), \tag{4.32}$$

其中$(\ )_0$记为对应量在$\zeta=0$处的值.

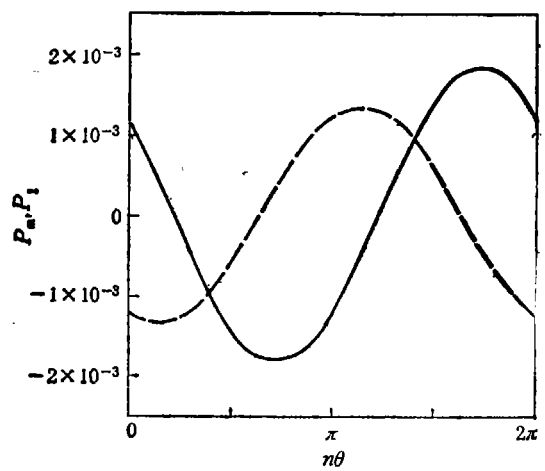


图 1　$\xi=0.5$

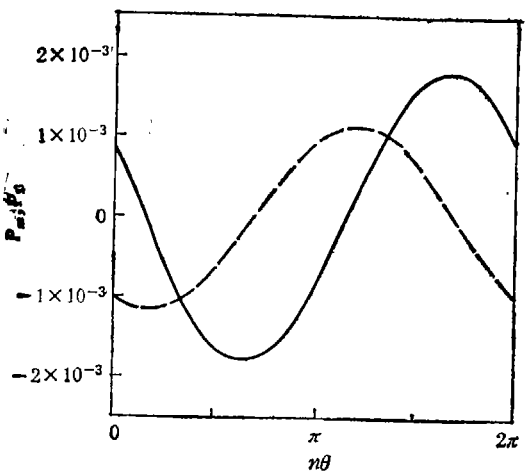


图 2　$\xi=0.6$

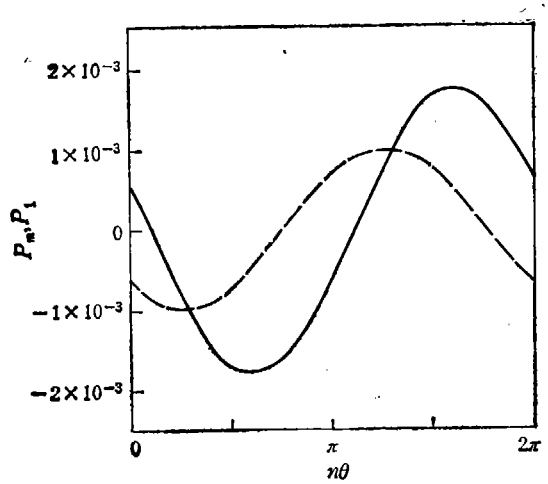


图 3　$\xi=0.7$

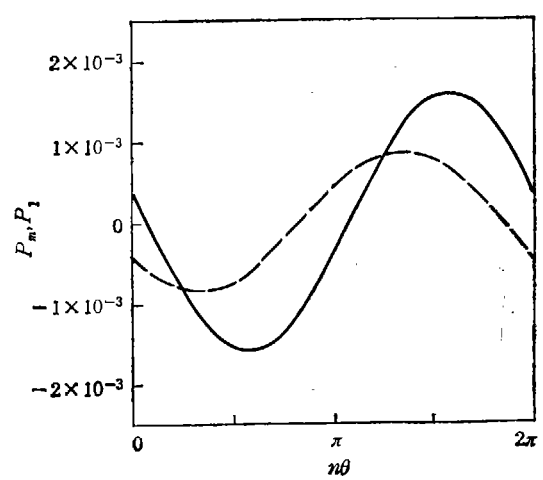


图 4　$\xi=0.8$

图 1—7 以实线和虚线分别表示扰动态的热压力和磁压的分布，对应选择的参数是：

$$h = 1.2,\ s = 10,\ k_1 = 0.8,\ b = 0.02,\ n = 8. \tag{4.33}$$

在上述模型中，半影边界的半径是 r_*，本影边界的半径大约是 $\frac{1}{2} r_*$. 图 1—7 说明，在半影区域中，等离子体压力与环向角 θ 有关的非轴对称部分的变化趋势与对应的磁压的变化趋势大致相同，扰动态的热压力越大，磁压也越大，反之亦然. 即此模型的主要特征是 S 在大部分区域中具有正值，从而支持了 Matting 和 Mechltretter 的观测结果. 即较弱的磁场对应着较暗的纤维. 不过较强的环向场的存在是这一模型的必要条件.

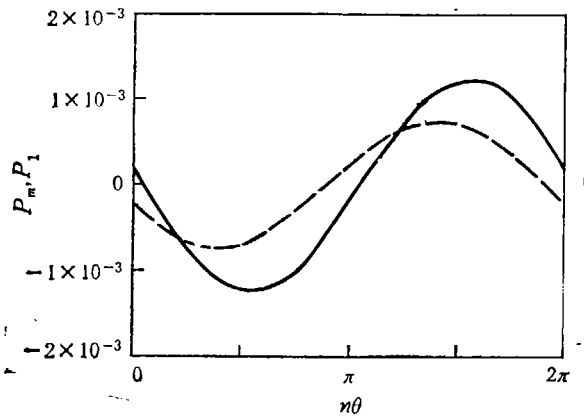


图 5 $\xi = 0.9$

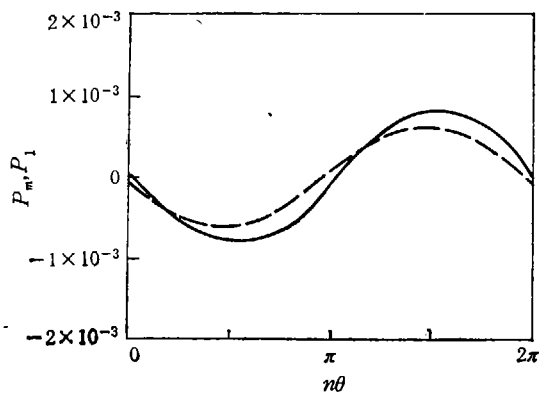


图 6 $\xi = 1.0$

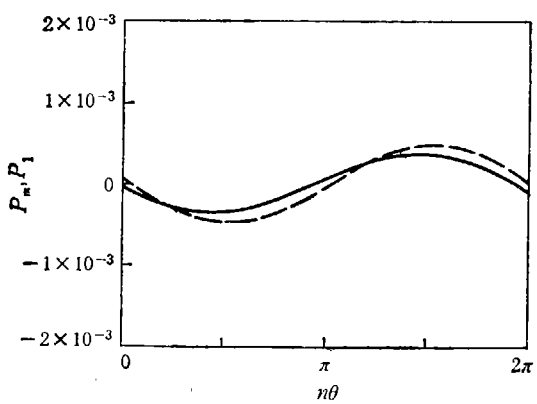


图 7 $\xi = 1.1$

五、结 论

本文详细讨论了强扭转场对磁流体静力学平衡的影响，并分别给出 S 具有正号和负号的两类模型，从而在理论上解释了具有不同结论的两种观测结果. 但在后一类模型中，强扭转场的存在起着极为重要的作用，由于黑子照片常常显出弯曲的半影纤维，讨论强环向分量场的情形是十分必要的.

不难把上述模型推广到具有多个谐波迭加的情形，那样的结果将更为复杂，构造出现 S 为正号的模型的自由度将更多．自然，更为引人注意的是研究轴对称基态的有限的扰动，此时扰动方程也是非线性的，可以从数学上得到某些特解，以供与观测的比较．

最后值得提及的是：具体研究光度与磁场的关系是十分繁难的，它直接取决于具体问题所选择的模型，并求解辐射输运方程．一般说来，压力较大处，温度较高，而且其变化趋势对光度的影响在光球层中将超过密度起伏所造成的影响，故可以认为等离子体压力较大的地方，光度也比较大．这样做可以避开数学上的困难，直接研究磁流体平衡对光度的影响．

参　考　文　献

[1] Low, B. C., *Solar Phys.*, **65**(1980), 147.
[2] 胡文瑞，*Scientia Sinica*, **24**(1981), 1680.
[3] Osherovich, V., *Solar Phys.*, **77**(1982), 63.
[4] 胡文瑞，宇宙磁流体力学，科学出版社，1986.
[5] Hu, W. R., Hu, Y. Q., Low, B. C., *Solar Phys.*, **83**(1983), **195.**
[6] 胡文瑞，科学通报，**29**(1984)，654.
[7] Beckers, J. M., Schröter, E. H., *Solar Phys.*, **4**(1968), 142.
[8] Matting, W., Mechltretter, J. P., *IAU symp.*, **35**(1968), **187.**
[9] Hu, W. R., *Astrophys. Space Sci.*, **90**(1983), **391.**
[10] 胡文瑞，力学学报 1983，6：603.
[11] Low, B. C., *Ap. J.*, **263**(1982), 952.
[12] 胡友秋等，空间科学学报，**5**(1985)，**75.**