中 国 科 学 (A 辑)
第 23 卷 第 10 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1993 年 10 月

弹塑性幂硬化材料裂纹尖端场的高阶渐近分析*

夏 霖 王自强
(LNM,中国科学院力学研究所,北京 100080)

摘 要

本文对平面应变状态下弹塑性幂硬化材料的裂纹尖端应力应变场，进行了严格的高阶渐近分析,得到了裂尖应力场渐近级数展开式前四项或前五项的全部解答.分析表明,当 $1.6<n\leqslant 2.8$ 时(n 为硬化指数),三阶场将受到材料弹性性质的影响;但当 $2.8<n<3.7$ 时,这种影响转而进入四阶场,此时五阶应力场的幅值系数 K_I 是完全独立的;当 $n>3.7$ 时,弹性性质的影响将会进入比四阶更高的应力场，而此时四阶场则是独立的特征场. 分析还表明,只要 $n>1.6$,三阶应力场总是不独立的,它的幅值 K_3 不是与一阶场的 K_1 相关，就是同时与 K_1 和 K_2 相关. 最后还将所得结果与已有的有限元数值结果作了比较,两者符合得相当好.

关键词 弹塑性、高阶渐近分析、裂纹顶端应力场

1 引 言

众所周知，J 积分的临界值在一定条件下可用来表征韧性材料的起裂和小量扩展. 这个条件就是 HRR 奇性场控制的区域必须大于断裂过程区[1-6].

李尧臣和王自强[7]的工作表明，不同的裂纹几何构形在不同屈服条件下,产生的裂纹顶端附近的应力应变场,可以通过 J 积分和另一个参数 k_2 来表征. 这里 k_2 是裂纹顶端应力应变场渐近级数展开式的第二项的幅值系数.

O' Dowd 和 Shih[8,9] 提出了一种 J-Q 环的概念. 他们发现,不同裂纹构形,不同屈服程度相关联的裂纹顶端应力应变场,正好构成一族与 Q 有关的解答.

对于平面应变 II 型裂纹问题，夏霖和王自强[10]做过精确的高阶渐近分析，发现与 I 型裂纹问题的解相比,当硬化指数 $n<5$ 时,渐近应力场的第二项的影响要小些.

李松涛和王自强[11]及 Sharma 和 Aravas[12] 分别独立地对平面应力状态下的 I 型问题进行过高阶渐近场分析.

有关这一领域的一些新的发展还可参阅 Betegon 和 Hancock[13] 的工作.

1992-06-13 收稿,1993-01-28 收修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目.

2 基本方程

本文考虑的是弹塑性幂硬化材料，在单轴拉伸时它的变形遵循 Ramberg-Osgood 公式，即

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\sigma_0}+\alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n, \tag{2.1}$$

其中 σ_0 是屈服应力，相应的屈服应变为 $\varepsilon_0=\sigma_0/E$，E 是杨氏模量。n 和 α 分别是应变硬化指数和硬化系数。

设想材料遵循 J_2 塑性形变理论，此时三维的应力应变关系可表示成

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}s_{ij}+\frac{1-2\nu}{3E}\sigma_{kk}\delta_{ij}+\frac{3}{2}\alpha\varepsilon_0\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{n-1}\frac{s_{ij}}{\sigma_0}, \tag{2.2}$$

其中 s_{ij} 是应力偏量，$\sigma_e=\sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ 是有效应力。

对平面应变状态有[7]

$$\varepsilon_{\beta\gamma}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{\beta\gamma}+\delta_{\beta\gamma}\frac{\Gamma}{E}\sigma_{\rho\rho}+\frac{3}{2}\alpha\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{n-1}\frac{P_{\beta\gamma}}{E}, \tag{2.3}$$

式中 $\sigma_{\rho\rho}=\sigma_r+\sigma_\theta$，$P_{\beta\gamma}=\sigma_{\beta\gamma}-\frac{1}{2}\sigma_{\rho\rho}\delta_{\beta\gamma}$，$\Gamma=-\nu(1+\nu)+\left(\frac{1}{2}-\nu\right)^2$。对于有效应力，有

$$\sigma_e^2=\frac{3}{4}(\sigma-\sigma_\theta)^2+3\tau_{r\theta}^2, \tag{2.4}$$

引进应力函数 ϕ，

$$\begin{cases}\sigma_r=\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right),\\ \sigma_\theta=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial r^2},\\ \tau_{r\theta}=-\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\right).\end{cases} \tag{2.5}$$

应变协调方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varepsilon_\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\varepsilon_r-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\varepsilon_r-\frac{2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\varepsilon_{r\theta})=0, \tag{2.6}$$

设

$$\phi=\sigma_0\sum_{i=1}^{s}K_i r^{s_i+2}\tilde{\phi}_i(\theta). \tag{2.7}$$

将(2.7)式代入(2.5)式，得

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\beta\gamma}}{\sigma_0}&=\sum_{i=1}^{s}K_i r^{s_i}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_i}(\theta)\\ &=K_1 r^{s_1}[\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_1}+\eta_1 r^{\Delta s_1}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_2}+\eta_2 r^{\Delta s_2}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_3}\\ &\quad+\eta_3 r^{\Delta s_3}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_4}+\eta_4 r^{\Delta s_4}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_5}],\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中

$$\begin{cases}\tilde{\sigma}_{r_i}=\tilde{\phi}_i+(s_i+2)\tilde{\phi}_i,\\ \tilde{\sigma}_{\theta_i}=(s_i+2)(s_i+1)\tilde{\phi}_i,\quad i=1,2,3,4,5,\\ \tilde{\tau}_{r\theta_i}=-(s_i+1)\tilde{\phi}_i\end{cases}\tag{2.9}$$

和 $\Delta s_i=s_i-s_1\ (i=2,3,4,5)$, $\eta_j=K_{j+1}/K_1(j=1,2,3,4)$.

对有效应力,有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^2=K_1^2r^{2s_1}\tilde{\sigma}_{e_{11}}\Bigg[1+\Bigg(&2\eta_1r^{\Delta s_2}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{12}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}+\eta_1^2r^{2\Delta s_2}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{22}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}\\&+2\eta_2r^{\Delta s_3}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{13}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}+\eta_2^2r^{2\Delta s_3}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{33}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}+2\eta_3r^{\Delta s_4}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{14}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}\\&+\eta_3^2r^{2\Delta s_4}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{44}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}+2\eta_4r^{\Delta s_5}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{15}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}+\eta_1^2r^{2\Delta s_5}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{55}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}\\&+2\eta_1\eta_2r^{\Delta s_2+\Delta s_3}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{23}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}+2\eta_1\eta_3r^{\Delta s_2+\Delta s_4}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{24}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}\\&+2\eta_1\eta_4r^{\Delta s_2+\Delta s_5}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{25}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}+2\eta_2\eta_3r^{\Delta s_3+\Delta s_4}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{34}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}\\&+2\eta_2\eta_4r^{\Delta s_3+\Delta s_5}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{35}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}+2\eta_3\eta_4r^{\Delta s_4+\Delta s_5}\frac{\tilde{\sigma}_{e_{45}}}{\tilde{\sigma}_{e_{11}}}\Bigg)\Bigg],\end{aligned}\tag{2.10}$$

其中

$$\tilde{\sigma}_{e_{ij}}=\frac{3}{4}(\tilde{\sigma}_{r_i}-\tilde{\sigma}_{\theta_i})(\tilde{\sigma}_{r_j}-\tilde{\sigma}_{\theta_j})+3\tilde{\tau}_{r\theta_i}\tilde{\tau}_{r\theta_j},\quad i,j=1,2,3,4,5.\tag{2.11}$$

为书写方便,下面各式中,均将 $\tilde{\sigma}_{e_{11}}$ 用 $\tilde{\sigma}_{e_1}^2$ 来代替.

当 $r\to0$ 时,(2.11)式中圆括号中的量与第一项相比很小,因此有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{n-1}=K_1^{n-1}r^{(n-1)s_1}\tilde{\sigma}_{e_1}^{n-1}\Bigg\{1&+\eta_1r^{\Delta s_2}(n-1)\frac{\tilde{\sigma}_{e_{12}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}\\&+\eta_2r^{\Delta s_3}(n-1)\frac{\tilde{\sigma}_{e_{13}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}+\eta_3r^{\Delta s_4}(n-1)\frac{\tilde{\sigma}_{e_{14}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}\\&+\eta_1r^{\Delta s_5}(n-1)\frac{\tilde{\sigma}_{e_{15}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}+\eta_1^2r^{2\Delta s_2}\frac{(n-1)}{2}\Bigg[\frac{\tilde{\sigma}_{e_{22}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}\\&+(n-3)\frac{\tilde{\sigma}_{e_{12}}^2}{\tilde{\sigma}_{e_1}^4}\Bigg]+\eta_1\eta_2r^{\Delta s_2+\Delta s_3}(n-1)\\&\times\left[\frac{\tilde{\sigma}_{e_{23}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}+(n-3)\frac{\tilde{\sigma}_{e_{12}}\tilde{\sigma}_{e_{13}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^4}\right]\Bigg\}+\cdots.\end{aligned}\tag{2.12}$$

将(2.8)和(2.12)式代入(2.3)式,有

$$\varepsilon_{\beta\gamma}=\varepsilon_{\beta\gamma}^e+\varepsilon_{\beta\gamma}^p.\tag{2.13}$$

$$\varepsilon_{\beta\gamma}^{e}=\varepsilon_0 K_1 r^{s_1}(\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_1}^{e}+\eta_1 r^{\Delta s_2}\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_2}^{e}+\eta_2 r^{\Delta s_3}\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_3}^{e}+\eta_3 r^{\Delta s_4}\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_4}^{e}+\eta_4 r^{\Delta s_5}\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_5}^{e}),\tag{2.14}$$

其中

$$\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_i}^{e}=(1+\nu)\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_i}+\delta_{\beta\gamma}\Gamma\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_i},\quad i=1,2,3,4,5.\tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\beta\gamma}^{p}&=\frac{3}{2}\alpha\varepsilon_0\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{n-1}\frac{P_{\beta\gamma}}{\sigma_0}\\&=\alpha\varepsilon_0 K_1^n r^{ns_1}[\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_1}^{p}+\eta_1 r^{\Delta s_2}\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_2}^{p}+\eta_1^2 r^{2\Delta s_2}\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_{22}}^{p}\\&\quad+\eta_2 r^{\Delta s_3}\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_3}^{p}+\eta_1\eta_2 r^{\Delta s_2+\Delta s_3}\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_{23}}^{p}+\eta_3 r^{\Delta s_4}\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_4}^{p}\\&\quad+\eta_4 r^{\Delta s_5}\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_5}^{p}],\end{aligned}\tag{2.16}$$

其中

$$\left\{\begin{aligned}&\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_1}^{p}=\frac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e_1}^{n-1}\tilde{s}_{\beta\gamma_1},\\&\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_2}^{p}=\frac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e_1}^{n-1}\left[(n-1)\frac{\tilde{\sigma}_{e_{12}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}\tilde{s}_{\beta\gamma_1}+\tilde{s}_{\beta\gamma_2}\right],\\&\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_{22}}^{p}=\frac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e_1}^{n-1}\left\{\frac{(n-1)}{2}\left[\frac{\tilde{\sigma}_{e_{22}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}+(n-3)\frac{\tilde{\sigma}_{e_{12}}^2}{\tilde{\sigma}_{e_1}^4}\right]\tilde{s}_{\beta\gamma_1}\right.\\&\qquad\left.+(n-1)\frac{\tilde{\sigma}_{e_{12}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}\tilde{s}_{\beta\gamma_2}\right\},\\&\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_3}^{p}=\frac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e_1}^{n-1}\left[(n-1)\frac{\tilde{\sigma}_{e_{13}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}\tilde{s}_{\beta\gamma_1}+\tilde{s}_{\beta\gamma_3}\right],\\&\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_4}^{p}=\frac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e_1}^{n-1}(n-1)\left[\frac{\tilde{\sigma}_{e_{14}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}\tilde{s}_{\beta\gamma_1}+\tilde{s}_{\beta\gamma_4}\right],\\&\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_{23}}^{p}=\frac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e_1}^{n-1}(n-1)\left\{\left[\frac{\tilde{\sigma}_{e_{23}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}+(n-3)\frac{\tilde{\sigma}_{e_{12}}\tilde{\sigma}_{e_{13}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^4}\right]\tilde{s}_{\beta\gamma_1}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\tilde{\sigma}_{e_{13}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}\tilde{s}_{\beta\gamma_2}+\frac{\tilde{\sigma}_{e_{12}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}\tilde{s}_{\beta\gamma_3}\right\},\\&\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma_5}^{p}=\frac{3}{2}\tilde{\sigma}_{e_1}^{n-1}\left[(n-1)\frac{\tilde{\sigma}_{e_{15}}}{\tilde{\sigma}_{e_1}^2}\tilde{s}_{\beta\gamma_1}+\tilde{s}_{\beta\gamma_5}\right].\end{aligned}\right.\tag{2.17}$$

(2.17)式中

$$\tilde{s}_{\beta\gamma_i}=\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_i}-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{\rho\rho_i}\delta_{\beta\gamma},\quad i=1,2,3,4,5.$$

将(2.13)式代入(2.6)式，得到

$$\left\{\begin{aligned}&\alpha K_1^n r^{ns_1-2}\Pi_1^{p}+\alpha K_1^n\eta_1 r^{ns_1+\Delta s_2-2}\Pi_2^{p}+\alpha K_1^n\eta_1^2 r^{ns_1+2\Delta s_2-2}\Pi_3^{p}\\&\quad+\alpha K_1^n\eta_2 r^{ns_1+\Delta s_3-2}\Pi_4^{p}+\alpha K_1^n\eta_1\eta_2 r^{ns_1+\Delta s_2+\Delta s_3-2}\Pi_5^{p}\\&\quad+\alpha K_1^n\eta_3 r^{ns_1+\Delta s_4-2}\Pi_6^{p}+\alpha K_1^n\eta_4 r^{ns_1+\Delta s_5-2}\Pi_7^{p}\\&\quad+K_1 r^{s_1-2}\Pi_1^{e}+K_1\eta_1 r^{s_1+\Delta s_2-2}\Pi_2^{e}+\cdots=0,\end{aligned}\right.\tag{2.18}$$

其中

$$
\begin{cases}
\Pi_1^p = \tilde{\varepsilon}^p_{r_1} - ns_1(ns_1+2)\tilde{\varepsilon}^p_{r_1} - 2(ns_1+1)\tilde{\varepsilon}^p_{r\theta_1} \\
\Pi_2^p = \tilde{\varepsilon}^p_{r_2} - (ns_1+\Delta s_2)(ns_1+\Delta s_2+2)\tilde{\varepsilon}^p_{r_2} - 2(ns_1+\Delta s_2+1)\tilde{\varepsilon}^p_{r\theta_2}, \\
\Pi_3^p = \tilde{\varepsilon}^p_{r_{22}} - (ns_1+2\Delta s_2)(ns_1+2\Delta s_2+2)\tilde{\varepsilon}^p_{r_{22}} - 2(ns_1+2\Delta s_2+1)\tilde{\varepsilon}^p_{r\theta_{22}}, \\
\Pi_4^p = \tilde{\varepsilon}^p_{r_3} - (ns_1+\Delta s_3)(ns_1+\Delta s_3+2)\tilde{\varepsilon}^p_{r_3} - 2(ns_1+\Delta s_3+1)\tilde{\varepsilon}^p_{r\theta_3}, \\
\Pi_5^p = \tilde{\varepsilon}^p_{r_{23}} - (ns_1+\Delta s_2+\Delta s_3)(ns_1+\Delta s_2+\Delta s_3+2)\tilde{\varepsilon}^p_{r_{23}} \\
\qquad - 2(ns_1+\Delta s_2+\Delta s_3+1)\tilde{\varepsilon}^p_{r\theta_{23}}, \\
\Pi_6^p = \tilde{\varepsilon}^p_{r_4} - (ns_1+\Delta s_4)(ns_1+\Delta s_4+2)\tilde{\varepsilon}^p_{r_4} - 2(ns_1+\Delta s_4+1)\tilde{\varepsilon}^p_{r\theta_4}, \\
\Pi_7^p = \tilde{\varepsilon}^p_{r_5} - (ns_1+\Delta s_5)(ns_1+\Delta s_5+2)\tilde{\varepsilon}^p_{r_5} - 2(ns_1+\Delta s_5+1)\tilde{\varepsilon}^p_{r\theta_5}, \\
\Pi_1^e = \tilde{\varepsilon}^e_{r_1} - s_1\tilde{\varepsilon}^e_{r_1} + s_1(s_1+1)\tilde{\varepsilon}^e_{\theta_1} - 2(s_1+1)\tilde{\varepsilon}^e_{r\theta_1} \\
\Pi_2^e = \tilde{\varepsilon}^e_{r_2} - (s_1+\Delta s_2)\tilde{\varepsilon}^e_{r_2} + (s_1+\Delta s_2)(s_1+\Delta s_2+1)\tilde{\varepsilon}^e_{\theta_2} - 2(s_1+\Delta s_2+1)\tilde{\varepsilon}^e_{r\theta_2}.
\end{cases}
\tag{2.19}
$$

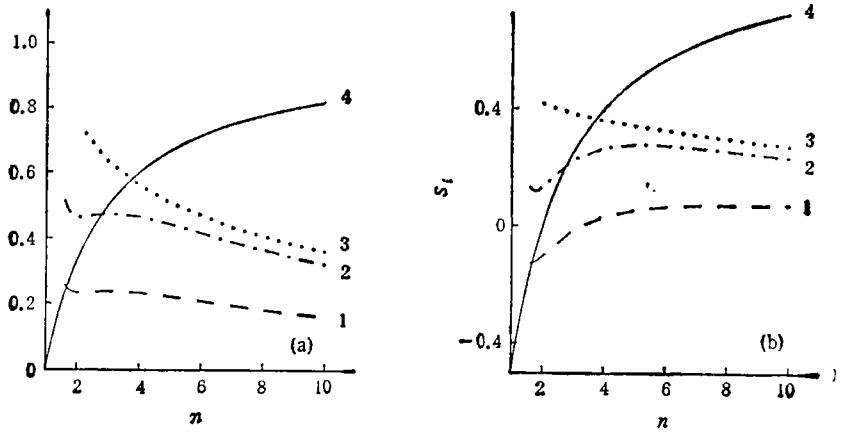


图 1 各阶特征值随 n 的变化

(a) 1——Δs_2, 2——$2\Delta s_2$, 3——Δs_3^*, 4——$(n-1)/(n+1)$,
(b) 1——s_2, 2——s_3, 3——s_4, 4——$(n-2)/(n+1)$

裂纹面面力自由条件为

$$\tilde{\phi}_i(\pi) = \tilde{\phi}_i'(\pi) = 0, \tag{2.20}$$

$\theta = 0$ 处,对称条件为

$$\tilde{\phi}_i'(0) = \tilde{\phi}_i'''(0) = 0, \tag{2.21}$$

方程(2.18)—(2.21)即为控制方程.

3 控制方程求解

一阶场已由 Rice 和 Rosengren[1], Hutchinson[2] 给出,此时有

$$s_1 = -\frac{1}{1+n}.$$

二阶场,首先由李尧臣和王自强[7]给出,而后又由 Sharma 和 Aravas[12] 进一步证实. 特征值 Δs_2 随 n 的变化,见图 1.

现在来分析三阶场. 从方程(2.18), 可以看出,其中有三项有可能与三阶场有关,它们是方程(2.18)的第三、第四和第八项,即

$$\begin{cases} \alpha K_I^n \eta_1^2 r^{ns_1+2\Delta s_2-2}\Pi_3^p, \\ \alpha K_I^n \eta_2 r^{ns_1+\Delta s_3-2}\Pi_4^p, \\ K_1 r^{s_1-2}\Pi_1^e. \end{cases}$$

现第一步要做的是找到以下三个 r 的指数中的最小的一个：

$$\begin{cases} ns_1+2\Delta s_2-2, \\ ns_1+\Delta s_3-2, \\ s_1-2. \end{cases}$$

此等价于寻找以下三个数中的最小者：

$$2\Delta s_2, \Delta s_3, (n-1)/(n+1).$$

上式中的 $2\Delta s_2$ 在二阶场已知后已确定，如图 1(a) 的曲线 2 所示，而 $(n-1)/(n+1)$ 见图 1(a) 的曲线 4.

为求 Δs_3 的值，可令(2.18)式的第四项等于零，即

$$\Pi_4^p = 0. \tag{3.1}$$

利用(2.19)式，(3.1)式可简化成一个线性特征方程：

$$\Pi_4^p = D_1\ddot{\tilde{\phi}}_3 + D_2\ddot{\tilde{\phi}}_3 + D_3\dot{\tilde{\phi}}_3 + D_4\dot{\tilde{\phi}}_3 + D_5\tilde{\phi}_3 = 0, \tag{3.2}$$

其中的系数 D_1—D_5 是 $\tilde{\phi}_1$—$\ddot{\tilde{\phi}}_1$，s_3 和 Δs_3 的函数，具体表达式见附录.

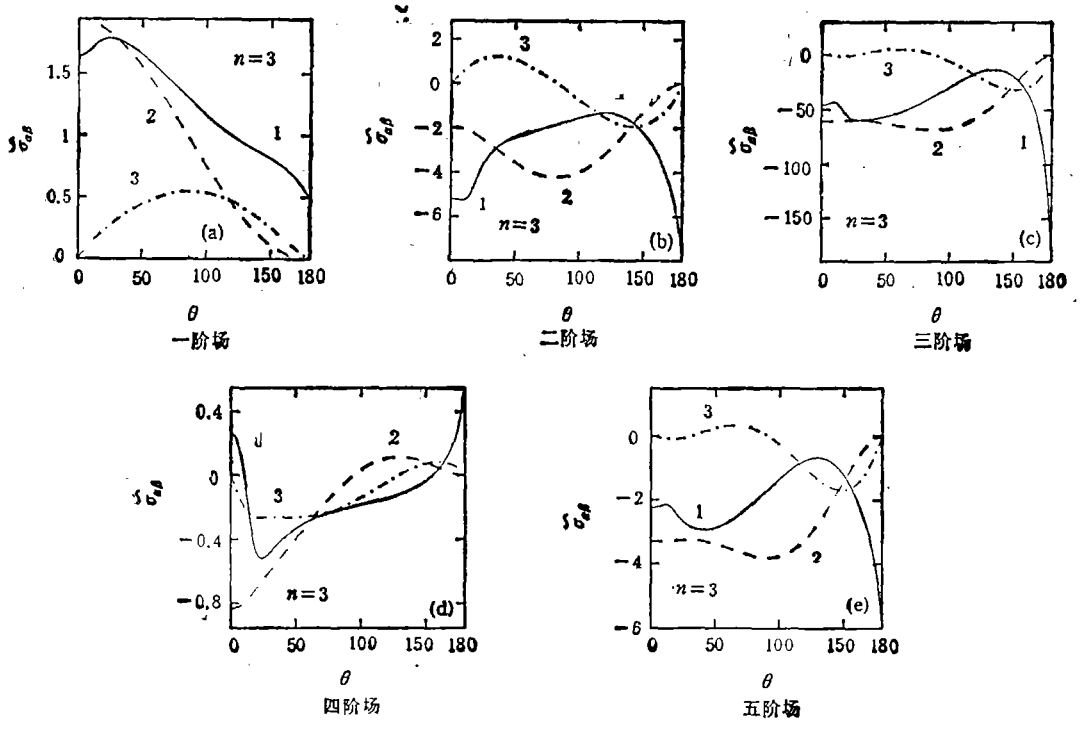


图 2　$n=3$ 时一阶到五阶应力场的角分布

1——$\tilde{\sigma}_{r_i}$，2——$\tilde{\sigma}_{\theta_i}$，3——$\tilde{T}_{r_i}$ $(i=1,2,3,4,5)$

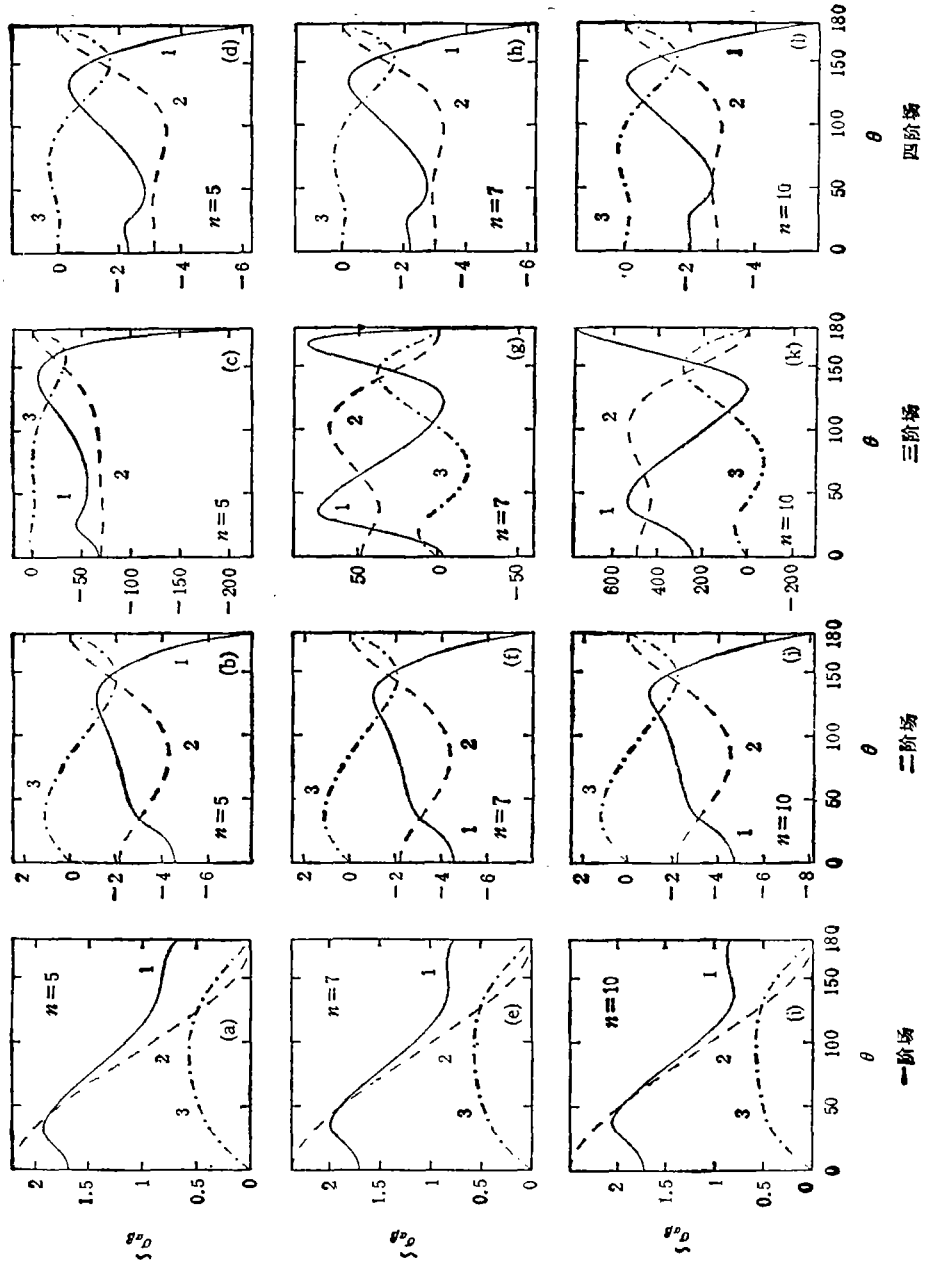


图 3 $n=5,7,10$ 时一阶到四阶应力场的角分布
1——$\bar{\sigma}_{r_i}$, 2——$\bar{\sigma}_{\theta_i}$, 3——$\bar{\tau}_{r\theta_i}$ $(i=1,2,3,4)$

(3.2)式是一个齐次的变系数常微分方程．因此，通过对它的求解，可得到特征值 Δs_3(或 s_4).

图 1(a) 同时给出了 $\Delta s_2, 2\Delta s_2, \Delta s_3^*$ 和 $(n-1)/(n+1)$．当 $1.6 < n \leqslant 2.8$ 时，三阶场的应力指数由曲线 4 确定，当 $n > 2.8$ 时，它由曲线 2 确定．

类似地可对四阶场和五阶场进行分析．

4 结　果

图 2 和图 3 所示为各阶应力场的角分布图，它们分别对应于 $n = 3$ 和 $n = 5,7,10$ 等几种不同的情况．

图 2 显示的是 $n = 3$ 的情况，其中包括了从一阶场到五阶场的所有角分布曲线．在此情况下，弹性因素的影响进入到四阶场．计算中取 Poisson 比 $\nu = 0.5$．其应力则可写成

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\beta\gamma}}{\sigma_0} &= \sum_{i=1}^{5} K_i r^{s_i}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_i}(\theta)\\ &= K_1 r^{-1/(n+1)}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_1}(\theta) + K_2 r^{s_2}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_2}(\theta) + \frac{K_2^2}{K_1} r^{2s_2+1/(n+1)}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_3}(\theta)\\ &\quad + \frac{1}{\alpha K_1^{n-2}} r^{(n-2)/(n+1)}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_4}(\theta) + K_5 r^{s_5}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_5}(\theta)\\ &= \left(\frac{1}{\alpha\varepsilon_0\sigma_0 I_n r}\right)^{0.25}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_1}(\theta) + K_2 r^{-0.01284028}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_2}(\theta)\\ &\quad + \left(\frac{\alpha\varepsilon_0\sigma_0 I_n}{J}\right)^{0.25} K r^{0.2243191^4}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_3}(\theta)\\ &\quad + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha\varepsilon_0\sigma_0 I_n}{J}\right)^{0.25} r^{0.25}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_4}(\theta) + K_5 r^{0.3822\,1012}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_5}(\theta).\end{aligned} \tag{4.1}$$

在(4.1)式中，可发现 $K_3 = K_2^2/K_1, K_4 = 1/(\alpha K_1^{n-2})$．这意味着，在五个幅值 $K_i (i = 1,2,3,4,5)$ 中，其实只有三个是独立的，它们是 K_1, K_2 和 K_5．对于五阶场，求解中用到了正规化条件 $\tilde{\phi}_1(0) = -1$.

图 3 所示为 $n = 5,7,10$ 等三种情况下从一阶到四阶应力场的角分布曲线．通过对比，可发现，随着 n 的不同，一阶、二阶和四阶应力场均变化不大，唯有三阶应力场对于三种不同的 n 值，存在相当大的差别．总的应力场最后可写成

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\beta\gamma}}{\sigma_0} &= \sum_{i=1}^{4} K_i r^{s_i}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_i}(\theta)\\ &= K_1 r^{-1/(n+1)}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_1}(\theta) + K_2 r^{s_2}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_2}(\theta)\\ &\quad + \frac{K_2^2}{K_1} r^{2s_2+1/(n+1)}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_3}(\theta) + K_4 r^{s_4}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_4}(\theta)\\ &= \left(\frac{J}{\alpha\varepsilon_0\sigma_0 I_n r}\right)^{1/(n+1)}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_1}(\theta) + K_2 r^{s_2}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_2}(\theta)\\ &\quad + \left(\frac{\alpha\varepsilon_0\sigma_0 I_n}{J}\right)^{1/(n+1)} K_2^2 r^{s_3}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_3}(\theta) + K_4 r^{s_4}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_4}(\theta),\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中可看出，$K_3 = K_2^2/K_1$，但 K_4 是除 K_1 和 K_2 之外的另一个独立的幅值系数．(4.2)式的四阶

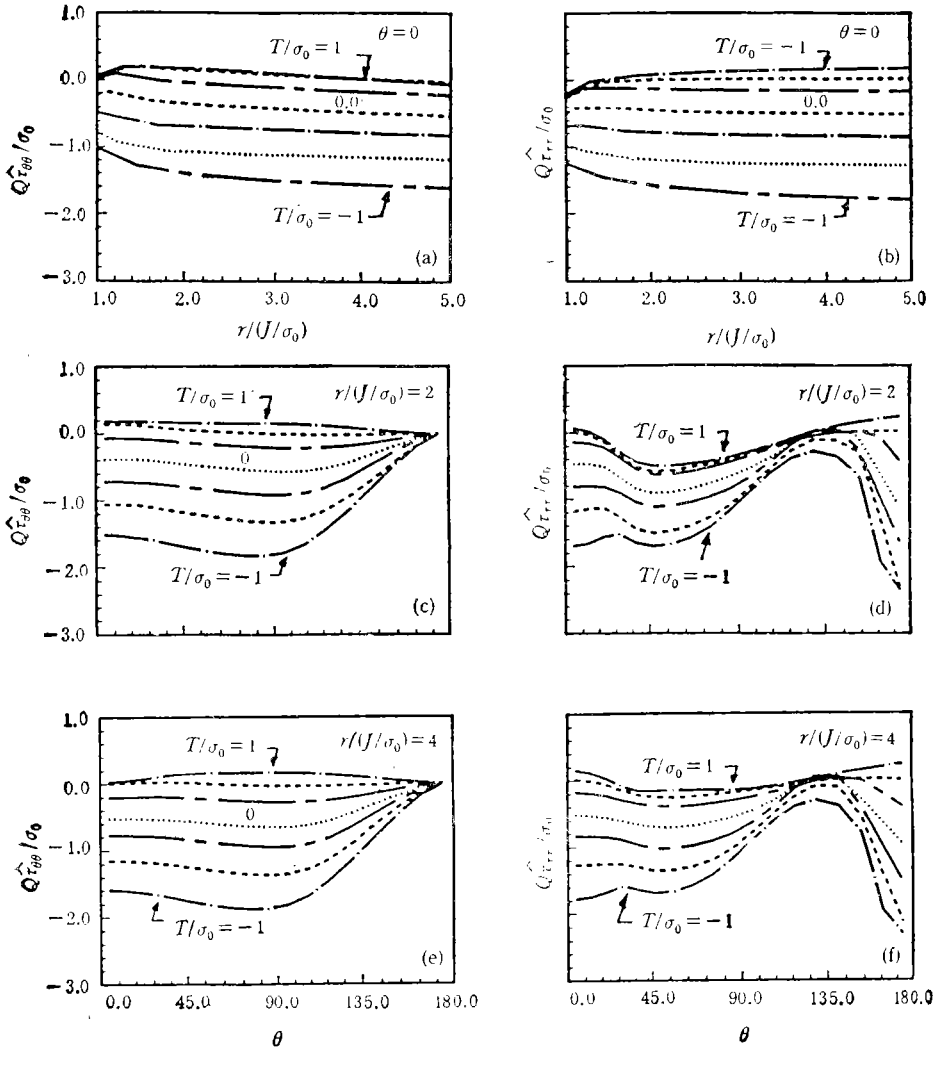


图 4 有限元法得到的差场[8]

应力场的求解中用到正规化条件 $\tilde{\phi}_4(0)=-1$. 表 1 给出了 $n=3,5,7,10$ 四种不同情况下各阶应力场的应力指数值.

表 1

	s_1	s_2	s_3	s_4
$n=3$	−0.25000000	−0.01284028	0.22431944	0.25000000
$n=5$	−0.16666667	0.05455957	0.27578581	0.34072164
$n=7$	−0.12500000	0.0693[illegible]479	0.26374958	0.30845004
$n=10$	−0.09090909	0.06976616	0.23044141	0.26959457

最后，我们将本文所得结果与 O'Dowd 和 Shih[8] 的有限元数值结果作一比较.

图 4 是文献[8]中给出的 $n=10$ 的应力差场的有限元数值解. 这里所指的差场为(1.1)式的第二项. 对应地，本文得到的 $n=10$ 的情况下的二阶、三阶和四阶应力场的总和可写成

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sigma_{\beta\gamma}}{\sigma_0}\right)_{\text{diff}} &= \sum_{i=2}^{4} K_i r^{s_i}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_i}(\theta)\\ &= K_1\eta_1 r^{s_2}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_2}(\theta) + K_1\eta_1^2 r^{2s_2+1/(n+1)}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_3}(\theta) + K_1\eta_3 r^{s_4}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_4}(\theta)\\ &= k_2\left(\frac{r}{J/\sigma_0}\right)^{0.05976616}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_2}(\theta) + k_3\left(\frac{r}{J/\sigma_0}\right)^{0.23944141}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_3}(\theta)\\ &\quad + k_4\left(\frac{r}{J/\sigma_0}\right)^{0.26959457}\tilde{\sigma}_{\beta\gamma_4}(\theta),\end{aligned} \tag{4.3}$$

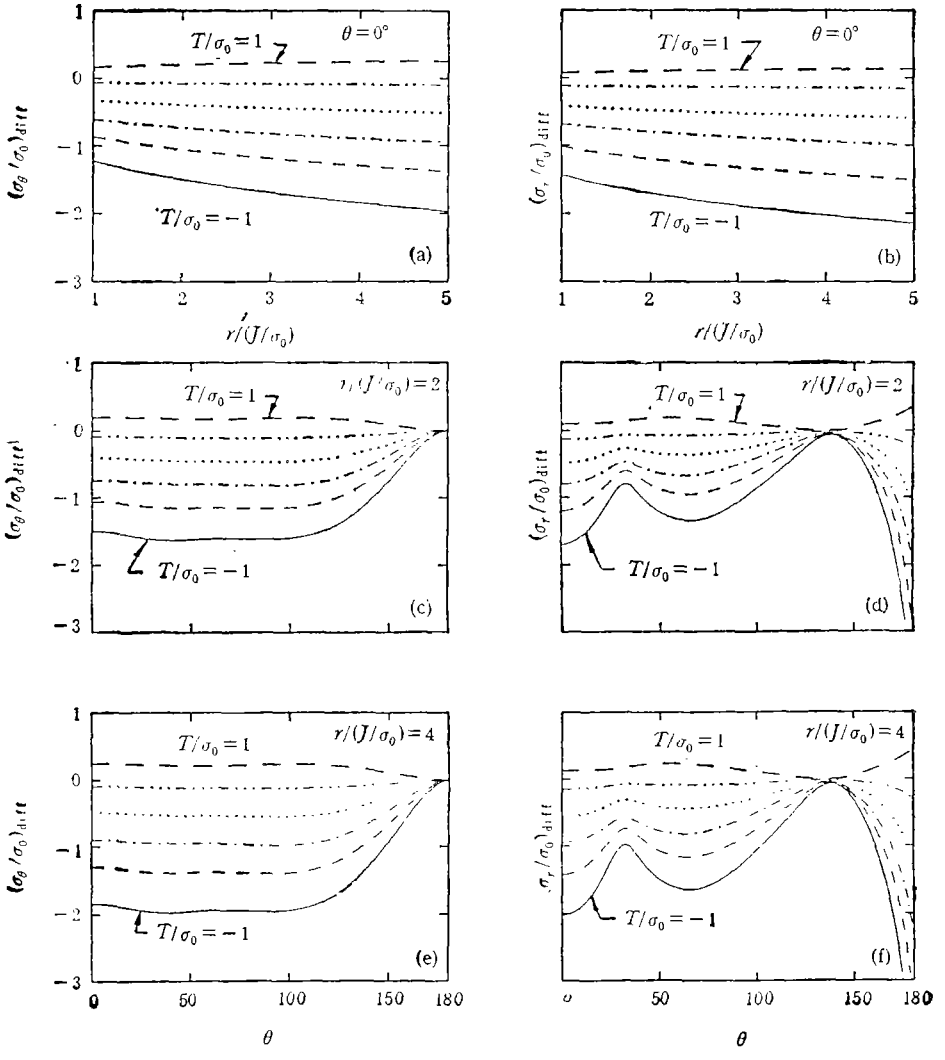


图 5　本文得到的差场(从二阶到四阶的总和)

其中

$$\begin{cases} k_2 = K_1\eta_1\left(\dfrac{J}{\sigma_0}\right)^{s_1} \\ k_3 = K_1\eta_1^2\left(\dfrac{J}{\sigma_0}\right)^{2s_2-s_1}, \\ k_4 = K_1\eta_3\left(\dfrac{J}{\sigma_0}\right)^{s_4}, \end{cases} \tag{4.4}$$

而

$$K_1 = \left(\frac{J}{\alpha\varepsilon_0\sigma_0 I_n}\right)^{1/(n+1)} \tag{4.5}$$

从(4.4)式可看出

$$k_3 = (\alpha\varepsilon_0 I_n)^{1/(n+1)}k_2^2. \tag{4.6}$$

在以下计算中取 $\alpha = 1.0, \varepsilon_0 = 1/300. I_n = 4.54$ (取自 O'Dowd 和 Shih[8]).

由(4.4)和(4.6)式可知，在(4.3)式中，其实只有两个独立的幅值参数 k_2 和 k_4. 因此可通过调节这两个参数的值，使(4.3)式所得的应力差场值 σ_θ/σ_0, σ_r/σ_0 与图 4(c) 和图 4(d)中 $\theta = 0$ 处的 $Q\hat{\tau}_{\theta\theta}/\sigma_0, Q\hat{\tau}_{rr}/\sigma_0$ 相一致. 注意此时 $r/(J/\sigma_0) = 2$. 最后，k_2, k_4 的计算结果，和 k_3 一起列入表 2 中.

图 5 是按(4.3)式和表 2 所给数据画的图，其比例同图 4. 从图 4 和图 5 的比较可看出，两种结果符合得很好. 只是在 T/σ_0[1] 的值极为靠近 -1 时，$(\sigma_\theta/\sigma_0)_{\text{diff}}$ 和 $(\sigma_r/\sigma_0)_{\text{diff}}$ 的径向变化比文献[8]的显得大些.

表 2 a)

	$Q\tau_{\theta\theta}/\sigma_0$	$Q\tau_{rr}/\sigma_0$	k_2	k_3	k_4
1	−1.50	−1.70	0.06844	0.00320	0.91558
2	−1.06	−1.20	0.05513	0.00208	0.61191
3	−0.74	−0.80	0.04027	0.00111	0.36945
4	−0.40	−0.48	0.03212	0.00071	0.21034
5	−0.08	−0.13	0.01571	0.00017	0.04041
6	0.20	0.10	0.01035	0.00007	−0.05275

a) $n = 10$

此外，图 6(a),(b) 为本文计算得到的剪应力的解. 由此可见，在裂纹前缘的区间 $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ 内，一阶剪应力，即 $\tau_{r\theta}$ 的 HRR 场解占主导地位，这一特点与文献[8]的结果(图 6(c),(d)) 是一致的.

5 结 论

对弹塑性幂硬化材料的平面应变裂纹问题，本文对它的裂纹尖端应力应变场进行了精确

1) 文献[8]在作有限元数值计算时，远场边界条件取成线弹性解:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T\delta_{1i}\delta_{1j}.$$

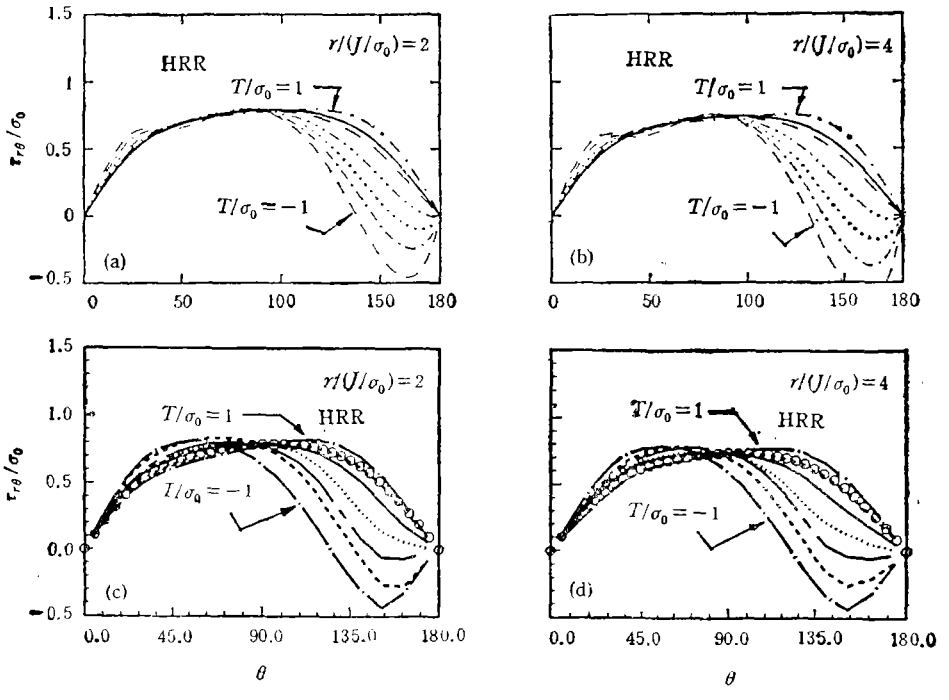


图 6　剪应力的角分布

(a)和(b)为本文解，(c)和(d)为 O'Dowd 和 Shih[8] 的解

的高阶渐近分析．在 $n=3$ 的情况下，获得了应力场的特征函数的级数展开式中前五项的全部解答，而在 $n=5,7,10$ 等三种情况下，则获得了级数展开式中前四项的全部解答．我们的分析表明，当 $1.6<n\leqslant 2.8$ 时，材料弹性性质的影响进入三阶应力场；但当 $2.8<n\leqslant 3.7$ 时，此影响则进入四阶应力场，此时五阶场的幅值系数是独立的；如果 $n>3.7$，那么弹性性质的影响只会进入比四阶更高的应力场，而此时四阶场则是独立的特征场．此外，还发现，只要 $n>2.8$，三阶应力场的应力指数 $s_3=2s_2-s_1$，而且此时三阶应力场的幅值与一、二阶应力场的幅值有关，即 $K_3=K_2^2/K_1$．对于四阶应力场的幅值 K_4，只有当 $n>3.7$ 时，它才成为一个独立的参数．由此可见，各阶应力场及其幅值 $K_i(i=2,3,4,5\cdots)$ 是否独立，完全取决于硬化指数 n 的大小．

对于 $n=10$ 的情况，对比说明，我们的结果与 O'Dowd 和 Shih[8] 的有限元数值解答符合很好．这一事实说明，渐近展开式的高阶项对裂尖应力应变场总是或多或少有一些影响．

参　考　文　献

[1] Rice, J. R., Rosengren, G. F., *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, **16**: 1—12.

[2] Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, **16**: 13—31.

[3] Shih, C. F., German, M. D., *Int. J. Fract. Mech.*, 1981, **17**: 27—43.

[4] McMeeking, R. M., Parks, D. M., *ASTM. STP.*, 1979, **668**: 175—194.

[5] Needleman, A., Tvergaard, V., *ASME. STP.*, 1983, **803**: 80—115.

[6] Wang, T. C., *Proc. ICF Int. Symp. Fract. Mech. (Beijing)*, 1983, 243—248.

[7] Li Yaochen, Wang, T. C., *Scientia Sinica, Series A*, 1986, **29**: 941—955.

[8] O'Dowd, N. P., Shih, C. F., *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, **39**: 989—1015.

[9] Shih, C. F., O'Dowd, N. P., Kirk, M. T., *A Framework for Quantifying Crack Tip Constraint*, for Publication

in ASTM STP December, 1991.
[10] Xia, L., Wang, T. C., *Acta Mechanica Sinica*, 1992 (8): 156—163.
[11] 李松涛、王自强，中国科学，A辑，1992 (4): 395—402.
[12] Sharma, S. M., Aravas, N. J., *J. Mech Phys. Solids*, 1991, 39: 1043—1072.
[13] Betgon, C., Hancock, J. W., *J. Appl. Mech.*, 1991, 58: 104—110.

附 录

使用方程(2.17)，可将三阶场的塑性应变写成

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}^{p}_{r_3} = A(\tilde{\sigma}_{r_3} - \tilde{\sigma}_{\theta_3}) + B\tilde{\tau}_{r\theta_3},\\ \tilde{\varepsilon}^{p}_{r\theta_3} = B(\tilde{\sigma}_{r_3} - \tilde{\sigma}_{\theta_3})/2 + C\tilde{\tau}_{r\theta_3},\end{cases} \tag{A.1}$$

其中

$$\begin{cases}A = \Omega\{[(n-1)\tilde{s}^{2}_{r_1} + \tilde{g}]\tilde{g}^{2}\},\\ B = \Omega\{2(n-1)\tilde{s}_{r_1}\tilde{\tau}_{r\theta_1}\tilde{g}^{2}\},\\ C = \Omega\{2[(n-1)\tilde{\tau}^{2}_{r\theta_1} + \tilde{g}]\tilde{g}^{2}\}.\end{cases} \tag{A.2}$$

$$\tilde{s}_{r_1} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{r_1} - \tilde{\sigma}_{\theta_1}),\tilde{g} = \tilde{s}^{2}_{r_1} + \tilde{\tau}^{2}_{r\theta_1}, \tag{A.3}$$

这里 $\Omega = (3^{\frac{n+1}{2}}/4)\tilde{g}^{\frac{n-7}{2}}$.

在(3.2)式中，系数 D_1—D_5 可表示成

$$\begin{cases}D_1 = A,\\ D_2 = 2A' - (ns_1 + \Delta s_3 + s_3 + 2)B,\\ D_3 = A'' - (ns_1 + \Delta s_3 + 2s_3 + 3)B' - [(ns_1 + \Delta s_3)(ns_1 + \Delta s_3 + 2)\\ \qquad + (s_3 + 2)s_3]A + 2(ns_1 + \Delta s_3 + 1)(s_3 + 1)C,\\ D_4 = -(s_3 + 1)B'' - 2(s_3 + 2)s_3A' + [(ns_1 + \Delta s_3)(ns_1 + \Delta s_3 + 2)(s_3 + 1)\\ \qquad + (ns_1 + \Delta s_3 + 1)(s_3 + 2)s_3]B + 2(ns_1 + \Delta s_3 + 1)(s_3 + 1)C',\\ D_5 = -(s_3 + 2)s_3A'' + (ns_1 + \Delta s_3)(ns_1 + \Delta s_3 + 2)(s_3 + 2)s_3A\\ \qquad + (ns_1 + \Delta s_3 + 1)(s_3 + 2)s_3B'.\end{cases} \tag{A.4}$$