中 国 科 学
1992 年 12 月　　A 辑　　第 12 期

基于滑移与微纤维伸缩两种耗能机制的弹塑性本构模型*

梁乃刚　　程品三
（中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放研究实验室，北京　100080）

摘　　要

本文考虑了固体材料内以拉压和滑移方式消耗变形功的两种主要物理机制，提出了用纤维构元与滑移构元共同组集的弹塑性材料模型．两种构元都是单自由度变形体，其力学性质及塑性变形中的耦合硬化系数可由传统的材料力学实验确定．各种取向的构元在三维空间中均匀分布，并与宏观应变协调变形．从模型结构的力学响应导出了全量型和增量型本构方程，不必预先设定加载函数（塑性势函数）．构元经历的变形历史与其取向有关，作为组合效应的应力应变关系能反映加载路径的影响．因此，本文得到的本构方程既保持了简洁的数学形式，又能模拟复杂加载条件下材料的宏观弹塑性力学行为．

本文预测了几种多晶金属材料在典型复杂加载路径下的应力应变响应与后继屈服面，与实验结果吻合良好．

关键词　　塑性、组集式材料模型、耦合硬化、鲍辛格效应、本构方程

一、引　　言

固体材料在弹塑性变形中，特别当变形路径复杂时，后继屈服面的形状和大小有明显的改变．这时，传统的数学塑性理论很难找到普遍适用的加载函数[1]．从模拟后继屈服面演化的规律出发，Sanders[2] 提出了线性加载函数理论．他认为屈服面是应力空间中的多面体表面，每个平面对应一个加载函数．在加载点的推动下，加载面的运动改变了屈服面的形状与大小．该理论能够解释后继屈服面演化的主要特性，但无法确定加载函数的具体形式．Batdorf 与 Budiansky[3] 的简单滑移模型为 Sanders 理论提供了一种加载函数．设 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$ 为滑移面法向与滑移方向的单位矢量，τ_{cr} 为临界分解剪应力，$\boldsymbol{T}$ 为 Euler 应力，分解剪应力定律确定的加载函数为

$$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{n}=\tau_{cr}.$$

1991-07-17 收稿，1992-05-18 收修改稿
* 中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放研究实验室资助课题

在应力空间中，$\boldsymbol{T}$ 为一矢量，$\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{n}$ 对应一个空间方向，上式是一个超平面方程．取向不同的滑移系对应一簇超平面，τ_{cr} 控制了超平面到原点的距离．当 τ_{cr} 为常数时，该超平面对应着 Tresca 屈服条件，见图 1 中的椭圆 "BEC"．

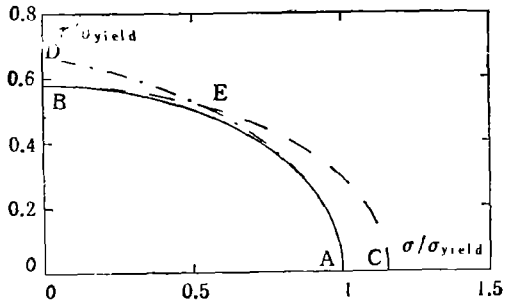

图 1 初始屈服面

AEB 为预测的初始屈服面，——为 Mises 屈服面，－－为 Tresca 屈服面，——·—为 Ishlinskii 屈服面

Liang 与 Bergan[4]，梁乃刚和程品三[5,6]提出的纤维构元模型为 Sanders 理论提供了另一种加载函数．用 $\mathbf{I}$ 表示单位二阶张量，并设 $\boldsymbol{l}$ 为纤维构元方向的单位矢量，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为无限小应变张量，偏应变引起的纤维伸缩为 $\lambda=\boldsymbol{\varepsilon}:\left(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\right)$．若纤维的弹性比例极限为 λ_{cr}，纤维屈服对应的加载函数为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}:\left(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\right)=\lambda_{cr}.$$

这是应变空间中的一个超平面．取向不同的纤维对应一簇超平面，λ_{cr} 控制了超平面到原点的距离．当它为常数时这簇超平面对应着 Ishlinskii 的最大偏应变屈服条件，如图 1 中的曲线 "DEA"．

大量实验资料表明，尽管常用结构金属材料细观组分及其性质千差万别，但它们的宏观弹塑性行为具有许多共性．例如，初始屈服面都相当接近 Mises 椭圆 "BA"．由图 1 看出，上述两种物理机制对应的屈服面与 Mises 椭圆各有一些偏差，但适当选择 τ_{cr} 与 λ_{cr} 的值，两种机制共同控制的初始屈服面将为 "AEB"，与 Mises 椭圆相差无几．因此，本文以这两种物理机制为基础构造材料模型，期望模型材料能够反映常用结构金属材料的宏观弹塑性性质．

为了使导出的本构方程保持简洁的数学形式，假定模型材料是由微小弹性粒状组分相互粘结而成，并且在各空间方向上掺有随机分布的纤维组分．粒状体占据绝大部分体积，可以认为材料单元的体积应变是由粒状体的变形形成的．颗粒体之间的滑移与纤维体的伸缩与宏观畸变变形相协调，因而决定了材料单元的宏观塑性性质．同时，也对粒间滑移与纤维伸缩的载荷-变形关系作一些简化处理．当然，这些假定与简化是否合理则要看导出的本构方程能否足够精确地预测材料的宏观弹塑性行为．

二、模型的描述

本文记 J 为初始状态单位体积材料的现时体积，$\mathbf{D}$ 为应变率，因而可以用 $\Theta=\ln(J)$ 度

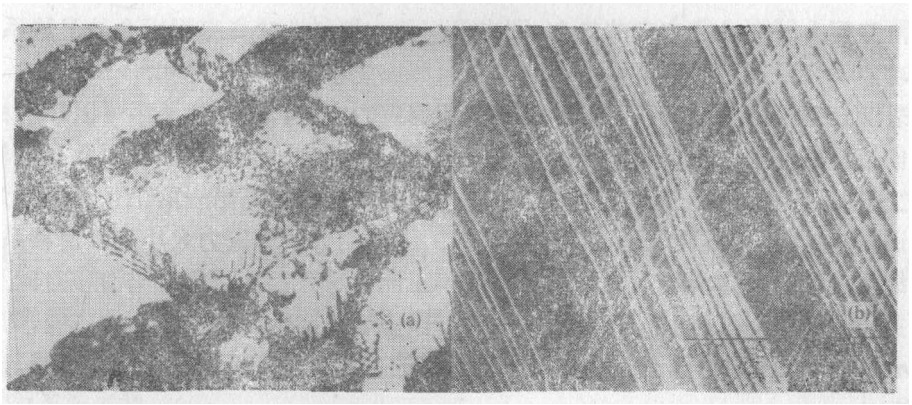

图 2　高倍显微镜下的滑移集中区（a）低倍显微镜下的滑移线(b)

量体积变形. 由于材料单元的体积应变是由弹性粒状体的变形形成的，若 κ 为材料的体积模量，体积应力将为 $\kappa\ln(J)$，从而材料单元的膨胀功率

$$\dot{W}_v = \kappa\ln(J)\mathrm{tr}(\mathbf{D}) = \kappa\ln(J)\mathbf{D}:\mathbf{I}. \tag{1}$$

尽管实际材料内纤维状组分的分布和变形并不均匀，但在模拟宏观效应的均匀化模型中可用与宏观应变相协调的均匀分布纤维构元作为同一方向上纤维组分的等效耗能机构. 设 $\boldsymbol{l}$ 方向的纤维构元在畸变变形下伸缩比为 λ_l，取向在 $\boldsymbol{l}$ 方向 $\mathrm{d}\Omega$ 邻域内的纤维承载为 f_l，则单位体积内纤维变形需要的功率为

$$\dot{W}_l = \frac{1}{J}\int_{\Omega} f_l\lambda_l \mathrm{d}\Omega.$$

其中 Ω 为三维空间中的半个球面立体角. 按照有限变形几何学理论，当前长度为 λ_l 的纤维在偏应变作用下具有伸缩率

$$\lambda_l = \lambda_l\left[\mathbf{D}:\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{D})\right] = \mathbf{D}:\mathbf{Q}, \tag{2}$$

式中 $\mathbf{Q} = \lambda_l\left[\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\right]$，于是

$$\dot{W}_l = \mathbf{D}:\frac{1}{J}\int_{\Omega} f_l\mathbf{Q}\,\mathrm{d}\Omega. \tag{3}$$

变形中晶体材料的高倍显微照片显示，见图 2(a)，当塑性变形充分发展以后，实际材料内部的滑移也是不均匀的. 变形集中发生在纵横交错的带形区域之中. 带的走向并非直线，宽度也不尽相同. 但在低倍照片图 2(b) 中，这种走向曲折、宽窄不定的条带看起来成为较为规整的网状滑移痕迹. 试验表明，滑移痕迹线的交角随塑性变形而改变，其取向基本上遵循均匀连续介质中线元素的转动规律. 因而可以认为模型材料细观微粒间的滑移形成了取向各异的滑移面，每个滑移面有自己特定的滑移方向. 从宏观平均意义上讲，可将取向相同、滑移方向也相同的滑移面作为一个滑移系对待. 设法线为 $\boldsymbol{n}$、滑移方向为 $\boldsymbol{m}$ 的滑移系平均滑移速率为 $\hat{\dot{\gamma}}_{mn}$，法线在 $\boldsymbol{n}$ 的 $\mathrm{d}\Omega$ 邻域而滑移方向在 $\boldsymbol{m}$ 的 $\mathrm{d}\Psi$ 邻域内的滑移系上的滑移力为 $\hat{g}_{mn}$，则滑移需要的总功率可以由下面的积分表示：

$$\dot{W}_s = \frac{1}{J}\int_{\Omega}\int_{\Psi}\hat{g}_{mn}\hat{\dot{\gamma}}_{mn}\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\Psi, \tag{4}$$

其中Ψ为滑移面上所有滑移方向的集合，即半平面角. 把弹性畸变变形折合为滑移系的滑移，可将上述功率看作是等效弹性滑移需要的功率与塑性滑移消耗功率之和.

试验表明，单晶材料中滑移系的状态由分解剪应力决定，一个滑移系可以开动相当大的距离与取向接近的滑移系仍保持静止. 但在多晶材料中，由于晶粒与晶粒以及晶粒与各种缺陷、杂质之间相互约束，临界分解剪应力通常比相应的单晶材料高出一两个数量级. 为了维护变形的协调与连续，不得不同时开动多个滑移系. 无法用分解剪应力大小判断滑移系的状态. 数值模拟结果表明，假定滑移系的平均滑移速率正比于滑移面法线方向与滑移方向上两物质线素之间夹角的变化率(剪切率)时，理论预测与试验结果吻合良好. 按照有限变形几何学理论，与 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}$ 重合、因而互相垂直的两物质线素之间的夹角变化率为 $(\mathbf{D}:\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{n})$. 记比例系数为 ζ，则有

$$\dot{\hat{\gamma}}_{mn}=\zeta\mathbf{D}:\mathbf{P}, \tag{5}$$

其中 $\mathbf{P}=\frac{\sqrt{3}}{3}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{m})$，式中设置常数$\sqrt{3}/3$是为了便于用统一的形式描述纤维伸缩量-纤维力与滑移量-滑移力之间的关系. 记 $g_{mn}=\zeta\hat{g}_{mn}$，(4)式将成为

$$\dot{W}_{\mathrm{I}}=\mathbf{D}:\frac{1}{J}\int_{\Omega}\int_{\Psi}g_{mn}\mathbf{P}\,\mathrm{d}\Psi\,\mathrm{d}\Omega. \tag{6}$$

(1),(3)与(6)式分别将体积变形、纤维变形与滑移变形所需要的功率与宏观应变率联系起来. 这些变形功率必然由作用到材料单元体表面上的应力来提供. 应力 T 所做的功率是 $T:\mathbf{D}$，故有

$$\dot{W}=\mathbf{D}:T=\mathbf{D}:\left\{\kappa\ln(J)\mathbf{I}+\frac{1}{J}\int_{\Omega}\left[f_l\mathbf{Q}+\int_{\Psi}g_{mn}\mathbf{P}\,\mathrm{d}\Psi\right]\mathrm{d}\Omega\right\}.$$

三、本构方程

纤维力 f_l 与取向张量 $\mathbf{Q}$ 和滑移力 g_{mn} 与取向张量 $\mathbf{P}$ 由变形历史决定而与变形率 $\mathbf{D}$ 无关，约去上式中的变形率 $\mathbf{D}$ 得

$$T=\kappa\ln(J)\mathbf{I}+\frac{1}{J}\int_{\Omega}\left[f_l\mathbf{Q}+\int_{\Psi}g_{mn}\mathbf{P}\,\mathrm{d}\Psi\right]\mathrm{d}\Omega, \tag{7}$$

这就是模型材料的全量型弹塑性本构方程.

由于力响应函数 f_l 和 g_{mn} 与变形历史有关，使用增量本构关系并按加载路径进行积分才能求得应力应变响应. 利用(7)式求出第二 Piola-Kirchhoff 应力的物质导数

$$\dot{S}=\dot{T}+T\mathrm{tr}(\mathbf{D})-L\cdot T-T\cdot L^{T},$$

可以得到增量型本构关系

$$\dot{S}=\mathbf{K}:\mathbf{D}. \tag{8}$$

在对 (7) 式求物质导数的过程中，需要用有限变形几何学求出物质线素方向上单位矢量 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$ 与滑移面单位法矢量 $\boldsymbol{n}$ 的物质导数，进而求出 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的物质导数，最后得到刚度张量

$$\mathbf{K}=\kappa[1+\ln(J)]\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}-2\kappa\ln(J)\mathbf{I}\bowtie\mathbf{I}+\frac{1}{J}\int_{\Omega}\left[\frac{\delta f_l}{\delta\lambda_l}\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q}+\int_0^{\Psi}\left(\frac{\delta g_{mn}}{\delta\gamma_{mn}}\mathbf{P}\otimes\mathbf{P}\right)\right]\mathrm{d}\Psi\,\mathrm{d}\Omega$$

$$+\frac{1}{J}\int_{\Omega}\left\{\frac{f_l}{\lambda_l}(\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q})-2\lambda_l f_l\left[(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}-\frac{1}{3}(\mathbf{I}\bowtie\mathbf{I})\right]\right\}\mathrm{d}\Omega$$

$$+\frac{1}{J}\int_0^{\Omega}\int_0^{\Psi}\left[g_{mn}(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\otimes\mathbf{P}\right.$$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{n}\bowtie\mathbf{I}+\mathbf{I}\bowtie\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{m})\mathrm{d}\Psi\mathrm{d}\Omega, \tag{9}$$

式中，四阶张量 $(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})_{ijkl}$ 代表 $\delta_{ij}\delta_{kl}$，而 $(\mathbf{I}\bowtie\mathbf{I})_{ijkl}$ 代表 $\delta_{ik}\delta_{jl}$. $\frac{\delta f_l}{\delta\lambda_l}$ 与 $\frac{\delta g_{mn}}{\delta\gamma_{mn}}$ 表示纤维与滑移系的切线模量. 下一节讨论如何确定它们.

在小变形情况下，可以认为 $J=1$ 并忽略转动效应. 从而 $\dot{\boldsymbol{l}}=\dot{\boldsymbol{m}}=\dot{\boldsymbol{n}}=0$，$\dot{\mathbf{P}}=\dot{\mathbf{Q}}=0$，刚度矩阵简化为

$$K=\kappa\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}+\int_0^{\Omega}\left[\frac{\delta f_l}{\delta\lambda_l}(\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q})+\int_0^{\Psi}\frac{\delta g_{mn}}{\delta\gamma_{mn}}(\mathbf{P}\otimes\mathbf{P})\mathrm{d}\Psi\right]\mathrm{d}\Omega. \tag{10}$$

在直角坐标系中，可以用角参数 ϕ,θ,ψ 将单位矢量 $\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 写为

$$l_1=n_1=\cos\phi\cos\theta,\quad m_1=\cos\psi\sin\phi\cos\theta-\sin\psi\sin\theta,$$
$$l_2=n_2=\cos\phi\sin\theta,\quad m_2=\cos\psi\sin\phi\sin\theta+\sin\psi\cos\theta,$$
$$l_3=n_3=\sin\phi,\qquad m_3=-\cos\psi\cos\phi.$$

(10)式中刚度张量的分量表达式为

$$K_{ijqt}=\kappa\delta_{ij}\delta_{qt}+\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\left\{\frac{\delta f_l}{\delta\lambda_l}\left(l_il_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\left(l_ql_t-\frac{1}{3}\delta_{qt}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left[\frac{\delta g_{mn}}{\delta\gamma_{mn}}(m_in_j+n_im_j)(m_qn_t+n_qm_t)\right]\mathrm{d}\psi\right\}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta. \tag{11}$$

在线弹性范围内 $\frac{\delta f_l}{\delta\lambda_l}=\kappa_f$，而 $\frac{\delta g_{mn}}{\delta\gamma_{mn}}=\kappa_g$ 皆为常数，由(11)式得

$$K_{1212}=\frac{2\pi}{15}[\kappa_f+\pi\kappa_g]=G,\ \text{故}\ \kappa_f+\pi\kappa_g=\frac{15G}{2\pi}, \tag{12}$$

还可以得到

$$K^e_{ijqt}=\left(\kappa-\frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{qt}+2G\delta_{iq}\delta_{jt}. \tag{13}$$

这恰好是各向同性线弹性材料的广义虎克定律. 如果让纤维构元和滑移构元的力学性质随其取向不同而改变，则可得到初始各向异性材料的本构模型.

就变形物理机制来讲，纤维构元与滑移构元并不相同. 但从(7)式，特别是(10)式中的小变形刚度张量看，纤维伸缩比 λ_l 与滑移系滑移量 γ_{mn}、纤维力响应函数 f_l 与滑移力响应函数 g_{mn}、纤维构元取向张量 $\mathbf{Q}$ 与滑移系取向张量 $\mathbf{P}$ ——对应. 因而在下面将不再分别对这两种机制进行讨论，而统称它们为构元. 同时将它们的变形参数 λ 与 γ，f，g，$\mathbf{Q}$ 及 $\mathbf{P}$ 不加区分地记为 λ，f 和 $\mathbf{Q}$. 数值模拟的结果表明，改变两种构元强化系数之比时，计算结果并无明显差别. 在本文的例子中，纤维构元与滑移元的强化系数之比为 $\pi:1$.

四、构元力响应函数

由于模型的构元只有一个变形自由度，用拟合材料宏观应力应变实验曲线的方法可以标

定力响应函数. 文献[3,5,7]已经介绍了如何用分段线性化和求解积分微分方程的方法来确定力响应函数. 这里介绍一种待定参数法. 对于常温下的结构金属与合金，这种方法是简捷有效的.

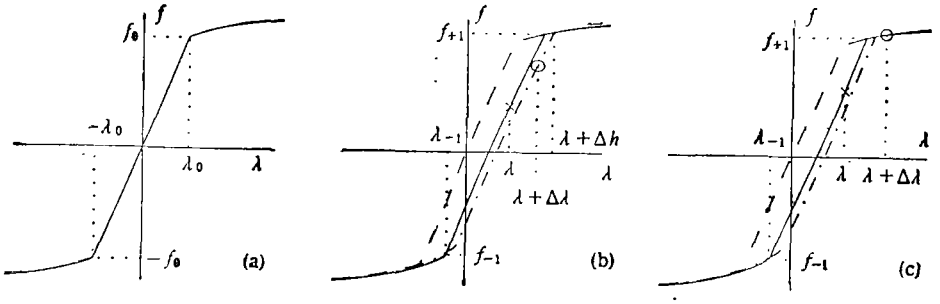

图 3 (a) 初始状态的 $f(\lambda)$，(b) 耦合硬化控制的 $f(\lambda)$，(c) 应变耦合硬化控制的 $f(\lambda)$
———为初始状态，——为增量步始，—·—·为增量步终，○为 $\lambda+\Delta\lambda$，×为 λ

可以设构元力响应函数是由材料常数与历史参数决定的单调函数，见图 3. 初始时刻，屈服变形为 $\pm\lambda_0$、屈服力为 $\pm f_0$. 屈服后呈指数规律衰减，衰减系数为 α. 当 $f\geqslant f_{sat}$，切线模量为饱和值 β，见图 3(a). 以上共 5 个材料常数. 变形中屈服点将不断改变，故 $\lambda_{\pm1}\neq\lambda_0$. 记对应于 $\lambda_{\pm1}$ 的屈服力为 $f_{\pm1}$，力响应函数可表达为

$$f(\lambda)=\begin{cases} f_{-1}-(f_{sat}+f_{-1})(1-e^{-\alpha\frac{\lambda-\lambda_{-1}}{\lambda_0}})+\beta f_0\dfrac{\lambda-\lambda_{-1}}{\lambda_0}, & -\infty<\lambda<\lambda_{-1}, \\ f_{+1}+f_0\dfrac{\lambda-\lambda_{+1}}{\lambda_0}\ \text{或}\ f_{-1}+f_0\dfrac{\lambda-\lambda_{-1}}{\lambda_0}, & \lambda_{-1}\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{+1}, \\ f_{+1}+(f_{sat}-f_{+1})(1-e^{-\alpha\frac{\lambda-\lambda_{+1}}{\lambda_0}})+\beta f_0\dfrac{\lambda-\lambda_{+1}}{\lambda_0}, & \lambda_{+1}<\lambda<+\infty, \end{cases} \tag{14}$$

式中 $\lambda_{\pm1}$ 与 $f_{\pm1}$ 是历史参数，由于构元的弹性模量保持不变，它们之中只有 3 个是独立的.

当构元的变形超过弹性极限后，将产生应变硬化. 塑性变形发生以后，各构元所处的环境被改变了. 仍在弹性变形中的构元，其弹性极限也会改变，称为耦合硬化. 这两种硬化控制了后继屈服面的大小和形状的演变. 用计算机模拟试验的方法可以验证下面的耦合硬化公式具有较普遍的适用性.

$$\dot{h}=\left(\frac{\mathbf{D}:\mathbf{Q}}{\lambda^p}\right)^{\eta}_{at\ \lambda^p=\max(\lambda^p)}\dot{\lambda}^p, \tag{15}$$

其中 $\dot{\lambda}^p=\mathbf{D}^p:\mathbf{Q}=[(\mathbf{D}-(\mathbf{K}^e)^{-1}):\dot{S}]:\mathbf{Q}$，$\eta$ 为材料硬化参数，$\mathbf{K}^e$ 是弹性刚度张量. 求圆括号中的值需要先选择 λ^p 取得最大的构元，再进行计算.

数值计算时需要决定构元的切线模量 $\dfrac{\delta f}{\delta\lambda}$ 与更新历史参数，可以认为前一增量步的历史参数是已知的，记为 $\lambda_{\pm1}^{old}$ 与 $f_{\pm1}^{old}$. 这里用增量符号代替率符号，而且仅讨论 $\Delta h>0$，$\Delta\lambda>0$ 的情况，其余情况不难类推.

若 $\lambda+\Delta\lambda-\Delta h\leqslant\lambda_{+1}^{old}$，(图 3(b))，该构元将处于弹性阶段，耦合硬化起控制作用，有

$$\frac{\delta f}{\delta\lambda}=\frac{f_0}{\lambda_0}\left(1-\frac{\Delta h}{\Delta\lambda}\right),\quad f_{+1}^{new}=f_{+1}^{old}+\frac{\alpha(f_{sat}-f_{+1}^{old})+\beta f_0}{\lambda_0}\Delta h,\quad \lambda_{+1}^{new}=\lambda_{+1}^{old}+\Delta h. \tag{16}$$

反之 $\lambda+\Delta\lambda-\Delta h>\lambda_{+1}^{\text{old}}$ (图 3(c)),该构元将进入屈服状态,耦合硬化不起控制作用,有

$$\frac{\delta f}{\delta\lambda}=\frac{f_0}{\lambda_0}\frac{\lambda_{+1}-\lambda}{\Delta\lambda}+\frac{\alpha(f_{\text{sat}}-f_{+1}^{\text{old}})+\beta f_0}{\lambda_0}\left(1-\frac{\lambda_{+1}-\lambda}{\Delta\lambda}\right),\tag{17}$$

$$f_{+1}^{\text{new}}=f_{+1}^{\text{old}}+\Delta f,\quad \lambda_{+1}^{\text{new}}=\lambda_{+1}^{\text{old}}+\Delta\lambda.$$

另外两个历史参数则为

$$\lambda_{-1}^{\text{new}}=\lambda_{-1}+\xi(\lambda_{+1}^{\text{new}}-\lambda_{+1}),\quad f_{-1}^{\text{new}}=f_{+1}^{\text{new}}-\frac{f_0}{\lambda_0}(\lambda_{+1}^{\text{new}}-\lambda_{-1}^{\text{new}}),\tag{18}$$

式中的 $\xi\geqslant-1$ 是另一个材料参数,反映 Bauschinger 效应的大小.

五、例　子[1)]

Liang 与 Bergan[4],梁乃刚与程品三[5,6]提出的纤维构元组集模型是本文模型 $g_{mn}=0$,耦合硬化为零的特例. 其中已给出了若干例子,说明组集式模型能够较为精确地预测后继屈服面. 文献[6]对单向拉伸宏观剪切带现象的预测说明这种模型能够模拟有限变形的几何非线性效应. 本文的例子说明,考虑了滑移机制和耦合硬化效应后,这种模型预测材料应力应变响应的精度显著提高,并且适用于大应变的情形. 例中的材料常数见表 1.

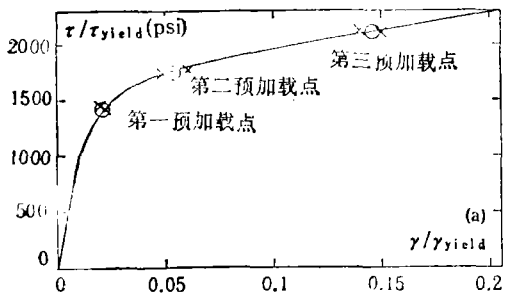

图 4(a)　Ivey 试验材料的应力应变曲线
——为预测的曲线，O为预加载点，×为实验结果

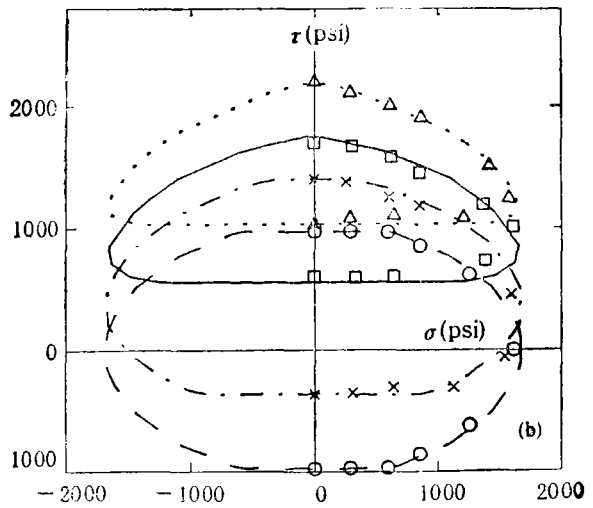

图 4(b)　与 Ivey 试验结果的比较
O为实验初始屈服面，×为实验第 1 后继屈服面，
□为实验第 2 后继屈服面，△为实验第 3 后继屈服面，
– – –为预测初始屈服面，– · –为预测第 1 后继屈服面，
——为预测第 2 后继屈服面，　…为预测第 3 后继屈服面

本模型的预测:

1. 与 Ivey[7] 实验结果的对比(图 4(a),(b));
2. 与 Naghdi[8] 实验结果的对比(图5);
3. 与 Bertsch 和 Frindley[9] 实验结果的对比 (图 6(a), (b)). 这组实验的加载路径是

1) 为了与国外文献中的实验数据进行比较,表 1 与图4– 7中的计量单位仍用英制单位,没有用我国法定计量单位

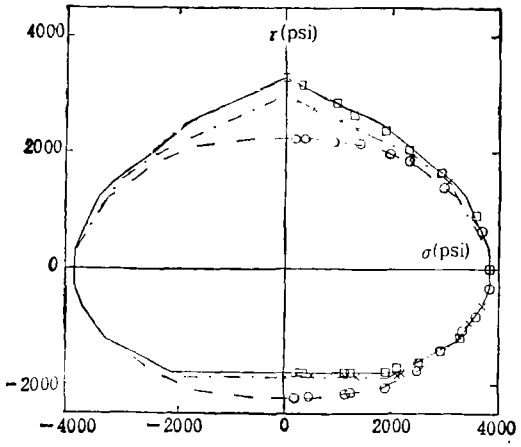

图 5 与 Naghdi 试验结果的比较

○为实验初始屈服面，×为实验第 1 后继屈服面，□为实验第 2 后继屈服面，——为预测初始，—·—为预测第 1 后继屈服面，——为预测第 2 后继屈服面

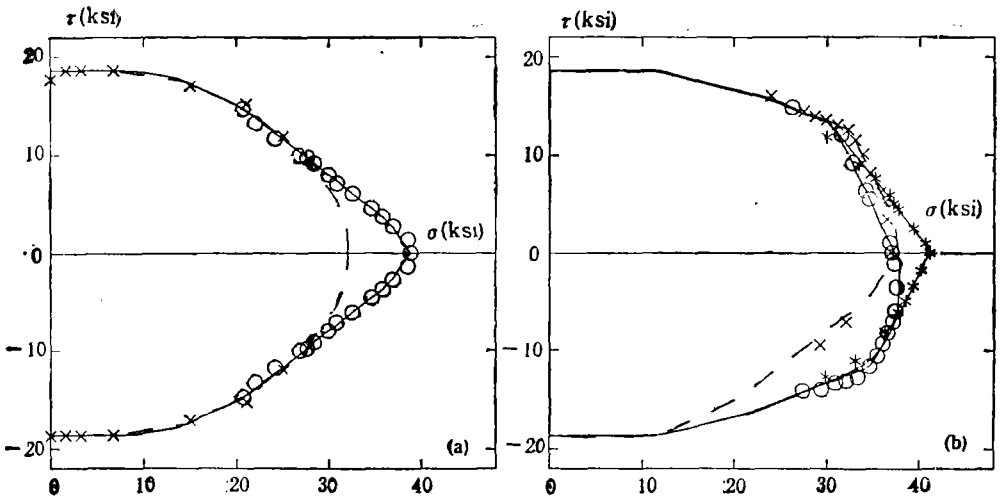

图 6 初始屈服面与第 1 后继屈服面（a），第1—4后继屈服面（b）

(a)：——为预测初始屈服面，——为预测第 1 后继屈服面，×为实验初始屈服面，○为实验第 1 后继屈服面；

(b)：——为预测第 2 后继屈服面，——为预测第 3 后继屈服面，—— 为预测第 4 后继屈服面，×为实验第 2 后继屈服面，○为实验第 3 后继屈服面，*为实验第 4 后继屈服面

$(\sigma_x,\tau_{xy})=(0,0)\to(38.5,0)\to(21.5,0)\Rightarrow(33.0,\ 12.6)\to(31.5,\ 0)\to(31.5,\ -6.5)\Rightarrow(35.5,-11.5)\to(36.5,0)\Rightarrow(40.5,0)$，其中 $\Longrightarrow$ 表示该段加载沿一阶梯状路径；

4. 研究本构关系的根本目的是预测材料的应力应变响应，本例用来检验文中导出本构方程模拟材料力学行为的能力。Budiansky 等[10]提供了六种加载路径的实验曲线。图 7(a) 是材料的应力应变曲线。对其中两种加载路径的预测结果与梁乃刚与程品三[5]的结果相同，已经很接近实验结果。对图 7(b) 中所示的是另外四种典型复杂加载路径，文献[5]中的结果比

表 1　数值例子中的材料常数

材　料	19S	24S-T4	6061-T4	14S-T4
杨氏模量	9.6×10^3ksi	5.3×10^3t/in^2	10×10^3ksi	10.5×10^3ksi
Poisson比	0.3333	0.3333	0.3333	0.3291
σ_{yield}	3.3t/in^2	38.4ksi	32.0ksi	20.0ksi
f_{sat}/f_0	1.34	1.03	1.03	1.35
α	1.00	0.35	0.20	1.00
β	0.028	0.025	0.01	0.04
η	0.20	0.45	1.0	0.5
ξ	1.12	0.93	1.0	1.0
实验资料来源	[7]	[8]	[9]	[10]

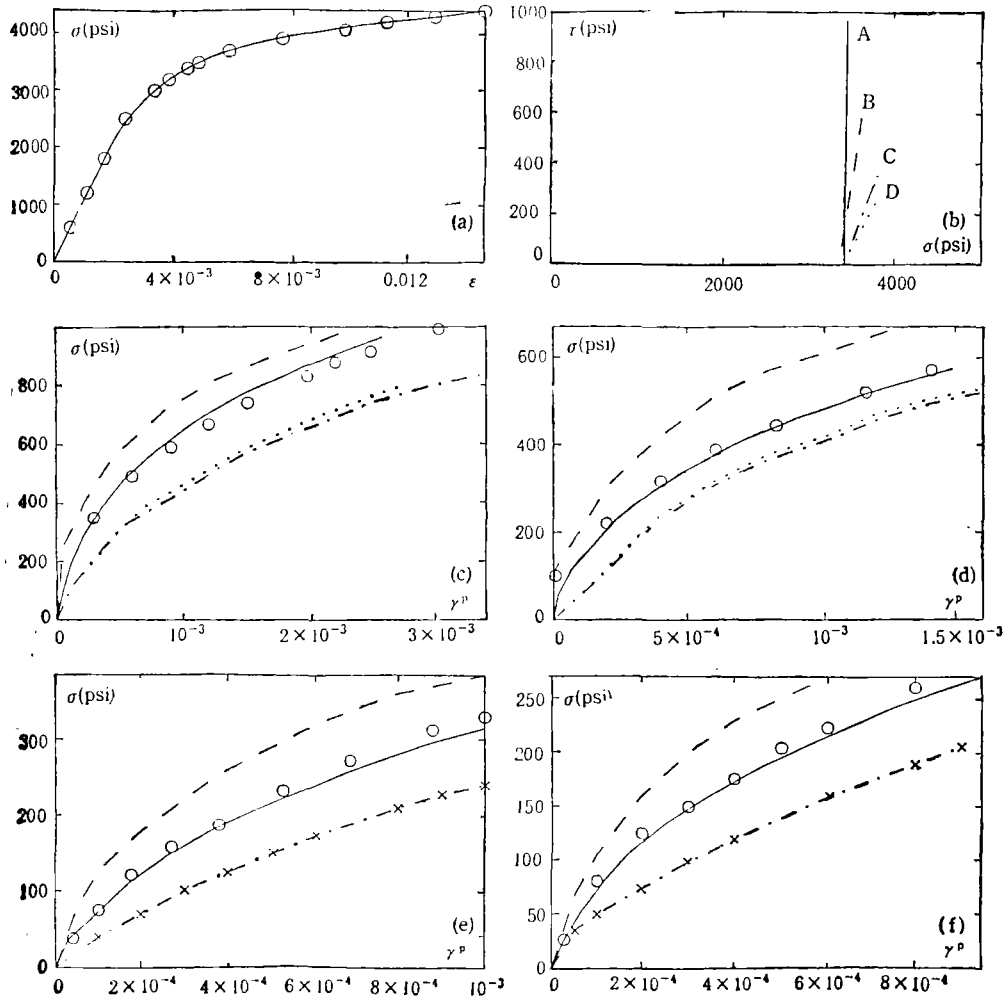

图 7　应力应变曲线（a）四种典型加载路径（b）加载路径为 A 时（c）、B 时（d）、C 时（e）和 D 时（f）的塑性剪切应变

(a)：——为预测应力应变曲线，○为实验点；(b)：A——(3382,0) — (3417,966)，B——(3317,0) — (3594,575)，C——(3386,0) — (3824,371)，D——(3367,0) — (3830,271)；(c)：——为本文预测，----为 J-2 流动理论预测，— · —为形变理论预测，…… 为 Badianskg 理论预测，○为实验结果；(d),(e)和(f)的图注同(c)

以往几种理论预测结果有所改善，但仍有明显偏差．本文提出的材料模型中考虑了耦合硬化效应，对这四种加载路径的预测精度明显提高，与实验结果几乎完全一致．

六、结论与讨论

1. 本文中模型材料的组成及构元力学性质都比较简单，不需要预先设定塑性势函数．导出的弹塑性本构方程具有简洁的显式表达式，能足够精确地模拟常用结构金属与合金在复杂加载条件下的应力应变响应，可以直接应用于结构分析与工程设计；

2. 计算结果表明，由纤维与滑移构元共同组集或者单独使用其中任一种构元单独组集的本构模型都能对结构金属材料的宏观力学行为作出良好的模拟．Liang 与 Bergan[4]，梁乃刚和程品三[5,6]提出的纤维组集模型的数学描述更简明，便于实际应用；

3. 耦合硬化与鲍辛格效应对后继屈服面的大小与形状有重要影响．本文所提出的耦合硬化率计算方法只是一种尝试，其适用范围有待验证．

致谢 在工作中得到了郑哲敏、朱兆祥研究员和黄筑平教授的鼓励与帮助；在与王自强、段祝平研究员的讨论中受益非浅，作者谨向他们表示衷心的谢意．

参 考 文 献

[1] Drucker, D.C., *Appl. Mech Rev.*, 41(1988), 4:151—167.
[2] Sanders, J.L.Jr., *Proc. 2nd U.S.Nat. Congr. Appl. Mech.* 1954, 455—460.
[3] Batdorf, S.B. & Budiansky, B., *J. Appl Mech.*, 21(1954), 323—326.
[4] Liang N.G.& Bergan P.G., *Acta Mechanica Sinica* 16(1990), 4:357—366.
[5] 梁乃刚、程品三，力学学报，22(1990),6: 680—688.
[6] 梁乃刚、程品三，力学学报，24(1992),2: 162—170.
[7] Ivey, H.J., *J.Mech. Engng Sci.*, 3(1961), 1:15—31.
[8] Naghdi, P.M., Esseburg F & Koff, W., *J.Appl. Mech*, 25(1958), 3:201—209.
[9] Mertsch, P.A. & Findley, W.N., *Proc. 4th U.S.Nat. Congr. Appl. Mech* 1962, 893—907.
[10] Budiansky B. et al., *Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1951 503—511.