中 国 科 学 (A 辑)
第23卷 第 10 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1993 年 10 月

Hopfield 型神经网络的稳定性

廖 晓 昕
(华中师范大学数学系，武汉 430074)

摘 要

本文给出了 Hopfield 型神经网络平衡态稳定性的一系列判别准则，讨论了其平衡态的存在唯一性.

关键词 Hopfield 型、神经网络、平衡态、稳定性

近年来，神经网络理论和应用在国际上是热门话题. 美国生物物理学家 Hopfield[1-3] 提出了如下神经网络模型:

$$\begin{cases} C_i \dfrac{du_i}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} T_{ij} v_j - \dfrac{u_i}{R_i} + I_i, \\ v_i = g_i(u_i), \end{cases} \qquad i = 1, 2 \cdots, n. \tag{1}$$

这是一个最基本的模型，已找到了许多重要应用. (1) 式中 R_i 为电阻，C_i 为电容，R_i，C_i 并联，I_i 为电流，T_{ij} 是神经元 j，i 的突触强度，u_i 是第 i 个神经元的输入，$v_i = g_i(u_i)$ 为输出，设 $g_i'(u_i) > 0$，矩阵 $T = (T_{ij})$ 对称，Hopfield 对(1)式构造了计算能量函数

$$E(v) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} T_{ij} v_i v_j - \sum_{i=1}^{n} I_i v_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_i} \int_0^{v_i} g_i^{-1}(\xi) d\xi. \tag{2}$$

沿(1)式的轨线对 $E(v)$ 求导:

$$\left.\frac{dE(v)}{dt}\right|_{(1)} = -\sum_{i=1}^{n} C_i (g_i^{-1}(u_i))' \left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2 \leqslant 0. \tag{3}$$

由

$$\left.\frac{dE(v)}{dt}\right|_{(1)} = 0 \Longleftrightarrow \frac{dv_i}{dt} = 0, i = 1, 2, \cdots n,$$

而确定系统(1)稳定，解演化到 $E(v)$ 的局部极小值点. 其思想虽有新颖之处，但数学理论却欠严谨[4]. 若把(1)式的所有平衡点当一集合 Ω，既使借助于 Lasalle 不变原理把 Hopfield 方法严格化，也仅能证明(1)式的某解 $u(t, t_0 u_0)$ 演化收敛到 Ω 中依赖于初始 u_0 的某点 $u^*(u_0), u^*(u_0)$ 不一定是吸引的，因为两个初始状况相差甚微的点 $u_0^{(1)}$，$u_0^{(2)}$ 对应的两个终态 $u^*(u_0^{(1)}), u_1^*(u_0^{(2)})$ 可能相差很大. 还可能是(1)式的鞍点型奇点，也不一定是 $E(v)$ 的局部极

1993-02-19 收稿，1993-04-28 收修改稿.

小质点,还可能是 $E(v)$ 的拐点. 因此, Ω 是否非空? 如非空, 研究哪些点吸引? 吸引域多大? 有无全局吸引子? 具体给一平衡, 它是否稳定, Hopfield 的计算能量函数法都无法回答.

因此,对于神经网络的稳定性,有必要深入研究. 本文的写作目的正是试图弥补 Hopfield 方法的上述不足, 取消 T 对称的假定, 对具体的平衡位置 (可借助于演化找到), 构造各种 Liapunov 函数,给出一系列渐近稳定、全局稳定的严格判据,揭示神经网络与生态系统稳定性之间的类似联系. 目前关于神经网络稳定性的正确判据,都是一次近似理论的应用,这些结果显然包含在本文的结果之中,本文还讨论了(1)式平衡态的存在唯一性.使之可广泛用 Lasalle 不变原理来研究它的渐近稳定性.

1 稳定性的系列判据

令 $u_i \triangleq G_i(v_i) \triangleq g_i^{-1}(v_i), i = 1,2,\cdots,n$. 设 $g_i(\cdot)$ 满足

$$g_i(0) = 0, g_i(u_i)u_i > 0, \text{当 } u_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n.$$

设

$$g_i'(u_i) = \frac{1}{G_i'(v_i)} > 0, i = 1,2,\cdots n. \tag{4}$$

故(1)式可以拓扑等价地化为

$$G_i'(v_i)C_i\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}v_j - \frac{G_i(v_i)}{R_i} + I_i. \tag{5}$$

故研究(1)式的平衡位置 $u_i = u_i^* = G_i(v_i^*)$ 的稳定性等价于研究(5)式的平衡位置 $v_i = v_i^* = g_i(u_i^*)$ 的稳定性.

定义 称 $A(a_{ij})_{n\times n}$ 为 Liapunov-Volterra 稳定(拟稳定). 若存在 $P = \mathrm{diag}(P_1,\cdots,P_n) > 0$, 使得 $A^tP + PA < 0 (\leqslant 0)$ 分别简记为 L-V 稳定 (拟 L-V 稳定).

其中 A^t 为 A 的转置. $P > (0 \geqslant 0)$. 表正定(半正定).

定理 1 若 $T = (T_{ij})_{n\times n}$ 拟 L-V 稳定,则 (5) 式的平衡态 $v = v^*$ (即 $v_i = v_i^*, i = 1,\cdots,n$) 渐近稳定.

证 改写(5)式为等价形式

$$G_i'(v_i)C_i\frac{d(v_i - v_i^*)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}(v_j - v_j^*) - \frac{G_i(v_i) - G_i(v_i^*)}{R_i}, i = 1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

由假设知 $\exists\ P = \mathrm{diag}(P_1,\cdots,P_n) > 0$, 使得 $T^tP + PT \leqslant 0$, 取

$$W(v) = \sum_{i=1}^{n} P_iC_i\int_{v_i^*}^{v_i} G_i'(v_i)(v_i - v_i^*)dv_i. \tag{7}$$

显然, $W(v^*) = 0$, $\int_{v_i^*}^{v_i} G_i'(v_i)(v_i - v_i^*)dv_i > 0$, 当 $v_i \neq v_i^*, i = 1,2,\cdots,n$. 故 W 在 $v = v^*$ 的邻域内正定.由于 $G_i'(v_i)$ 连续, 故 W 可微. 沿(6)式之解对 W 求导, 有

$$\left.\frac{dW(v)}{dt}\right|_{(6)} = (v - v^*)^t(T^tP + PT)(v - v^*)$$

$$-\sum_{i=1}^{n} P_i\left(\frac{G_i(v_i)-G_i(v_i^*)}{R_i}\right)(v_i-v_i^*)$$

$$\leqslant -\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{R_i}(G_i(v_i)-G_i(v_i^*))(v_i-v_i^*)<0,\ \text{当}\ v\neq v^*.$$

故 $v=v^*$ 渐近稳定.

推论 1　若下列条件之一满足:

(1) T 为 L-V 稳定;　(2) $T=T^t\leqslant 0$;

(3) $T^t+T\leqslant 0$;　(4) T 为反对称.

则(6)式的平衡态是渐近稳定的.

因为(1)—(4)之一均蕴涵 T 为拟 L-V 稳定.

定理 2　若 $T_{ii}<0(i=1,2,\cdots n)$, 且 $((-1)^{\delta_{ij}}|T_{ij}|)_{n\times n}$ 稳定. 则(6)式的平衡位置 $v=v^*$ 渐近稳定.

证　熟知 $((-1)^{\delta_{ij}}|T_{ij}|)_{n\times n}$ 稳定 $\Longleftrightarrow -((-1)^{\delta_{ij}}|T_{ij}|)_{n\times n}$ 为 M 矩阵. 由 M 矩阵性质知: 存在常数 $\xi_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\xi_i T_{ii}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\xi_i|T_{ij}|<0,\ j=1,2,\cdots,n.$$

对(6)式构造正定 Liapunov 函数

$$W(v)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i C_i\left|\int_{v_i^*}^{v_i} G_i'(v_i)\mathrm{d}v_i\right|.$$

沿(6)式的解对 $W(v)$ 求 Dini 导数:

$$D^+W(v)|_{(6)}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i C_i G_i'(v_i)\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\operatorname{sgn}(v_i-v_i^*)$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left[\xi_j T_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\xi_i|T_{ij}|\right]|v_j-v_j^*|$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i}{R_i}|G_i(v_i)-G_i(v_i^*)|<0,\ \text{当}\ v\neq v^*,$$

故结论成立.

验证 M 矩阵. 有构造性算法,下面推论更实用. 我们恒设 $T_{ii}<0(i=1,2,\cdots,n)$.

推论 2　若下列条件之一成立:

(1) $|T_{jj}|>\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|T_{ij}|, j=1,2,\cdots,n;$

(2) $|T_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|T_{ij}|, i=1,2,\cdots,n;$

(3) $\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{(1-\delta_{ij})T_{ij}}{T_{ii}}\right)^2<1$;

(4) $|T_{ii}|>\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(|T_{ij}|+|T_{ji}|)$;

(5) $\sum_{j=2}^{n}\left|\frac{T_{1j}}{T_{11}}\right|\triangleq\mu_1<1$, $\left|\frac{T_{21}}{T_{22}}\right|\mu_1+\sum_{j=3}^{n}\left|\frac{T_{2j}}{T_{22}}\right|\triangleq\mu_2<1,\cdots,$

$\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{T_{nj}}{T_{nn}}\right|\mu_j\triangleq\mu_n<1$;

(6) $\sum_{j=1}^{n}\rho^{(j)}\triangleq\rho<1$. 这里,

$\rho^{(1)}\triangleq\max_{2\leqslant j\leqslant n}\left|\frac{T_{1j}}{T_{11}}\right|$, $\rho^{(2)}\triangleq\left[\left|\frac{T_{21}}{T_{22}}\right|\rho^{(1)}+\max_{3\leqslant j\leqslant n}\left|\frac{T_{2j}}{T_{22}}\right|\right]\cdots,$

$\rho^{(n)}\triangleq\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{T_{nj}}{T_{nn}}\right|\rho^{(j)}$.

则(6)式的平衡态 $v=v^*$ 渐近稳定.

因为以上条件之一均蕴涵 $((-1)^{\delta_{ij}}|T_{ij}|)_{n\times n}$ 稳定。

定理 3 若下列条件之一满足:

(1) 存在常数 $\xi_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\xi_jT_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\xi_i|T_{ij}|\leqslant 0;$$

(2) $T_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|T_{ij}|\leqslant 0$.

则(6)式的平衡态 $v=v^*$ 是渐近稳定的。

证 若条件(1)成立,则可选 Liapunov 函数

$$W(v)=\sum_{i=1}^{n}\xi_iC_i\left|\int_{v_i^*}^{v_i}G_i'(v_i)\mathrm{d}v_i\right|,$$

$$D^+W(v)|_{(6)}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left[\xi_jT_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\xi_i|T_{ij}|\right]|v_j-v_j^*|$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j}{R_j}|G_j(v_j)-G_j(v_j^*)|$$

$$\leqslant-\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j}{R_j}|G_j(v_j)-G_j(v_j^*)|<0,\quad \text{当 } v\neq v^*.$$

若条件(2)满足,则可作 Liapunov 函数

$$W(v)\triangleq\max_{1\leqslant j\leqslant n}|v_j-v_j^*|\triangleq|v_l-v_l^*|,$$

$$D^+W(v)|_{(6)}\leqslant\frac{1}{C_lG_l'(v_l)}\left[T_{ll}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{n}|T_{lj}|\right]|v_l-v_l^*|$$

$$-\frac{|G_l(v_l)-G_l(v_l^*)|}{C_lG_l'(v_l)}$$

$$\leqslant-\frac{|G_l(v_l)-G_l(v_l^*)|}{C_lG_l'(v_l)}<0,\ \text{当}\ v\neq v^*.$$

故定理 3 结论成立.

注 1　定理 3 条件比定理 2 弱. 如:

$T_{ij}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 满足定理 3 但不满足定理 2 条件. 但定理 2 条件好验证.

注 2　在上述定理中, 在 $v=v^*$ 的使 $W(v)$ 正定的邻域与使 $D^+W(v)$ 负定的邻域的交域,便是 $v=v^*$ 的吸引区域,此交域越大,吸引域越大. 神经网络的宽错性越大.

定理 4　若定理 1 条件满足, 还有

$$\int_{v_i^*}^{\pm\infty}G_i'(v_i)(v_i-v_i^*)\mathrm{d}v_i=+\infty,\ i=1,2,\cdots,n.$$

则(6)式的平衡态 $v=v^*$ 全局稳定, 从而 $v=v^*$ 是唯一的吸引子.

定理 5　若定理 2 条件满足,还有

$$\left|\int_{v_i^*}^{\pm\infty}G_i'(v_i)\mathrm{d}v_i\right|=+\infty,\ i=1,2,\cdots,n.$$

则(6)式的平衡态 $v=v^*$ 全局稳定.

定理 6　若定理 3 条件满足,且

$$\left|\int_{v_i^*}^{\pm\infty}G_i'(v_i)\mathrm{d}v_i\right|=+\infty,$$

或定理 3 的条件(2)满足. 则(6)式的平衡 $v=v^*$ 全局稳定。

分别可作经向无界正定 Liapunov 函数

$$W(v)=\sum_{i=1}^{n}P_iC_i\int_{v_i^*}^{v_i}G_i'(v_i)(v_i-v_i^*)\mathrm{d}v_i;$$

$$W(v)=\sum_{i=1}^{n}\xi_iC_i\left|\int_{v_i^*}^{v_i}G_i'(v_i)\mathrm{d}v_i\right|.$$

仿定理 1,2,3 证定理 4,5,6. 略. 也有类似于定理 1,2,3 的推导,皆略。

下面利用一次近似理论来研究(6)式平衡态稳定性. 令

$$b_{ij}\triangleq\begin{cases}\dfrac{\partial\left(\dfrac{T_{ii}v_i}{C_iG_i'(v_i)}-\dfrac{G_i(v_i)}{C_iR_iG_i'(v_i)}\right)}{\partial v_i}\Big|_{v_i=v_i^*},\ i=j=1,2,\cdots,n,\\ \dfrac{\partial\left(\dfrac{T_{ij}v_j}{C_iG_i'(v_i)}-\dfrac{G_i(v_i)}{C_iR_iG_i'(v_i)}\right)}{\partial v_j}\Big|_{v_i=v_i^*\ v_j=v_j^*},\ i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n.\end{cases}\tag{8}$$

定理 7 若 $((-1)^{\delta_{ij}}|b_{ij}|)_{n\times n}$ 稳定，则 $b_{ii}<0(i=1\cdots,n)$，蕴涵(6)式平衡态 $v=v^*$ 渐近稳定；若至少有一个 $b_{i_0i_0}>0$，则(6)式的平衡态 $v=v^*$ 不稳定。

证 (6)式的一次近似系统为

$$\frac{dv}{dt}=B(v-v^*),\quad B=(b_{ij})_{n\times n}. \tag{9}$$

(i) $((-1)^{\delta_{ij}}|b_{ij}|)_{n\times n}$ 稳定，且 $b_{ii}<0(i=1,2,\cdots,n)$ 等价于存在常数 $\xi_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\xi_i b_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\xi_i|b_{ij}|<0,\quad i=1,2,\cdots n. \tag{10}$$

对(9)式，造 Liapunov 函数

$$W(v)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i|v_i-v_i^*|, \tag{11}$$

$$D^+W(v)|_{(9)}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{dv_i}{dt}\operatorname{sign}|v_i-v_i^*|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[\xi_i b_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\xi_i|b_{ij}|\right]|v_j-v_j^*|<0,\ \text{当 } v\neq v^*.$$

故 B 稳定。由一次近似理论知(6)式的解 $v=v^*$ 渐近稳定。

(ii) $((-1)^{\delta_{ij}}|b_{ij}|)_{n\times n}$ 稳定，且至少有某 $b_{i_0i_0}>0$。不失一般性，不妨设 $b_{ii}<0$, $i=1,2,\cdots,m$, $b_{ii}>0$, $i=m+1,\cdots,n$, $1\leqslant m\leqslant n$。由于 M 矩阵的性质，知存在常数 $\xi_i>0$，使得

$$\xi_i b_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\xi_i|b_{ij}|<0,\text{当 } i=1,2,\cdots,m,$$

$$-\xi_i b_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\xi_i|b_{ij}|<0,\ \text{当 } i=m+1,\cdots,n.$$

对(6)式作 Liapunov 函数

$$W(v)=\sum_{i=1}^{m}\xi_i|v_i-v_i^*|-\sum_{i=m+1}^{n}\xi_i|v_i-v_i^*|,$$

$$D^+W(v)|_{(6)}\leqslant\sum_{j=1}^{m}\left[\xi_j b_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\xi_i|b_{ij}|\right]|v_j-v_j^*|$$

$$-\sum_{j=m+1}^{n}\left[\xi_j b_{jj}-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\xi_i|b_{ij}|\right]|v_j-v_j^*|<0,\ \text{当 } v=v^*.$$

进而可证 $D^+W(v)|_{(6)}$ 在 $v=v^*$ 的某邻域内负定。从而(6)式的平衡态 $v=v^*$ 不稳定。

定理 8　若矩阵

$$\Omega \triangleq T - \mathrm{diag}\left(\frac{G_1(v_1)-G_1(v_1^*)}{R_1(v_1-v_1^*)},\cdots,\frac{G_n(v_n)-G_n(v_n^*)}{R_n(v_n-v_n^*)}\right)$$

在 $v=v^*$ 的某邻域内 L-V 稳定，则(6)式的平衡态 $v=v^*$ 渐近稳定。

证　由条件知存在 $P=\mathrm{diag}(P_1,\cdots,P_n)>0$，使得

$$P'\Omega+\Omega P\leqslant 0.$$

作 Liapunov 函数

$$W(v)=\sum_{i=1}^{n}P_iC_i\int_{v_i^*}^{v_i}G_i^*(v_i)(v_i-v_i^*)\mathrm{d}v_i,$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}W(v)}{\mathrm{d}t}\right|_{(6)}&=\sum_{i=1}^{n}P_iC_iG_i'(v_i)(v_i-v_i^*)\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\\&=\sum_{i=1}^{n}P_i(v_i-v_i^*)\left[\sum_{j=1}^{n}T_{ij}(v_j-v_j^*)-\frac{G_i(v_i)-G_i(v_i^*)}{R_i}\right]\\&=(v-v^*)^t(\Omega^tP+P\Omega)(v-v^*)<0,\ \text{当 } v\neq v^*.\end{aligned}$$

故结论成立。

推论 3　若矩阵 $\Omega^*\triangleq T-\mathrm{diag}\left(\frac{G_1'(v_1^*)}{R_1},\cdots,\frac{G_n'(v_n^*)}{R_n}\right)$ 对称负定。则(6)式的 $v=v^*$ 渐近稳定。

定理 9　若定理 8 中的 Ω 在 R^n 中是 L-V 稳定的，且

$$\int_{v_i^*}^{\pm\infty}G_i'(v_i)(v_i-v_i^*)\mathrm{d}v_i=+\infty.$$

则(6)式的解 $v=v^*$ 全局稳定。

证　仿定理 8 作径向无界正定函数 $W(v)$ 即得证。略。

定理 10　若在 $v=v^*$ 的某邻域内

$$T_{ii}-\frac{G_i(v_i)-G_i(v_i^*)}{R_i(v_i-v_i^*)}<0,\ i=1,2,\cdots n.$$

存在常数 $\xi_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\xi_i\left(\frac{G_i(v_i)-G_i(v_i^*)}{R_i(v_i-v_i^*)}-T_{ii}\right)+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\xi_j|T_{ij}|<0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

则(6)式的平衡态 $v=v^*$ 渐近稳定。

证　对(6)式作 Liapunov 函数

$$W(v)=\sum_{i=1}^{n}\xi_iC_i\left|\int_{v_i^*}^{v_i}G_i'(v_i)\mathrm{d}v_i\right|,$$

$$D^+W(v)|_{(6)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[\xi_i\left(T_{ii}-\frac{G_i(v_i)-G_i(v_i^*)}{R_i(v_i-v_i^*)}\right)+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\xi_i\right]|v_i-v_i^*|<0,\text{当 } v\neq v^*.$$

故结论成立。

推论 4 若 $T_{ii}-\frac{1}{R_i}G_i'(v_i^*)<0$，且

$$H^*=-\frac{1}{2}([1+(-1)^{\delta_{ij}}]|T_{ij}|)_{n\times n}+\operatorname{diag}\left(\frac{1}{R_1}G_1'(v_1^*)-T_{11},\cdots,\frac{1}{R_n}G_n'(v_n^*)-T_{nn}\right)$$

是一M矩阵，则(6)式的平衡态 $v=v^*$ 是渐近稳定的。

2 平衡态的存在唯一性

下面讨论非线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}T_{ij}g_j(u_j)-\frac{u_i}{R_i}+I_i=0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{12}$$

或

$$\sum_{j=1}^{n}T_{ij}v_j-\frac{G_i(v_i)}{R_i}+I_i=0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{13}$$

的正解的存在性问题。设 $G_i'\geqslant 0$，且有界。

定理 11 若 $-T(T_{ij})_{n\times n}$ 为 M 矩阵，则(13)式的正解是唯一存在的。

证 存在性。由条件知存在常数 $P_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 使

$$-P_iT_{ii}-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}P_jT_{ij}>0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

或

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{P_jT_{ij}}{-T_{ii}P_i}<1.$$

作变换 $v_i=P_i\xi_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.

则(13)式变为

$$\sum_{j=1}^{n}T_{ij}P_j\xi_j-\frac{G_i(P_i\xi_i)}{R_i}+I_i=0,\quad i=1,2,\cdots n. \tag{14}$$

将(14)式变为

$$\xi_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left(\frac{T_{ij}P_j}{-P_iT_{ii}+\dfrac{G_i'(\eta_i)P_i}{R_i}}\right)\xi_j+\left(\frac{I_i}{-P_iT_{ii}+\dfrac{G_i'(\eta_i)P_i}{R_i}}\right), \tag{15}$$

其中 η_i 是介于 0 与 $P_i\xi_i$ 之间的某数，

$$\frac{G_i'(\eta_i)P_i}{R_i}\geqslant 0,$$

(15)式的系数及自由项均为正数，且

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{T_{ij}P_j}{-P_iT_{ii}+\dfrac{G_i'(\eta_i)P_i}{R_i}}\right)\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{T_{ij}P_j}{-P_iT_{ii}}\right)<1.$$

对(15)式用普遍迭代法求解：

$$\begin{cases}\xi_i^{(m)}=\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{P_iT_{ij}}{-P_iT_{ii}+\dfrac{G_i'(\eta_i^{m-1})P_i}{R_i}}\right)\xi_j^{(m-1)}+\frac{I_i}{-P_iI_{ii}+\dfrac{G_i'(\eta_i^{(m-1)})P_i}{R_i}},\quad m=1,2,\cdots, & (16)\\ \xi_i^{(0)}=\dfrac{I_i}{(-P_iI_{ii}+M)}, & (17)\end{cases}$$

其中

$\left|\dfrac{G_i'(\eta_i)P_i}{R_i}\right|\leqslant M=\text{const}$．$\eta_i^{(m-1)}$ 是介于 0 与 $\xi_i^{(m-1)}$ 之间的数。可用归纳法证明对所有自然数 m，有

$$\xi_i^{(m)}\geqslant\frac{I_i}{-P_iT_{ii}+\dfrac{G_i'(\eta_i^{(m-1)})P_i}{R_i}}\geqslant\frac{I_i}{(-P_iT_{ii}+M)}>0. \tag{18}$$

令

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i^{(m)}\triangleq\xi^{(m)},\quad m=1,2,\cdots,$$

$$\rho\triangleq\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{P_iT_{ij}}{-T_{ii}P_i},\quad\lambda\triangleq\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{I_i}{-P_iT_{ii}}.$$

于是由(16)式有

$$\begin{aligned}\xi^{(m)}&\leqslant\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{P_iT_{ij}}{-P_iT_{ii}}\right)\xi^{(m-1)}+\lambda\\ &=\rho\xi^{(m-1)}+\lambda\leqslant\cdots\leqslant\rho^m\xi^{(0)}+\rho^{m-1}\lambda+\rho^{m-2}\lambda+\cdots+\lambda\\ &\leqslant\xi^{(0)}+\frac{\lambda}{1-\rho}<+\infty.\end{aligned}$$

故 $\{\xi_i^{(m)}\}$ 在 R_+^n 内是有界的。由聚点原理，不妨设 $\{\xi_i^{(m)}\}$ 为收敛于序列，从而

$$\xi_i\triangleq\lim_{m\to+\infty}\xi_i^{(m)}>0$$

存在 $(i=1,2,\cdots n)$，即 $v_i=P_i\xi_i(i=1,\cdots n)$ 为(13)式正解。

唯一性。设 $P_i\xi_i^*(i=1,2,\cdots,n)$ 也为(13)式的正解。于是有

$$-P_iT_{ii}\xi_i+\frac{G_i(\xi_iP_i)}{R_i}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\xi_i(P_iT_{ii})+I_i, \tag{19}$$

$$-P_iT_{ii}\xi_i^*+\frac{G_i(\xi_iP_i)}{R_i}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\xi_i^*P_iT_{ij}+I_i. \tag{20}$$

进而有

$$-P_iT_{ii}(\xi_i-\xi_i^*)+\frac{G_i'(\eta_i^*)P_i(\xi_i-\xi_i^*)}{R_i}=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}T_{ij}P_j(\xi_j-\xi_j^*),\tag{21}$$

其中 η_i^* 是介于 ξ_i 与 ξ_i^* 之间的数. 而

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i-\xi_i^*|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\frac{P_jT_{ij}}{-T_{ii}P_i+\frac{P_i}{R_i}G_i'(\eta_i^*)}\right|\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i-\xi_i^*|$$

$$\leqslant\rho\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i-\xi_i^*|.$$

故 $\xi_i=\xi_i^*$, $i=1,2,\cdots n$. 唯一性证毕. 定理得证.

定理 12 若 $T_{ii}\leqslant 0, T_{ij}\geqslant 0(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$, 存在常数 $\xi_i>0, i=1,2,\cdots,n$, 使得

$$\xi_jT_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\xi_i|T_{ij}|\leqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n.\tag{22}$$

又 $G_i'(u_i)\geqslant\varepsilon>0$, ε 为某常数. 则(13)式的正解存在唯一.

证 沿用(14)—(15)式. (15)式的系数和自由项均为正. 且

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left(\frac{T_{ij}P_j}{-T_{ii}P_i+\frac{G_i'(\eta_i)P_i}{R_i}}\right)\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left(\frac{T_{ij}P_j}{-P_iT_{ii}+\frac{\varepsilon P_i}{R_i}}\right)<1.\tag{23}$$

再沿用(16)—(18)式. 令

$$\xi^{(m)}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i^{(m)},\ m=1,2,\cdots,$$

$$\rho^*=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{T_{ij}P_j}{-P_iT_{ii}+\frac{\varepsilon P_i}{R_i}}\right),$$

$$\lambda^*=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{l_i}{-P_iT_{ii}+\frac{\varepsilon P_i}{R_i}}.$$

由(16)式, 有

$$\xi^{(m)}\leqslant\rho^{*m}\xi^{(0)}+\rho^{*m-1}\lambda^*+\cdots+\rho^*\lambda+\lambda$$

$$\leqslant\xi^{(0)}+\frac{\lambda^*}{1-\rho^*}<+\infty.\tag{24}$$

余下可仿定理12证(13)式有唯一正解.

定理 13 若 $T_{ii}\leqslant 0, T_{ij}\geqslant 0, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$, $G_i'(v_i)\geqslant l_i>0, i=1,2,\cdots,n$, 存在一组正数 $P_i>0$, 使得

$$\mu\triangleq\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{T_{ij}P_j}{\frac{l_iP_i}{R_i}}<1,\ i=1,2,\cdots n.\tag{25}$$

则(13)式的正解唯一存在.

证　沿用(14)—(15)式,则有

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{T_{ij}P_j}{-P_iT_{ii}+\dfrac{G_i'(\eta_i)P_i}{R_i}}\right)\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{T_{ij}P_j}{\dfrac{l_iP_i}{R_i}}\right)<1. \tag{26}$$

再沿用(16)—(18)式. 令

$$\lambda=\max\frac{l_i}{-\rho_iT_{ii}+\dfrac{l_iP_i}{R_i}}.$$

由(19)式有

$$\xi^{(m)}\leqslant\mu^m\xi^{(0)}+\mu^{m-1}\lambda+\cdots+\lambda<\xi^{(0)}+\frac{\lambda}{1-\mu}<+\infty.$$

余下可仿定理 11 证(13)式有唯一正解.

注 3　定理 11—13 关于 i 成立的不等式,换成关于 j 成立的不等式,结论仍然成立.

注 4　证明了(12),(13)式平衡位置的存在唯一性之后,有时可以借助于 Lasalle 不变原理证明平衡态的渐近稳定性.

致谢　感谢叶章剑教授、吴新余教授和作者进行了有益的讨论.

参　考　文　献

[1] Hopfiled, J. J., *Proc. Nate. Acad. Sci. U. S. A.*, 1982, 79: 2254—2558.

[2] Hopfield, J. J., *Proc. Nate. Acad. Sci. U. S. A.*, 1984, 81: 3088—3092.

[3] Hopfield, J. J., Tank, D. W, *Science*, 1986, 223:625—633.

[4] Liao Xiao Xin, Stability of general ecoloyical systems and neural networks systems, proc. of the first world congress of nonlinear analysis, WC313. 1992, 8, USA.