中 国 科 学
1991 年 3 月　　A 辑　　第 3 期

理想微裂纹系统中的随机扩展效应*

夏蒙棼** 柯孚久*** 吕永华 白以龙
（中国科学院力学研究所，非线性连续介质力学开放实验室，北京 100080）

摘　　要

本文讨论了在理想微裂纹系统中，由于微裂纹的随机性扩展，对微裂纹统计演化产生的效应．文中提供了一般的理论框架，给出了便于处理的转移概率的表达式．最后，用数值计算的例子展示了随机模型的统计演化特征，并比较了与确定性扩展模型下统计演化的异同．

关键词：理想微裂纹系统，随机扩展，转移概率，数密度演化方程

一、引　　言

在载荷作用下，材料内部萌生大量微裂纹，不断扩展、互相汇合，最终导致材料破裂，这是一类材料损伤的基本方式．目前，对这类损伤机制的研究尚不够充分．进一步探索材料内部微损伤的演化规律及其对材料宏观力学性质的影响有重要意义，近来已日益引起人们的重视．

在文献[1]中，我们基于微裂纹的确定性扩展模型，采用统计描述，研究了理想微裂纹系统的演化特征．所谓确定性扩展模型，指的是任一尺度为 c 的微裂纹其扩展速率均可表达为

$$\frac{dc}{dt} = A, \tag{1}$$

这里，A 是 c 以及若干反映载荷及材料宏观力学性质的参量的确定性的函数．

本文仍将讨论理想微裂纹系统，但不再局限于微裂纹扩展的确定性模型，而是要计及微裂纹扩展速率中可能出现的随机性涨落．我们提出一种更一般的模型，称为随机扩展模型．描写微裂纹扩展的细观动力学方程(1)被推广为

$$\frac{dc}{dt} = a, \tag{2}$$

这里，a 不再是确定性函数，而是一个随机变量．我们将假定存在一个截断尺度 c_1[1]，即当 $c \leqslant c_1$ 时 $a = 0$．

微裂纹扩展速率的随机涨落可起源于裂纹所处的局域条件对宏观平均条件的随机偏离．出现局域条件随机涨落的可能原因包括：材料内部的小尺度不均匀性以及应力分布的相应不

本文 1990 年 4 月 4 日收到，1990 年 7 月 26 日收到修改稿．
* 国家自然科学基金资助项目．
** 北京大学物理系，北京 100871．
*** 北京航空航天大学应用数学物理系，北京 100083．

均匀性；空间随机分布的微裂纹之间的互相影响，即耦合效应；微裂纹取向的随机性也相当于局域条件的一种随机涨落．不仅系统中尺度相同的各条微裂纹其扩展速率对平均速率呈现随机涨落，而且同一条微裂纹在扩展过程中其速率也将发生随机性变化，因为其前沿在推进过程中将感受到局域条件的随机涨落．文献[1]所采用的确定性扩展模型是在无随机涨落的极限条件下的一种简化．本文将阐明这类客观存在的局域性随机涨落，究竟在什么程度上，影响我们对微损伤演化的描述．

在确定性扩展模型中[1]，微裂纹的状态由其尺度 c 确定，可引入一维相空间 $\{c\}$ 进行统计描述，相空间中分布函数 $n(c, t)$ 称为微裂纹的数密度．在随机扩展模型中，微裂纹的状态由尺度 c 及扩展速率 a 两个互相独立的变量标志．为了进行统计描述，必须把一维相空间扩展为二维相空间 $\{c, a\}$．相应的分布函数记为 $f(c, a, t)$．

基于确定性扩展模型导出的微裂纹系统的演化方程是一个偏微分方程[1]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial c}(An) = S, \tag{3}$$

其中，S 是相空间 $\{c\}$ 中的成核率密度，它也是 c 及若干宏观参量的函数．在本文中，成核过程仍用 S 描写，但由于引入了随机扩展速率，数密度 n 的演化方程不再具有方程(3)的形式，本文将导出相应的演化方程，对演化过程的特征进行解析的和数值的研究，并与确定性扩展模型作比较．

二、微裂纹的随机扩展效应

相空间 $\{c, a\}$ 中的分布函数 $f(c, a, t)$ 是本文讨论的出发点，由于我们假定扩展速率(2)式存在截断尺度 c_1，同时，又由于裂纹变短（即 $a < 0$）的概率一般可以略去，因而可将相空间限于 $c_1 \leqslant c$ 及 $0 \leqslant a$ 的区域．

分布函数 $f(c, a, t)$ 对 a 的零级矩是子相空间 $\{c\}$ 中的平均数密度，与确定性模型中的 $n(c, t)$ 相应，本文亦将用 n 表示：

$$n(c, t) = \int_0^\infty f(c, a, t)da. \tag{4}$$

材料的宏观力学性质与 n 有密切关系，下文将导出随机模型中 n 的演化方程．

微裂纹的平均扩展速率联系于分布 $f(c, a, t)$ 对 a 的一级矩，与确定性模型中的扩展速率 A 相应，本文仍用 A 表示，有

$$\langle a\rangle = A = \frac{1}{n(c, t)}\int_0^\infty af(c, a, t)da. \tag{5}$$

借助于平均速率 A，可将细观动力学方程(2)改写为

$$\frac{dc}{dt} = A + \tilde{a}, \tag{6}$$

$\tilde{a}$ 是 a 的涨落部分，亦是一个随机变量，并有 $\langle\tilde{a}\rangle = 0$．一般说来，$A$ 与 $\tilde{a}$ 具有不同的时间尺度，A 属于慢变量而 $\tilde{a}$ 为快变量．令 $\tilde{a}$ 变化的特征时间为 t_c，并假定它决定于局域条件涨落的空间特征尺度 r．于是，t_c 可由裂纹从 c 扩展到 $(c + r)$ 的平均时间估计，即

$$t_c \sim \int_c^{c+r}\frac{dc'}{A(c')} \equiv r/\bar{A}, \tag{7}$$

这里，$\bar{A}$ 表示在 $(c, c+r)$ 范围中 A 的某种平均值.

定义扩展速率涨落量 $\tilde{a}$ 的自相关函数为

$$G(t_1, t_2) = \langle \tilde{a}(t_1)\tilde{a}(t_2)\rangle. \tag{8}$$

由于 $\tilde{a}$ 的特征时间 t_c 也就是它的自相关时间，相关函数近似地具有如下形式:

$$G(t_1, t_2) \cong \langle \tilde{a}^2\rangle \theta\left(\frac{t_1 - t_2}{t_c}\right), \tag{9}$$

其中，$\theta(y)$ 是中心在 $y=0$，特征宽度为 1/2 的函数，并有 $\int_{-\infty}^{\infty}\theta(y)dy = 1$.

平均而言，当时间间隔 $\Delta t > t_c$ 时，$\tilde{a}$ 才显示随机行为. $\langle\tilde{a}^2\rangle$ 描述涨落的强度，其特征变化时间大于 t_c，是慢变量. 扩展速率涨落的相对强度可定义为

$$\beta = \sqrt{\langle\tilde{a}^2\rangle}/A. \tag{10}$$

通常有 $\beta < 1$ 或 $\beta \ll 1$，由材料的实际条件确定.

$f(c, a, t)$ 作为随机变量 a 的分布函数通常有较复杂的形式，需大量信息才能确定. 大体而言，这是一个中心在 $a = A$，相对偏离为 β 的分布，当 β 不太小时是一个相当宽的分布. 在本文中，我们不去直接确定 f 的函数形式，而是由 a 导出另一个随机变量，它具有较简单的概率分布，可以导出其近似形式. 同时，它所包含的待定参量或函数较少，确定它比确定 f 所需的信息量少得多.

定义

$$\Delta c = \int_t^{t+\Delta t} a(t')dt', \tag{11}$$

Δc 是尺度为 c 的微裂纹在 $(t, t+\Delta t)$ 期间其尺度的增量，Δt 满足条件

$$\Delta t \gg t_c. \tag{12}$$

Δc 联系于随机变量 a 在 Δt 期间内的平均值，亦是一个随机变量. 条件(12)表示，Δc 是 a 在 Δt 期间内随机积累的结果，令 Δc 的概率分布函数为 $W(c, t; c+\Delta c, t+\Delta t)$，下面将确定 W 函数的形式.

Δc 的平均值为

$$\langle\Delta c\rangle = \int_t^{t+\Delta t}\langle a\rangle dt' \cong \int_t^{t+\Delta t} A dt'. \tag{13}$$

如果已知 $A = A(c)$ 的函数形式，可将(13)式改写为

$$\Delta t = \int_c^{c+\langle\Delta c\rangle}\frac{dc'}{A(c')} \equiv \frac{\langle\Delta c\rangle}{\bar{A}}. \tag{14}$$

由(14)式便可确定 $\langle\Delta c\rangle$ 作为 c 的函数. (14) 式中 $\bar{A}$ 是 $A(c)$ 在 $(c, c+\langle\Delta c\rangle)$ 范围的某种平均值.

Δc 的方差可由自相关函数 G 表示:

$$\langle(\Delta c - \langle\Delta c\rangle)^2\rangle = \int_t^{t+\Delta t}dt_1\int_t^{t+\Delta t}dt_2 G(t_1, t_2), \tag{15}$$

若以模型(9)式代入，便有

$$\langle(\Delta c - \langle\Delta c\rangle)^2\rangle = \bar{\beta}^2\bar{A}^2 t_c\Delta t, \tag{16}$$

式中上方带横道的量均代表在 $(c, c+\langle\Delta c\rangle)$ 范围的某种平均值. 由 Δc 的方差可定义弥

散系数

$$D = \frac{1}{2\Delta t}\langle(\Delta c - \langle\Delta c\rangle)^2\rangle = \frac{1}{2}\bar{\beta}^2\bar{A}^2 t_c. \tag{17}$$

引入一个参量

$$g = 2\bar{\beta}^2\frac{t_c}{\Delta t}, \tag{18}$$

则 D 可表达为

$$D = g\frac{(\langle\Delta c\rangle)^2}{4\Delta t}. \tag{19}$$

由(12)式，有 $g \ll 1$. 顺便指出，在(13)式中略去了弥散效应对平均增量 $\langle\Delta c\rangle$ 的贡献，这是与 $\partial D/\partial c$ 有关的量，其相对贡献为 $\sim\frac{1}{8}g\frac{\langle\Delta c\rangle}{c} \ll 1$.

Δc 的概率分布函数 W 是一个中心在 $\Delta c = \langle\Delta c\rangle$，相对偏离为 $\sqrt{g/2} = \bar{\beta}\sqrt{t_c/\Delta t}$ 的分布. 由条件(12)，W 的相对偏离比 f 小得多. 这本质上是概率论中的中心极限定理在本问题上的表现.

定义特征函数[2]

$$\Phi(k) = \langle e^{ik\Delta c}\rangle = \int d(\Delta c)We^{ik\Delta c}, \tag{20}$$

W 是 Φ 的 Fourier 变换

$$W(c, t; c + \Delta c, t + \Delta t) = \frac{1}{2\pi}\int dk e^{-ik\Delta c}\Phi(k). \tag{21}$$

将 $\Phi(k)$ 作累积量展开：

$$\Phi(k) = \exp\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(ik)^m}{m!}u_m(\Delta c)\right], \tag{22}$$

其中 $u_m(\Delta c)$ 是第 m 级累积量. 比较(20)与(21)式中相同 k^m 阶项的系数，可以得到前几级累积量的形式如下：

$$u_1(\Delta c) = \langle\Delta c\rangle, \tag{23}$$

$$u_2(\Delta c) = 2D\Delta t = \int_t^{t+\Delta t}dt_1\int_t^{t+\Delta t}dt_2\langle\tilde{a}(t_1)\tilde{a}(t_2)\rangle, \tag{24}$$

$$u_3(\Delta c) = \int_t^{t+\Delta t}dt_1\int_t^{t+\Delta t}dt_2\int_t^{t+\Delta t}dt_3\langle\tilde{a}(t_1)\tilde{a}(t_2)\tilde{a}(t_3)\rangle. \tag{25}$$

如果涨落不太强并且相关时间较短，则高级累积量可以略去，在特征函数中只须保留前几级累积量便可得到较好的近似. 注意，一级累积量 u_1 即为 Δc 的平均值，而二级累积量 u_2 是 Δc 的方差.

我们只保留前两级累积量，则特征函数为

$$\Phi(k) = \exp[ik\langle\Delta c\rangle - k^2D\Delta t]. \tag{26}$$

由(21)及(26)式，并略去微裂纹变短（即 $\Delta c < 0$）的概率，便可得到 W 的一个合理的近似式，如下：

$$W(c,t;c+\Delta c,t+\Delta t)=\begin{cases}0, & \text{当 } \Delta c<0,\\ \dfrac{\eta}{\sqrt{4\pi D\Delta t}}\exp\left[-\dfrac{(\Delta c-\langle\Delta c\rangle)^2}{4D\Delta t}\right], & \text{当 } \Delta c\geqslant 0,\end{cases} \tag{27}$$

其中 η 为规一因子，当 $g\ll 1$ 时，$\eta\cong 1$. (27)式是一个在 $\Delta c<0$ 区被截断的 Gauss 分布，中心在 $\Delta c=\langle\Delta c\rangle$，相对偏离为 $\sqrt{g/2}$. 只要知道平均扩展速率 $A(c)$ 的函数形式（从而可求出 $\langle\Delta c\rangle$）以及描写扩展速率随机涨落的参量 g，便可确定 W. A 和 g 均取决于材料的实际条件.

对整个微裂纹系统而言，尺度 c 可视为一个随机变量，其概率密度分布正比于 $n(c,t)$:

$$\rho(c,t)=n(c,t)\Big/\int_{c_1}^{\infty}n(c',t)dc'. \tag{28}$$

$W(c,t;c+\Delta c,t+\Delta t)$ 可看作是条件概率，代表 t 时刻取值为 c 的随机变量在 $t+\Delta t$ 时刻取值为 $c+\Delta c$ 的概率密度. 由于我们取 Δt 远大于相关时间 t_c，条件概率完全由 t 时刻的 c 值确定，与更早时刻的信息无关. 因此，用这种方式描写扩展效应，它便呈现为一种 Markoff 过程. 如果已知 t 时刻微裂纹系统的数密度 $n(c,t)$，由 $W(c,t;c+\Delta c,t+\Delta t)$ 便可确定这些裂纹因扩展效应而导致的在 $t+\Delta t$ 时刻的数密度分布. 因此，W 又可称为描写扩展效应的转移概率.

三、随机扩展模型中微裂纹系统的演化特征

在理想微裂纹系统中，数密度分布 $n(c,t)$ 的演化由成核与扩展过程决定，并且这两种过程互相是统计独立的. 根据转移概率的意义，在随机扩展模型中数密度 n 的演化方程可表达为

$$n(c,t+\Delta t)=\Delta n_s+\int_{c_1}^{c}n(c',t)W(c',t;c,t+\Delta t)dc', \tag{29}$$

其中，右端第一项是 $(t,t+\Delta t)$ 期间成核过程的贡献，而第二项则为扩展过程的贡献.

成核项可用成核率密度 S 表示:

$$\Delta n_s=S\Delta t. \tag{30}$$

此式略去了在 $(t,t+\Delta t)$ 期间萌生的裂纹在此期间内的扩展效应，适用于 $S(c)$ 函数比较平缓的情形. 为计入扩展效应引起的修正，可借助于方程(3)解的形式[1]，把成核项写成

$$\Delta n_s=\frac{1}{A(c)}\int_{c_0}^{c}S(c')dc', \tag{31}$$

其中，当 $\int_{c_1}^{c}dc'/A(c')\leqslant\Delta t$ 时 $c_0=c_1$，而在相反的条件下，c_0 由 $\int_{c_1}^{c}dc'/A(c')=\Delta t$ 确定. (31)式计入了扩展效应的平均修正，不包含涨落引起的更高级的修正.

在无涨落的极限下（即 $D\to 0$），转移概率 W 为 δ 函数，而演化方程(29)则回到确定性模型的演化方程(3). 由于 n 的演化联系于 W 的积分效应，对 W 的细节并不十分敏感，因此，在确定性与随机两种模型中，$n(c,t)$ 的演化特征大体相似，但仍可显示某些重要差异.

在确定性扩展模型中，$n(c,t)$ 演化的一个典型特征是饱和现象[1]. 尺度为 c 的裂纹其饱和时间为

$$t_{st}(c)=\int_{c_1}^{c}\frac{dc'}{A(c')}. \tag{32}$$

这正是从截断尺度 c_1 扩展到 c 所需的时间. 饱和现象反映了初始条件的影响消失、成核与扩展过程的效应互相达到平衡.

在随机扩展模型中，裂纹从 c_1 扩展到 c 的时间

$$T=\int_{c_1}^{c}\frac{dc'}{a}=\int_{c_1}^{c}\frac{dc'}{A(c')+\tilde{a}} \tag{33}$$

是一个随机变量，其概率分布的中心大体在 $T=\langle T\rangle\sim t_{st}(c)$，而特征宽度可以估计出为 $t_{st}\tilde{\beta}\sqrt{t_c/t_{st}}=t_{st}\sqrt{g\Delta t/2t_{st}}$. 由于在 T 很大时，原则上仍有非零概率，因而，初始条件的影响只当 $t\to\infty$ 才完全消失. 于是，在随机模型中，饱和现象呈现为一种渐近行为. 可以估计出等效饱和时间为

$$t_{st}^{*}(c)\sim t_{st}(c)\left[1+\gamma\sqrt{\frac{g\Delta t}{2t_{st}(c)}}\right], \tag{34}$$

其中，γ 是一个数值系数，其合理范围大体在 $\gamma\sim 3$—4 ($T>t_{st}^{*}$ 的概率约为 $e^{-\gamma^2/2}$，例如取 $\gamma=3.7$ 时，是 10^{-3} 量级，这可作为对接近饱和值的程度的度量).

相应地，随机模型中饱和与未饱和区之间并无明显分界，而是一个逐渐过渡的模糊边界，等效边界的位置可估计为

$$C_{st}^{*}(t)\sim C_{st}(t)\left[1-\gamma\sqrt{\frac{g\Delta t}{2t_{st}}}\right], \tag{35}$$

其中，$C_{st}(t)$ 是确定性模型中饱和区的边界[1].

为了用数值计算演示 $n(c,t)$ 演化的一般特征，本文采用 A 和 S 的下列模型：

$$A=\alpha\sqrt{1-c_1^2/c^2}, \tag{36}$$

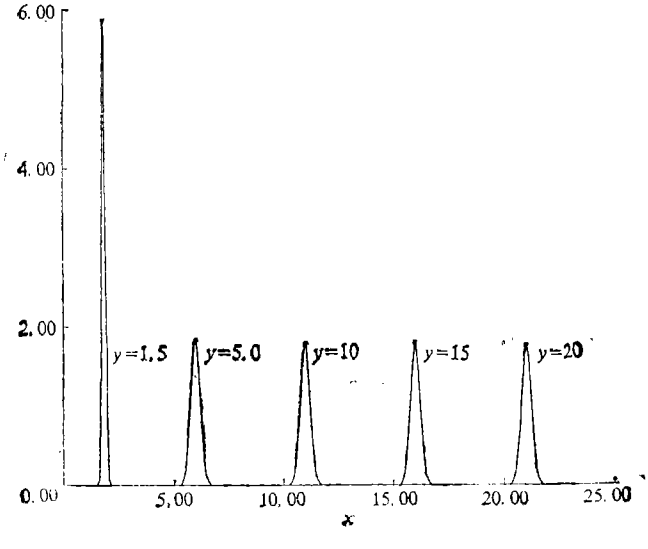

图 1　转移概率 $w(y,\tau;x,\tau+1)$

($b=1.5$，$g=0.1$；几条曲线分别相应于 $y=1.5,5,10,15$ 及 20)

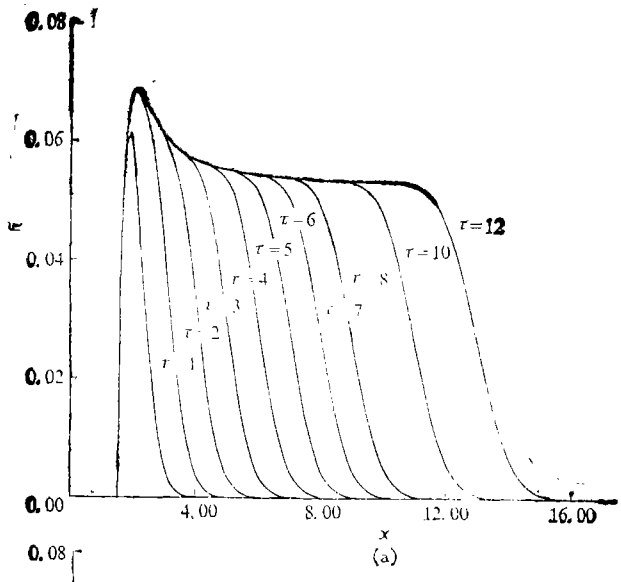

图 2(a) 随机模型数密度演化曲线
($b = 1.5$, $g = 0.1$)

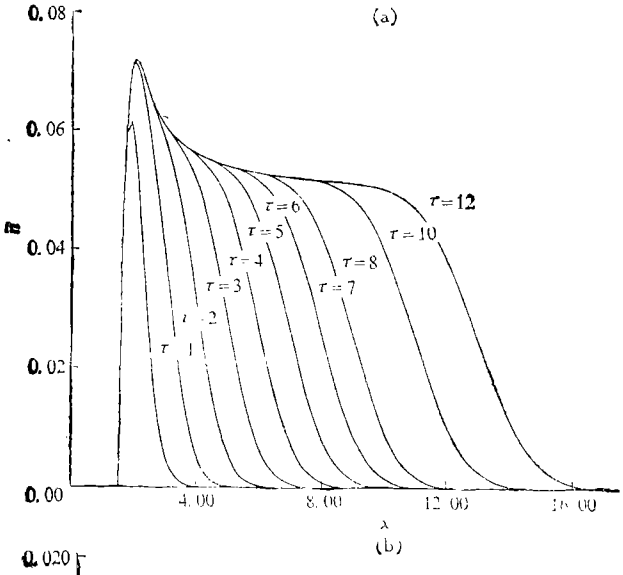

图 2(b) 随机模型数密度演化曲线
($b = 1.5$, $g = 0.3$)

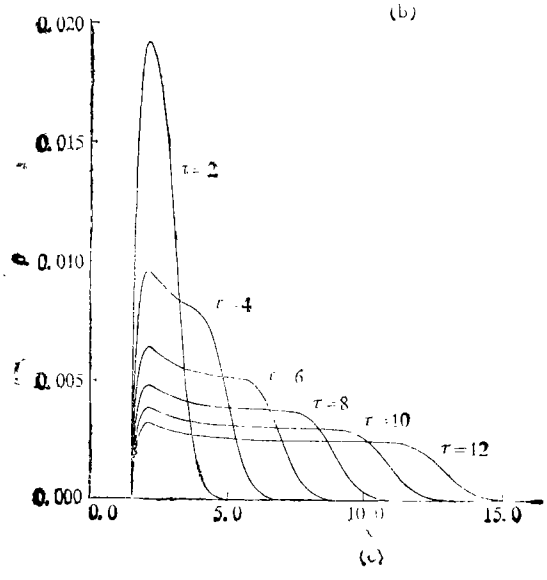

图 2(c) 概率分布 ρ 的演化曲线
($b = 1.5$, $g = 0.1$)

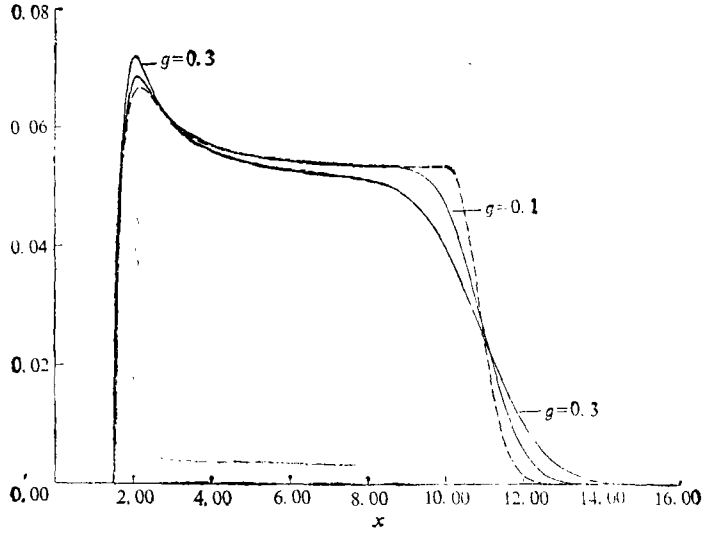

图 3　同一时刻（$\tau = 10$）不同模型下数密度分布曲线的比较

（虚线：确定性模型，$b = 1.5$；两条实线：随机模型，$b = 1.5$，$g = 0.1$ 与 $g = 0.3$）

$$S = S_0 \frac{c}{c_2} \exp(-c^2/c_2^2). \tag{37}$$

(36)式取自文献[3]. 对于反映随机涨落的组合参量 g，本文将选用若干试探性的值.

在数值计算中运用下列约化量：

$$x = \frac{c}{c_2},\quad \tau = \frac{\alpha t}{c_2},\quad \hat{n} = \frac{\alpha n}{S_0 c_2},\quad b = \frac{c_1}{c_2}.$$

取参数 $b=1.5$，$g=0.1$ 或 0.3，初始条件取为 $\hat{n}(x, 0)=0$，时间步长 $\Delta\tau=1$. 由 g 的定义(18)式，若 $t_c/\Delta t=0.1$，则 $g=0.1$ 相当于相对涨落强度 $\beta\sim 0.7$，这是不算太弱的相对涨落强度.

在图 1 中给出了转移概率 $w(y, \tau; x, \tau+1)$曲线，取 $b=1.5$，$g=0.1$，几条曲线分别相应于 $y = 1.5$，5，10，15 及 20.

图 2(a) 与 2(b) 分别给出随机扩展模型下，$g=0.1$ 与 $g=0.3$ 情形数密度的演化曲线. 可以看出，小尺度部分为近似饱和区，大尺度部分为未饱和区，二者之间为过渡区，它不断向大尺度方向推移. 图 2(c) 是概率分布 ρ ((28)式)的演化曲线，条件与图 2(a) 相同.

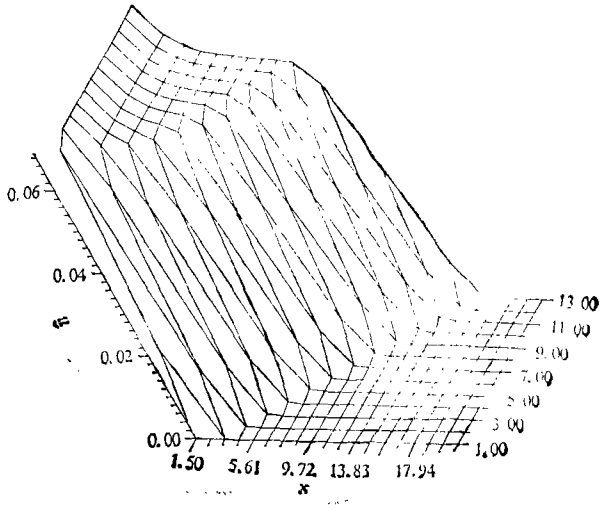

图 4　$\hat{n}$-x-τ 三维图

在图 3 中，同时作出了 $g = 0.1$ 和 $g = 0.3$ 的随机模型在 $\tau = 10$ 时刻的 $\hat{n}$-x 曲线. 可以看出，3 条曲线大体相近，但在饱和区与未饱和区分界附近有显著差异. 将计算所得的数据

与(34)和(35)式比较，得到数值因子大约为 $\gamma\sim3.7$，与量级估计相符.

图 4 是随机模型下 ($b=1.5$, $g=0.1$)，$\hat{n}$-x-τ 的三维图，显示了数密度分布演化的总体趋势.

四、结 论

本文提供了理想微裂纹系统统计描述的一种理论框架，这种理论基于成核过程的概率描述和扩展过程的随机模型.随机扩展模型的要点是：视裂纹扩展速率为随机变量，引入了相空间 $\{c, a\}$ 及相应分布函数 $f(c, a, t)$，由此导出描写裂纹扩展效应的转移概率 $W(c, t; c+\Delta c, t+\Delta t)$ 以及微裂纹数密度 $n(c, t)$ 的演化方程，确定性扩展模型[1]可看作是随机扩展模型的一种极限情形.

本文讨论了 $n(c, t)$ 的演化特征，并选用成核率 S 与平均扩展速率 A 的试探性模型以及随机涨落参量 g 的试探值，通过数值计算展示 $n(c, t)$ 的演化过程. 结果表明，即使随机涨落不太弱，随机模型与确定性模型所给出的 $n(c, t)$ 的演化特征仍然大体相似. 但是，两种模型所得的结果存在相当的差异，特别是在饱和与未饱和区分界附近差别尤为显著. 由这种模型所得到的关于微裂纹系统统计演化的特征，为研究实际材料中的微损伤问题提供了有意义的线索. 出现于理论中的 S, A 及 g 等应由实际材料的具体条件确定，至于如何确定这些函数或参量的问题已超出本文的范围，将另行讨论.

本文所考虑的理想微裂纹系统适用于损伤前期裂纹密度不太高的情形，只包含成核与扩展效应，略去了裂纹间的耦合效应和汇合(连接)过程.随着损伤进一步发展，裂纹密度增大，裂纹间的耦合效应和汇合过程逐渐变得重要，甚至起主导作用，尤其在破裂前夕更是如此. 对于这些效应，我们将另文阐述.

参 考 文 献

[1] 柯孚久、白以龙、夏蒙棼，中国科学 A 辑，1990，6:621.
[2] Reichl, L. E., 统计物理现代教程，北京大学出版社，1983，47.
[3] Berry, J. P., *J. Mech. Phys. Solids*, **31**(1960), 2233.