中 国 科 学
1989 年 4 月　　A 辑　　第 4 期

理想塑性晶体裂纹顶端渐近场*

王 自 强
(中国科学院力学研究所,北京)

摘　要

本文从晶体三维塑性流动理论出发，导出了双滑移理想塑性晶体平面应变问题的基本方程.利用这些方程求得了静止裂纹顶端应力变形场.该场包含有弹性角形区并且整个应力变形场是连续的. 进而导出了定常扩展裂纹顶端应力变形场. 该场由五个角形区组成: 裂纹前方有两个塑性区,它们的边界是速度场间断面. 裂纹面附近有一个二次塑性区,中间是两个卸载弹性区,它们交界面也是个速度场间断面. 该五个角形区不是唯一的. 本文得到了一簇解答. 最后本文分析了这些解答在面心立方和体心立方晶体中的应用.

关键词: 理想塑性晶体,应力变形场

一、引　言

近年来含裂纹晶体应力应变场的分析引起了一些学者的兴趣. Rice 和 Nikolic[1] 首先提出了理想塑性晶体反平面剪切裂纹的弹塑性分析. Rice 和 Saeedvafa[2] 得到了幂硬化晶体中反平面剪切裂纹顶端的 HRR 型奇性场. Rice[3] 的最新工作,分析了理想塑性晶体 I 型裂纹顶端的渐近场. 对于静止裂纹,他的解答含有间断应力场.

本文对理想塑性晶体 I 型裂纹顶端的渐近场进行了新的研究. 对静止裂纹,得到的解答,应力场是全连续的. 对定常扩展裂纹，本文得到了一簇解答，Rice[3] 的解只是本文的一个特例.

二、基 本 方 程

先对 Asaro[4] 提出的平面双滑移模型进行分析.如图 1 所示,这个模型晶体只有两个滑移系: 主滑移系与共轭滑移系. 设想裂纹位于两个滑移系的对称面上. 主滑移系的滑移方向的单位向量为 $\boldsymbol{m}^{(1)}$，滑移面的单位向量为 $\boldsymbol{n}^{(1)}$. 共轭滑移系的滑移方向单位向量为 $\boldsymbol{m}^{(2)}$，滑移面的单位向量为 $\boldsymbol{n}^{(2)}$.

讨论平面应变问题. 限于小变形,各向同性屈服. 我们有

本文 1988 年 1 月 21 日收到，1988 年 10 月 16 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目.

1. 屈服条件

$$\tau^{(\alpha)} = \tau_c, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4. \tag{2.1}$$

这里 $\tau^{(\alpha)}$ 是指作用在第 α 滑移系上的分解剪应力。我们已约定反向滑移作为另一个滑移系。有：

$$\tau^{(\alpha)} = a_{ij}P_{ij}^{(\alpha)}, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{P}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{m}^{(\alpha)}\otimes\boldsymbol{n}^{(\alpha)} + \boldsymbol{n}^{(\alpha)}\otimes\boldsymbol{m}^{(\alpha)}), \tag{2.3}$$

$\boldsymbol{m}^{(\alpha)}$, $\boldsymbol{n}^{(\alpha)}$ 分别表示向量 $\boldsymbol{m}^{(\alpha)}$, $\boldsymbol{n}^{(\alpha)}$ 的分量所组成的列阵。例如：

$$\boldsymbol{m}^{(1)} = \{\cos\varphi_0 \quad \sin\varphi_0 \quad 0\}^T$$
$$\boldsymbol{n}^{(1)} = \{-\sin\varphi_0 \quad \cos\varphi_0 \quad 0\}^T.$$

由此不难得到

$$\begin{cases} \tau^{(1)} = \dfrac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi_0 + \tau_{xy}\cos 2\varphi_0, \\ \tau^{(2)} = \dfrac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi_0 - \tau_{xy}\cos 2\varphi_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \tau^{(1)} = -\dfrac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r)\sin 2(\theta - \varphi_0) + \tau_{r\theta}\cos 2(\theta - \varphi_0), \\ \tau^{(2)} = \dfrac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r)\sin 2(\theta + \varphi_0) - \tau_{r\theta}\cos 2(\theta + \varphi_0). \end{cases} \tag{2.4'}$$

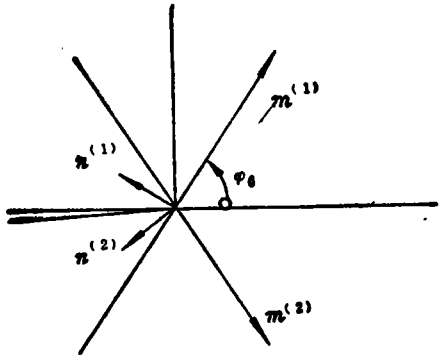


图 1　平面双滑移晶体模型

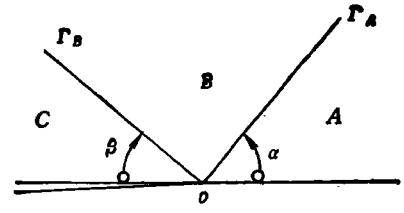


图 2　静止裂纹顶端渐近场的三个角形区

2. 本构关系

我们有

$$D_{ij} = \frac{(1+V)}{E}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{V}{E}\delta_{ij}\dot{\sigma}_{kk} + D_{ij}^P, \tag{2.5}$$

$$D_{ij}^P = \sum_{\alpha=1}^{4} P_{ij}^{(\alpha)}\dot{\gamma}^{(\alpha)}, \tag{2.6}$$

其中 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ 是第 α 滑移系的滑移剪切率。

应变率张量与速度场的关系为

$$D_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.7}$$

对于平面应变问题,有

$$D_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\mu}\dot{\sigma}_{\alpha\beta}-\frac{\nu}{2\mu}\delta_{\alpha\beta}\dot{\sigma}_{\rho\rho}+D^{p}_{\alpha\beta}, \tag{2.8}$$

其中 μ 是弹性剪切模量. 希腊字母 α,β,ρ 取值为 1, 2. 重复下标是求和的缩写.

渐近场的应力函数可表示为

$$\phi=r^2F(\theta). \tag{2.9}$$

此时屈服方程可表示为

$$\begin{cases}\tau^{(1)}=\dfrac{1}{2}F''\sin 2(\theta-\varphi_0)-F'\cos 2(\theta-\varphi_0)=\tau_c,\\ \tau^{(2)}=-\dfrac{1}{2}F''\sin 2(\theta+\varphi_0)+F'\cos 2(\theta+\varphi_0)=\tau_c.\end{cases} \tag{2.10}$$

三、静止裂纹顶端的应力变形场

裂纹顶端区由三个角形区组成(如图 2 所示),其中 B 区是弹性区. 利用(2.10)式, 不难证实

$$\alpha=\beta. \tag{3.1}$$

$$F=\begin{cases}\dfrac{k^*}{2}[A_1+\cos 2\theta], & \text{在 } A \text{ 区},\\ \dfrac{k^*}{2}[1-\cos 2\theta]+B_1\left[\theta-\bar{\beta}-\dfrac{1}{2}\sin 2(\theta+\beta)\right], & \text{在 } B \text{ 区},\\ \dfrac{k^*}{2}[1-\cos 2\theta], & \text{在 } C \text{ 区},\end{cases} \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{cases}A_1=1+2(\pi-2\alpha)/\sin 2\alpha,\\ B_1=-k^*/\sin 2\alpha,\quad k^*=\tau_c/\sin 2\varphi_0,\end{cases} \tag{3.3}$$

角度 α 是个自由参数. 不难证实,为了确保 B 区的应力场满足屈服约束,必有

$$\alpha=\beta\geqslant\max\left\{\varphi_0,\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right\}, \tag{3.4}$$

由公式(3.2)看出, A 区与 B 区都是均匀应力场. 在 A 区主滑移系与共轭滑移系将同时处于屈服状态. 现在来分析 A 区变形场. 由(2.6)式得

$$\begin{cases}D^{p}_{11}=-\dfrac{1}{2}(\dot{\gamma}_1+\dot{\gamma}_2)\sin 2\varphi_0,\\ D^{p}_{22}=\dfrac{1}{2}(\dot{\gamma}_1+\dot{\gamma}_2)\sin 2\varphi_0,\\ D^{p}_{12}=\dfrac{1}{2}(\dot{\gamma}_1-\dot{\gamma}_2)\cos 2\varphi_0\end{cases} \tag{3.5}$$

$$D_r^p = -D_\theta^p = \frac{1}{2}\{\dot{\gamma}_1 \sin 2(\theta-\varphi_0) - \dot{\gamma}_2 \sin 2(\theta+\varphi_0)\},$$
$$D_{r\theta}^p = \frac{1}{2}\{\dot{\gamma}_1 \cos 2(\theta-\varphi_0) - \dot{\gamma}_2 \cos 2(\theta+\varphi_0)\}. \tag{3.6}$$

这里 γ_1，γ_2 分别是主滑移系和共轭滑移系的滑移剪切率。令

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{1}{r}\,\tilde{\dot{\gamma}}_1(\theta),\quad \dot{\gamma}_2 = \frac{1}{r}\,\tilde{\dot{\gamma}}_2(\theta), \tag{3.7}$$

注意到 A 区的弹性应变率张量为零。公式(2.7)的极坐标形式为

$$\begin{cases} D_r = D_r^p = \dfrac{\partial V_r}{\partial r}, \\ D_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{V_r}{r}, \\ 2\cdot D_{r\theta} = 2D_{r\theta}^p = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} - \dfrac{V_\theta}{r}. \end{cases} \tag{3.8}$$

利用(3.8)式的前两个式子，得

$$\begin{cases} V_r = -h(\theta)\ln\left(\dfrac{R}{r}\right) - f_0(\theta), \\ V_\theta = H(\theta)\ln\left(\dfrac{R}{r}\right) - H(\theta) + f_0(\theta). \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} h(\theta) = \dfrac{1}{2}\{\tilde{\dot{\gamma}}_1 \sin 2(\theta-\varphi_0) - \tilde{\dot{\gamma}}_2 \sin 2(\theta+\varphi_0)\}, \\ H(\theta) = \displaystyle\int h(\theta)d\theta. \end{cases} \tag{3.10}$$

利用(3.8)式的第三式，导得如下协调方程

$$\begin{cases} H''(\theta) + H(\theta) = 0, \\ f_0'' + f_0 = \tilde{\dot{\gamma}}_2 \cos 2(\theta+\varphi_0) - \tilde{\dot{\gamma}}_1 \cos 2(\theta-\varphi_0), \end{cases} \tag{3.11}$$

注意到 $\theta = 0$ 处，$V_\theta = 0$，而且 $\theta = \alpha$ 处，$V_\theta = 0$，立即导出 $H(\theta) = h(\theta) = 0$，

$$\begin{cases} \tilde{\dot{\gamma}}_1 = -\sin 2(\theta+\varphi_0)[f_0'' + f_0]/\sin 4\varphi_0, \\ \tilde{\dot{\gamma}}_2 = -\sin 2(\theta-\varphi_0)[f_0'' + f_0]/\sin 4\varphi_0. \end{cases} \tag{3.12}$$

讨论 $\varphi_0 > \dfrac{\pi}{4}$ 的情况，为了确保 $\tilde{\dot{\gamma}}_1$，$\tilde{\dot{\gamma}}_2$ 非负，必有

$$\begin{cases} f_0'' + f_0 = 0,\ 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2} - \varphi_0, \\ \tilde{\dot{\gamma}}_1 = \tilde{\dot{\gamma}}_2 = 0,\ \text{或}\ \varphi_0 \leqslant \theta \leqslant \alpha, \end{cases}$$

只在区域 $\dfrac{\pi}{2} - \varphi_0 < \theta < \varphi_0$ 中，只要 $(f_0'' + f_0) < 0$，就能得到正的 $\tilde{\dot{\gamma}}_1$，$\tilde{\dot{\gamma}}_2$。由此说明应变只能集中在一个比较窄的区域(从渐近意义上说)。

四、扩展裂纹顶端的应力变形场

如图 3 所示，极坐标系的坐标原点随裂纹顶端一起移动。裂纹顶端由五个角形区组成

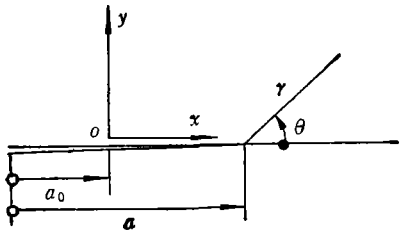


图 3 扩展裂纹顶端的极坐标系

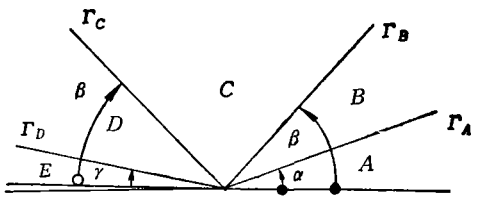


图 4 定常扩展裂纹顶端的渐近场，五个角形区

(见图 4)其中 A, B 是均匀应力区，C 和 D 是卸载弹性区，E 区是二次塑性区。

角度 $\alpha = \min\left(\varphi_0, \frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$, $\beta = \max\left(\varphi_0, \frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$, 角度 γ 是待定参数。

渐近场的应力函数可表示为

$$\phi = r^2 F(\theta), \tag{4.1}$$

$$F(\theta) = \begin{cases} \frac{k^*}{2}[A_1 + \cos 2\theta], & \text{在 } A, B \text{ 区}, \\ \frac{C_1^*}{4} F_1(\theta) + \frac{C_1^*}{4}\theta + C_3 + C_4[1 - \cos 2(\theta - \beta)] + C_5 \sin 2(\theta - \beta), & \text{在 } C \text{ 区}, \\ \frac{D_1^*}{4} F_1(\theta) + \frac{D_1^*}{4}\theta + D_3 + D_4[1 - \cos 2(\theta - \gamma)] + D_5 \sin 2(\theta - \gamma), & \text{在 } D \text{ 区}, \\ \frac{k^*}{2}[1 - \cos 2\theta], & \text{在 } E \text{ 区}. \end{cases} \tag{4.2}$$

利用 Γ_B 处应力分量连续条件，推得

$$\begin{cases} C_3 = \frac{k^*}{2}(A_1 + \cos 2\beta) - \frac{C_1^*}{4} F_1(\beta) - \frac{C_1^*}{4}\beta, \\ C_4 = -\frac{k^*}{2}\cos 2\beta - \frac{C_1^*}{4}(\ln \sin\beta - F_1(\beta)), \\ C_5 = -\frac{k^*}{2}\sin 2\beta - \frac{C_1^*}{4}\cdot\frac{1}{2}F_1'(\beta), \quad -\frac{C_1^*}{8}. \end{cases} \tag{4.3}$$

利用 Γ_D 处应力分量连续条件，推得

$$\begin{cases} D_3 = \frac{k^*}{2}(1 - \cos 2\gamma) - \frac{D_1^*}{4} F_1(\gamma) - \frac{D_1^*}{4}\gamma, \\ D_4 = \frac{k^*}{2}\cos 2\gamma - \frac{D_1^*}{4}(\ln \sin\gamma - F_1(\gamma)), \\ D_5 = \frac{k^*}{2}\sin 2\gamma - \frac{D_1^*}{4}\cdot\frac{F_1'(\gamma)}{2} - \frac{D_1^*}{8}. \end{cases} \tag{4.4}$$

这里 $\gamma = \pi - \gamma$,

$$F_1(\theta) = (1 - \cos 2\theta)\ln \sin\theta - \theta \sin 2\theta - \cos^2\theta, \tag{4.5}$$

边界 Γ_C 处应力分量全连续条件导致

$$\frac{1}{4}(C_1^*-D_1^*)F_s(\bar\beta)+\frac{1}{4}(C_2^*-D_2^*)\bar\beta+(C_3-D_3)$$
$$+C_4[1-\cos 2(\bar\beta-\beta)]+C_5\sin 2(\bar\beta-\beta)$$
$$-D_4[1-\cos 2(\bar\beta-\bar\gamma)]-D_5\sin 2(\bar\beta-\bar\gamma)=0, \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{4}(C_1^*-D_1^*)F_s'(\bar\beta)+\frac{1}{4}(C_2^*-D_2^*)+2C_4\sin 2(\bar\beta-\beta)$$
$$+2C_5\cos 2(\bar\beta-\beta)-2D_4\sin 2(\bar\beta-\bar\gamma)-2D_5\cos 2(\bar\beta-\bar\gamma)$$
$$=0, \tag{4.7}$$

$$(C_1^*-D_1^*)(\ln\sin\bar\beta-F_s(\bar\beta))+4C_4\cos 2(\bar\beta-\beta)-4C_5\sin 2(\bar\beta-\beta)$$
$$-4D_4\cos 2(\bar\beta-\bar\gamma)-4D_5\sin 2(\bar\beta-\bar\gamma)=0. \tag{4.8}$$

由于 $\theta=\bar\beta=\pi-\beta$ 处，速度场切向分量可以有间断，因此，在 $\theta=\bar\beta$ 附近有个无限狭窄的塑性区，它可以是滑移带或扭拆带．因此，必有

$$\tau^{(2)}=-\tau_c,\ \text{或}\ \tau^{(1)}=-\tau_c, \tag{4.9}$$

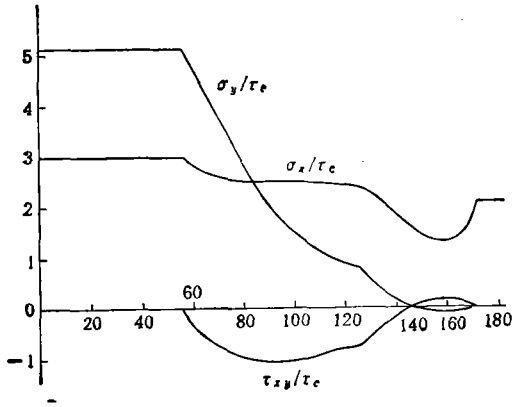


图 5　定常扩展裂纹顶端的应力场
($\gamma=9.009°$)

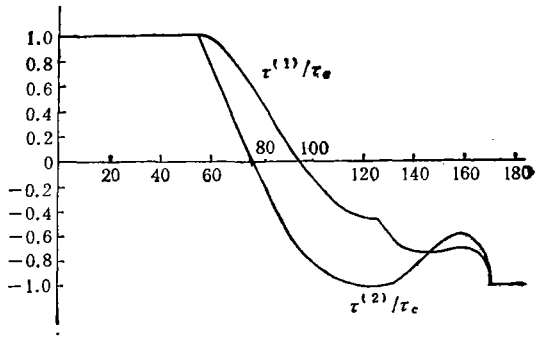


图 6　定常扩展裂纹顶端的分解剪应力
($\gamma=9.009°$)

另一方面，速度场法向分量通过 Γ_c 处必须连续．这就导得：

$$C_1^*\sin\bar\beta-C_2^*\cos\bar\beta=D_1^*\sin\bar\beta-D_2^*\cos\bar\beta, \tag{4.10}$$

当物质元素通过速度场间断面时，应力对该元素所做的塑性功必定是非负的．这就导致如下约束条件：

$$\begin{cases}(D_1^*-D_1^*)/\cos\bar\beta\leqslant 0,\\ C_1^*\operatorname{tg}\beta-C_2^*\leqslant 0.\end{cases} \tag{4.11}$$

对于 $\varphi_0=54.74°$ 的情况，进行了典型计算．此时 $\alpha=35.26°$，$\beta=54.74°$．

计算表明，当 $9.009°\leqslant\gamma\leqslant 12.7°$ 时，对每个 γ 可以找到一个合理解答．这个解答满足渐近场的所有方程和全部约束条件．

当 $\gamma=12.7°$ 时，所得结果与 Rice[3] 的结果一致．此时通过边界 Γ_A 时，速度场是连续的．

图 5 绘出了 $\gamma=9.009°$ 时的裂纹顶端区域的应力场分布．图 6 显示了分解剪应力 $\tau^{(1)}$，

$\tau^{(2)}$ 的周向分布图。计算表明，边界 Γ_A, Γ_B, Γ_C 处均存在速度场间断。

五、在立方晶体中的应用

面心立方晶体的晶轴坐标系绘于图 7。前面采用的空间固定的直角坐标系 $oxyz$，其 x 轴指向晶轴[101]。y 轴指向晶轴[010]。

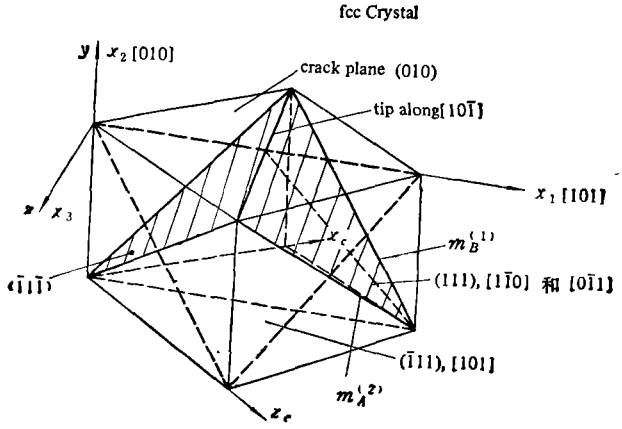


图 7 含裂纹面心立方晶体
(裂纹位于(101)面上，裂纹前缘沿着[10$\bar{1}$]方向)

裂纹面位于(010)晶面。裂纹顶端沿着晶轴[10$\bar{1}$]。这样的含裂纹晶体受到沿 z 方向均匀分布的平行于 oxy 平面的外力作用时将产生平面应变。

在滑移面(111)上有三个滑移方向[10$\bar{1}$],[1$\bar{1}$0]和[0$\bar{1}$1]。显然当后面两个滑移系同时等量开动时将产生平面应变。事实上记(111)[1$\bar{1}$0]为第 $2A$ 滑移系。它的滑移面单位法向量为 $\boldsymbol{n}^{(2)}$，滑移方向的单位向量为 $\boldsymbol{m}_A^{(2)}$. 记(111)[0$\bar{1}$1]为第 $2B$ 滑移系，它的滑移面法线也是 $\boldsymbol{n}^{(2)}$. 而滑移方向的单位向量为 $\boldsymbol{m}_B^{(2)}$. 两个滑移系等量滑移产生相同的滑移剪切率 $\dot{\gamma}^{(2)}$，由此产生塑性应变率 $\boldsymbol{D}^P$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}^P &= (\boldsymbol{P}_A^{(2)} + \boldsymbol{P}_B^{(2)})\dot{\gamma}^{(2)} \\ &= \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{m}_A^{(2)} + \boldsymbol{m}_B^{(2)})\otimes\boldsymbol{n}^{(2)} + \boldsymbol{n}^{(2)}\otimes(\boldsymbol{m}_A^{(2)} + \boldsymbol{m}_B^{(2)})\}\dot{\gamma}^{(2)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\{\boldsymbol{m}^{(2)}\otimes\boldsymbol{n}^{(2)} + \boldsymbol{n}^{(2)}\otimes\boldsymbol{m}^{(2)}\}\dot{\gamma}^{(2)} \\ &= \sqrt{3}\,\boldsymbol{P}^{(2)}\dot{\gamma}^{(2)},\end{aligned} \tag{5.1}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}^{(2)} = \dfrac{1}{2}\ (\boldsymbol{m}^{(2)}\otimes\boldsymbol{n}^{(2)} + \boldsymbol{n}^{(2)}\otimes\boldsymbol{m}^{(2)}), \\ \boldsymbol{m}^{(2)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{m}_A^{(2)} + \boldsymbol{m}_B^{(2)}).\end{cases} \tag{5.2}$$

类似的滑移面($\bar{1}$1$\bar{1}$)上也有三个滑移方向($\bar{1}$01), (011), (110). 后两个滑移系同时等量滑移也会产生平面塑性应变

$$\boldsymbol{D}^p=\sqrt{3}\,\boldsymbol{P}^{(1)}\dot{\gamma}^{(1)}, \tag{5.3}$$

其中

$$\boldsymbol{P}^{(1)}=\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{m}^{(1)}\otimes\boldsymbol{n}^{(1)}+\boldsymbol{n}^{(1)}\otimes\boldsymbol{m}^{(1)}).$$

由(5.1)和(5.3)式，得

$$\boldsymbol{D}^p=\sqrt{3}\,(\boldsymbol{P}^{(1)}\dot{\gamma}^{(1)}+\boldsymbol{P}^{(2)}\dot{\gamma}^{(2)}). \tag{5.4}$$

将(5.4)式与(2.6)式比较，不难看出，只要将这里的 $\sqrt{3}\,\dot{\gamma}^{(1)}$，$\sqrt{3}\,\dot{\gamma}^{(2)}$ 比作平面双滑移晶体模型中的 $\dot{\gamma}^{(1)}$，$\dot{\gamma}^{(2)}$，那么两者就等价了。严格地说滑移系$(\bar{1}11)[101]$及$(11\bar{1})[101]$的等量滑移也会产生平面塑性应变。但是对于我们所讨论的问题，这两个滑移系并不处于屈服状态。

现在来讨论屈服条件。作用在第 $2A$ 和第 $2B$ 滑移系上的分解剪应力是

$$\tau_A^{(1)}=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{P}_A^{(2)},\quad \tau_B^{(1)}=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{P}_B^{(2)},$$

这两个滑移系同时开动，必有

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{P}_A^{(2)}=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{P}_B^{(2)}=\tau,$$

这里 τ 是面心立方晶体第 $2A$、第 $2B$ 滑移系的临界剪应力。由此导出

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{P}^{(2)}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\tau=\tau_c. \tag{5.5}$$

这说明平面双滑移模型晶体中的临界剪应力 τ_c 是面心立方晶体临界剪应力 τ 的 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍。这样前面的分析就可以用到面心立方晶体中来。

六、结论与讨论

通过以上的分析可以得出如下结论：

1. 晶体的平面双滑移模型对于阐明平面应变的裂纹顶端场是合适的。对于静止裂纹，渐近场不是唯一的。为了得到连续分布的应力场和位移场，端部区域必定含有弹性区域。本文提出的三个角形区组成的渐近场，满足了渐近场的全部方程和所有约束条件。本文证实在裂纹前方的塑性区内存在着一个应变集中区。这与已有的实验观察一致[5,6]。

2. 对于扩展裂纹，平面双滑移晶体模型所对应的渐近场由五个角形区组成。裂纹前方有两个应力均匀分布的塑性区。这两个塑性区的公共边界上切向速度分量一般说来有间断。裂纹面附近有一个二次塑性区。裂纹前方的塑性区与二次塑性区之间有两个卸载弹性区。这两个卸载弹性区之间也存在着速度场间断。

3. 以上的结果可以直接用于面心立方晶体和体心立方晶体平面应变的裂纹问题中去，对于裂纹面位于(010)晶面，裂纹顶端沿着晶轴$[10\bar{1}]$，或裂纹面位于(101)面，裂纹扩展方向沿着[010]方向的情况，本文的分析均可以应用。

参　考　文　献

[1] Rice, J. R. and Nikolic, R., *J. Mech. Phys. Solids*, **33** (1985), 595—622.

[2] Rice, J. R. and Saeedvafa, M., *ibid.*, **35**(1988), in press.

[3] Rice, J. R., *Mechanics of Materials*, **6**(1988), No. 4, 317—335.

[4] Asaro, R. J., *J. Appl. Mech.*, **50**(1983), 921—934.

[5] Neumann, P., *Acta Metallurgica*, **22**(1974), 1155—1165.

[6] Vehoff, H. and Neumann, P., *ibid.*, **27**(1979), 915—920.