中 国 科 学
1990 年 2 月　　A 辑　　第 2 期

热毛细振荡对流的产生机理

胡文瑞　　唐泽眉
(中国科学院力学研究所，北京 100080)

摘　　要

本文用有限元方法定量分析讨论了液体桥中的温度分布. 当液桥两端温差 ΔT 增大到一定值时，液桥中会出现温度梯度与重力方向平行且同向的流动区域. 随着温差 ΔT 值的增大就可能产生浮力不稳定，形成热毛细振荡对流. 根据地面实验所得发生振荡对流的临界 Marangoni 数，给出了微重力条件下临界 Marangoni 数的分布. 分析表明，较小的典型尺度和较低的重力环境会延迟热毛细振荡对流的发生.

关键词： 热毛细对流，微重力流体力学，振荡流动

一、引　　言

在低重力或微重力环境中，浮力驱动的对流几乎消失，浮力驱动对流的振荡也相应地消失. 这就可能为空间材料生产提供理想的条件. 相当多的研究表明，在熔体悬浮区生长晶体的液体桥模型中，表面张力驱动的对流变成了重要的过程[1]. 在一定的条件下，表面张力驱动对流中会出现温度的振荡现象[2]. 这种振荡的出现必然影响空间材料生长的过程. 为此，研究和解释热毛细振荡对流产生的原因，就成为最近大家关心的一个重要问题.

在考虑浮力与表面张力的相对重要性时，常常引用动 Bond 数：

$$\mathrm{Bd} = \frac{\rho g \beta l^2}{\left|\frac{d\sigma}{dT}\right|}, \tag{1.1}$$

其中 ρ, T 和 σ 分别为流体的密度、温度和表面张力，β 为热膨胀系数，g 为重力，l 为流体的典型尺度. 一般把小 Bond 数的情况解释为浮力作用相对于表面张力的作用可以忽略不计. 这样，人们就在地面上用小尺度实验 (l 小，$g = g_0$)，使 $B_d \ll 1$，并由此来模拟空间的微重力实验 (l 大，$g \ll g_0$)，其中 g_0 为地球表面的重力加速度. 热毛细对流的地面实验和空间实验有许多相同之处，但是建立振荡流的过程有显著的差别.

通过地面小 Bond 数的实验，对于热毛细荡振对流进行了研究，主要是用热电偶测量温度场的振荡[2-10]. 一般都引用 Marangoni 数：

$$\mathrm{Ma} = -\frac{\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)\Delta T l}{\nu\kappa}, \tag{1.2}$$

本文 1989 年 4 月 6 日收到，1989 年 7 月 24 日收到修改稿.

其中 ν 和 κ 分别为运动学粘性系数和热扩散系数，温差 ΔT 为高温的上壁面与低温的下壁面之间的温度差. 当 Ma 数超过临界值 $(Ma)_c$ 时，液桥中出现温度振荡. 利用微重力火箭也进行了较大尺寸的实验. 以硅油为介质的实验结果表明，火箭实验的 $(Ma)_c$ 比地面的大一个数量级[10]；但在以硝酸钠为工质的火箭实验中 $(Ma)_c$ 值比地面实验的值反而小一些[11,12]. 这两组不同的结果可能与实验时的微重力状态有关. 在航天飞机上用硅油作实验时，得到比火箭实验更大的 $(Ma)_c$ 值[13]. 意大利科学家总结他们的地面、火箭和航天飞机实验的 $(Ma)_c$ 值与实验的特征尺寸有关，并提出 Marangoni 数并不是度量振荡流的最好参数[14]. 显然，用唯一的参数 Ma 来描述振荡流，可能是过于简化了. 但是，在众多的动力学和几何的相似参数中，那几个参数起着关键的作用，仍是有待研究的问题.

由于实验结果尚不充分，特别是缺乏振荡流的流场变化特征，所以，目前的理论解释振荡流的工作还不多. 与地面实验密切相关的一种解释是把热毛细振荡对流看成是自由面上产生的环向不稳定性[3-6]. 这种机理还需要进行相应的理论分析. 另一种设想是由于热传递过程中的不平衡所产生的[15]，相应的实验研究已安排在 1992 年的航天飞机上进行. 我们提出的理论模型认为，浮力不稳定性仍然起着重要的作用[16,17].

本文将进一步分析浮力不稳定性的机理. 我们利用现有的有限元的数值模拟程序进行了具体的计算，定量地讨论了流场中的反向温度梯度的大小，以及浮力不稳定性的影响.

二、液桥模型

我们讨论两个直径为 $2r_0$ 的同心圆盘之间充以实验液体(如图 1 所示). 上圆盘和下圆盘分别保持温度 $T_0+\Delta T$ 和 T_0. 液桥自由面上由于温度分布不均匀而产生表面张力梯度，驱动液体对流. 一般采用 Boussinesq 近似来描述液体的行为. 对于轴对称液桥，在柱坐标系中的方程组为

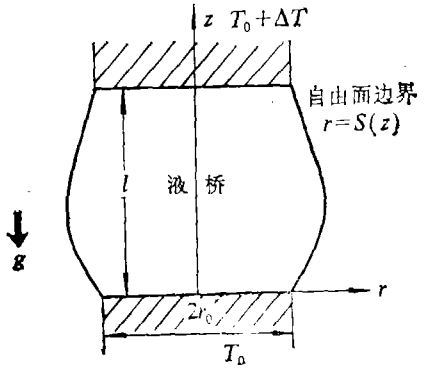


图 1 液体桥位形的示意图
(重力 g 沿 z 轴方向)

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{2.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho}\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{2.2}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}+gz\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+g\beta(T-T_0), \tag{2.3}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial r}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{2.4}$$

其中 p 为流体的压力，$(u, 0, w)$ 为速度，$\nu=\mu/\rho$ 和 $\kappa=k/\rho C_p$ 为运动学粘性系数和热扩散系数. 液桥悬浮区的边界条件可以写成

$$u(r,0)=w(r,0)=0, \tag{2.5}$$

$$u(r, l) = w(r, l) = 0, \tag{2.6}$$

$$u(0, z) = 0, \quad \frac{\partial w(0, z)}{\partial r} = 0. \tag{2.7}$$

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)r_b' + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)(1 - r_b'^2) = N^{1/2}\sigma_T'\left(\frac{\partial T}{\partial r}r_b' + \frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

$$r = r_b(z) \text{ 时}, \tag{2.8}$$

$$p_1 - p_2 - \sigma\left(\frac{1}{r_b N^{1/2}} - \frac{r_b''}{N^{3/2}}\right) = \frac{2\mu}{N}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}r_b'^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)r_b'\right],$$

$$r = r_b(z) \text{ 时}, \tag{2.9}$$

$$T(r, 0) = T_0 \text{（常数）}, \quad T(r, l) = T_0 + \Delta T \text{（常数）}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial T(0, z)}{\partial r} = 0, \tag{2.11}$$

$$k\frac{\partial T(r, z)}{\partial n} = -\varepsilon c(T^4 - T_e^4), \qquad r = r_b(z) \text{ 时}, \tag{2.12}$$

其中 $r = r_b(z)$ 为液桥自由面的方程，l 为液桥的高度，$\sigma(T)$，ε 和 c 为表面张力、辐射系数和 Stefen-Boltzman 常数，上标撇表示微商，下标 e 为外场，而 $N = 1 + r_b'^2$. 可以看出，液桥对流是一个待定自由面边界的非线性问题.

为了更清楚地描述对流的物理过程，我们引进无量纲量，取

$$\xi = \frac{r}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{l}, \quad U = \frac{u}{w_0}, \quad W = \frac{w}{w_0},$$

$$P = \frac{p}{\rho w_0^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}, \quad \lambda = 2r_0/l. \tag{2.13}$$

$$B_0 = \frac{\rho g l^2 \beta \Delta T}{\sigma}, \quad C_a = \frac{\sigma' \Delta T}{\sigma}, \quad \mathrm{Gr} = \frac{g\beta\Delta T l^3}{\nu^2}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\kappa},$$

$$\mathrm{Re} = \frac{w_0 l}{\nu}, \quad \mathrm{Ma} = \mathrm{Pr} \cdot \mathrm{Re} = \frac{w_0 l}{\kappa}, \tag{2.14}$$

其中的典型速度 $w_0 = \frac{\lambda\sigma_T'\Delta T}{\mu}$，它表示表面张力梯度驱动液体对流的典型速度. 在(2.14)式所定义的无量纲参数中，B_0 为静 Boud 数，C_a 为毛细数，Ga 为 Grashof 数，Re 为表面张力雷诺数，Ma 为 Marangoni 数，Pr 为 Prandtl 数. 表面张力驱动对流包含着多种因素的影响，运动学上有重力、表面张力、粘性力、压力梯度等的影响；热力学过程中的传热、辐射也起着重要的作用；再加上复杂的边界条件. 这些因素相互耦合在一起，使我们不容易分析清楚问题的关键.

方程组(2.1)—(2.4)中有四个变量 u, w, p, T. 利用连续方程(2.1)可引入流函数 ϕ，它定义为

$$W = \frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi\phi}{\partial \xi}, \qquad U = -\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}. \tag{2.15}$$

从(2.2)和(2.3)式中消去压力 p，并引进涡量 ω

$$\omega = \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi}, \tag{2.16}$$

则无量纲形式的方程组(2.1)—(2.4)可化为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\psi}{\xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} = -\omega, \tag{2.17}$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\xi}\frac{\partial(\xi\psi)}{\partial \xi}\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\omega\right] = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\omega}{\xi^2} - \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}, \tag{2.18}$$

$$\mathrm{Ma}\left[-\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial(\xi\psi)}{\partial \xi}\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}\right] = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2}. \tag{2.19}$$

其中假设 $\lambda = 1$. 相应地,由(2.5)—(2.7)式我们可以写出边界条件的无量纲形式,其中引用无量纲 Biot 数 $\mathrm{Bit} = \varepsilon c l \Delta T^3 / k$.

三、数值模拟

用有限元方法数值模拟两端温差变化时液桥中的流场和温度分布,分析讨论热毛细振荡现象产生的原因. 液体桥中的流体运动除满足上述涡度、流函数及能量方程外,还需符合自由面上的应力平衡条件. 计算中反映流体物理特性的 Prandtl 数取为 20. 不考虑相变,液桥上下两端液固交界面取为平面,液体不能穿透和滑移,这两个条件分别用于流函数和涡度方程中. 自由面为圆柱面,接触角是 90°. 液、固交界面,自由面和中心线为一条流线. 取两端温差 ΔT,液桥中温度沿 z 方向线性分布,没有流动,涡度、流函数为零时为初值. 叠代求解流函数、涡度和能量方程,叠代收敛,得到如图 2—6 所示的定常温度分布.

全部流区分划为 360 个大小不等的三角元,在温度梯度和流动变化的区域,网格加密. 计算中采用线性插值函数.

从图 2— 6, 液桥两端的温度差逐渐增加. 表面张力梯度 $|\partial\sigma/\partial T|$, 动力粘性系数 μ 和 Pr 数,在同一实验中保持不变. 因此,表面张力雷诺数 $\mathrm{Re} = \left(\frac{|\partial\sigma/\partial T|\Delta T l}{\mu\nu}\right)$ 随温差 ΔT 线性增加. Ma 数

$$\left(\mathrm{Ma} = \mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr} = \frac{|\partial\sigma/\partial T|\Delta T}{\mu}\frac{l}{\kappa}\right)$$

是表面张力驱动对流引起的热对流效应与扩散效应之比,也随 ΔT 线性增加. 图 2 中因 ΔT 较小,对流效应弱, 等温线的分布主要由扩散效应决定,几乎呈水平等距分布. 表面张力随温度增大而减小,上端温度高,表面张力将驱动自由面附近的流体从上而下中心轴附近流体自下向上流动. 流体的流动携带热量迁移,使中心轴附近等温线向上突起,自由面附近的等温线向下弯曲. 两端温差越大对流相对扩散效应越强, 在上端中心轴附近和下端自由面附近温度梯度很大, 热边界层越来越薄(见图 5,6). 图的中心有一温度比较均匀的区域,在它的上半部,形成与引力方向平行但方向相同的温度梯度区. 图 7 是相应于 $\mathrm{Ma} = 1 \times 10^4$ 时在不同半径

处温度随液桥高度的分布，给出了流区的反向温差大小和范围的定量结果．本文的计算结果与有关实验研究得到的温度和流场分布是定性一致的[1,6]．

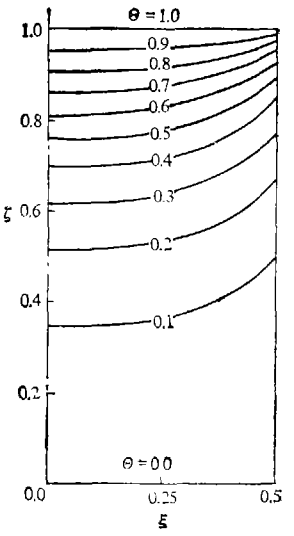


图 2　等温线
($Ma = 10^2$, $\Delta T = 0.5℃$, $Re = 5$, $Bit = 6 \times 10^{-9}$, $Pr = 20$, $Gr = 0$)

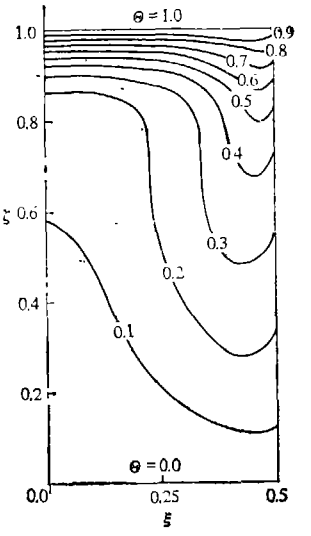


图 3　等温线
($Ma = 10^3$, $\Delta T = 5℃$, $Re = 50$, $Bit = 6 \times 10^{-6}$, $Pr = 20$, $Gr = 0$)

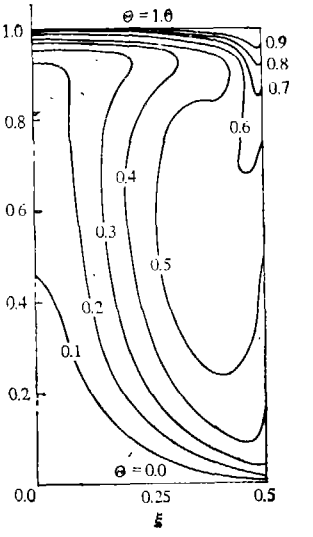


图 4　等温线
($Ma = 5 \times 10^3$, $\Delta T = 25℃$, $Re = 250$, $Bit = 7.5 \times 10^{-4}$, $Pr = 20$, $Gr = 0$)

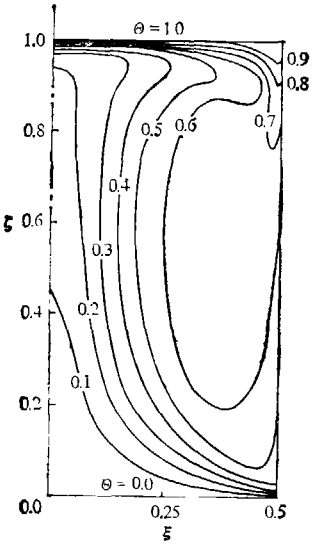


图 5　等温线
($Ma = 1 \times 10^4$, $\Delta T = 50℃$, $Re = 500$, $Bit = 6 \times 10^{-3}$, $Pr = 20$, $Gr = 0$)

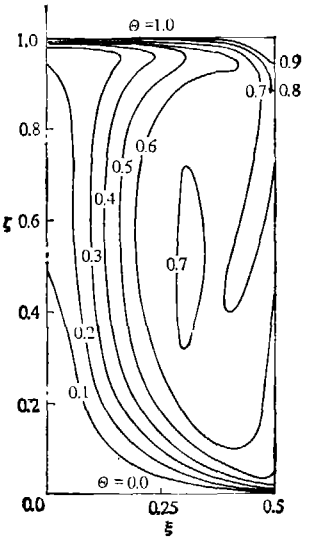


图 6　等温线
($Ma = 1.5 \times 10^4$, $\Delta T = 75℃$, $Re = 750$, $Bit = 2.025 \times 10^{-2}$, $Pr = 20$, $Gr = 0$)

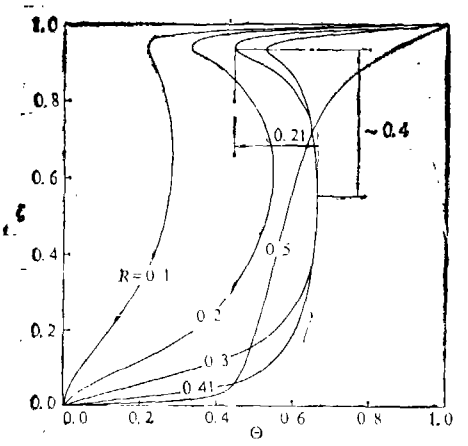


图 7 不同半径处的温度分布
(Ma = 1×10^4, $\Delta T = 50$℃, Re = 500, Bit = 6×10^{-3}, Pr = 20, Gr = 0)

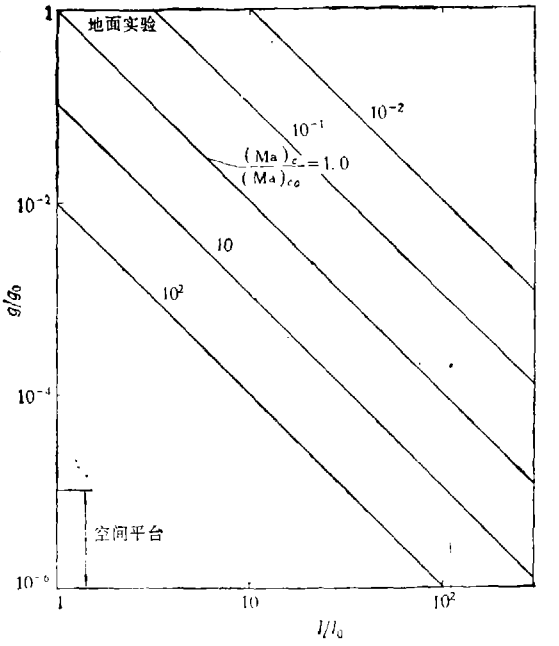


图 8 临界 Marangoni 数分布

四、振荡对流

当外加温差 ΔT 逐渐增加时，液桥中的温度分布和速度分布的变化增大. 它表现为自由面附近的 Marangoni 边界层变薄，壁面附近的温度梯度增加. 当 ΔT 增加到某一临界值时，液桥中的温度出现振荡. 振荡对流是向湍流转换的过程，在理论上有很大兴趣. 另一方面，在材料生长过程中，温度振荡将影响相变阵面的生长过程，研究避免振荡出现的条件就有很大的实用价值. 热毛细振荡对流是微重力流体物理的重要研究课题.

一般的热毛细振荡对流研究特别着重于分析临界 Marangoni 数 $(Ma)_c$ 与液桥高度 l 或高宽比 A 之间的关系. 不少作者都指出，$(Ma)_c$ 看来不是描述振荡对流发生的最好参数. 从基本方程组可以看出，Marangoni 数出现于能量方程 (2.19) 中，它度量对流与传导效应的相对重要性，其中的典型速度取做粘性型的热毛细流速 w_0. 在热毛细对流中大体上有三个典型流动区域，即自由面附近的 Marangoni 边界层，上、下固壁附近的边界层，以及内部对流区. 三个区域的流动和热过程互相耦合在一起. 振荡流的发生与这个耦合过程相关.

当外加温差 ΔT 较小时，液桥中的温度分布大体上随高度线性地分布. 随着 ΔT 的增加，传到液桥中的热量将增大，它要求固壁边界层变薄，使温度梯度增加. 当 ΔT 增大到某一值时，流场中固定半径处的温度剖面出现拐点，再进一步增加，则出现 S 型. 图 7 给出了 Ma = $1. \times 10^4$ 时不同半径处的温度分布. 例如，对于 $r = 0.3$，在典型尺度 $\Delta \sim 0.4$ 的范围内，反向温差 $\delta\Theta \sim 0.2$ 左右. 当 Ma 值增加时，Δ 和 $\delta\Theta$ 的值都会相应地增大. 这表明，当 ΔT 增大到一定程度以后，在液体桥中出现一个区域，其中的温度梯度与重力方向平行. 当 ΔT 进一步增

加，反向温差和区域的尺寸都相应地增大．这时，浮力的作用越来越强，甚致出现浮力不稳定性．所以，热毛细对流的驱动力主要是表面张力梯度，但是，热毛细振荡流的产生原因可能是液桥内部的浮力不稳定性．

根据无量纲参数的定义(2.14)式，可以将 Marangoni 数重新表示为

$$\mathrm{Ma} = \frac{\mathrm{Ra}}{B_0 C_a}\,\frac{1}{\Delta^3 \delta\Theta}, \tag{4.1}$$

其中 Rayleigh 数

$$\mathrm{Ra} = \frac{g\beta\delta T(\delta l)^3}{\kappa\nu}, \tag{4.2}$$

而 δT 和 δl 分别为 $\delta\Theta$ 和Δ的有量纲量．人们也常常将 $B_0/C_a = \rho g\beta l^2/|\sigma_T'|$ 称为动 Bond 数．对于确定的 ΔT 和 l，Marangoni 数与 $\mathrm{Ra}/\Delta^3\,\delta\Theta$ 成正比．因此，临界 Marangoni 数 $(\mathrm{Ma})_c$ 与 $(\mathrm{Ra})_c/\Delta^3\delta\Theta$ 也成正比，而后者又是 ΔT 的复杂函数．可以看出，对于较大的 ΔT，$\delta\Theta$ 和Δ具有 $O(1)$ 的量级．这样，定性地讲，Rayleigh 数超过临界值时，可能出现浮力不稳定性，由此可以导出相应的临界 Marangoni 数．

根据地面实验的结果，临界 Marangoni 数为 $(\mathrm{Ma})_{co}$

$$(\mathrm{Ma})_{co} = (1-3)\times 10^4, \tag{4.3}$$

而相应的动 Bond 数

$$B_0 C_a = O(1). \tag{4.4}$$

由此，可估计出临界 Rayleigh 数为

$$(\mathrm{Ra})_c \simeq \Delta^3\delta\Theta \times (1-3)\times 10^4.$$

如果取 $\Delta^3\delta\Theta = O(10^{-1})$，则有

$$(\mathrm{Ra})_{co} = (1-3)\times 10^3. \tag{4.5}$$

这个临界 Rayleigh 数的值还是可以接受的．根据这个结果，可以反推微重力条件下的临界 Marangoni 数的大小，它可以表示为

$$\frac{(\mathrm{Ma})_c}{(\mathrm{Ma})_{co}} = \frac{g_0 l_0^2}{g l^2}, \tag{4.6}$$

其中下标“0”表示地面实验的典型值．图 8 给出了不同条件下临界 Marangoni 数的分布．较小的典型尺度和较低的重力环境对应于较大的临界 Marangoni 数，这相应于推迟振荡流的出现．

这意味着，就热毛细对流而言，在空间环境生产材料，具有较地面上优越的条件，液桥中有较大的稳定对流范围，可以生产较大尺寸，较均匀的晶体．但是，由于引力的减弱，液固界面的相变过程，空间环境中加速度大小和方向的变化都会对液桥中的流场和传热产生影响并使不稳定对流临界值变化．目前，这些问题还研究得很少，值得进一步讨论．

五、讨　论

在空间材料生产过程中，对流的影响是一个重要的因素．人们对振荡流的出现极为关心，因为它将改变相变界面凝固的均匀性．本文用数值模拟的方法具体计算了液桥中的流场和温度场的分布，进一步论述了浮力不稳定性在微重力环境中的作用[16,17]．分析表明，即使在空间

飞行器中，为了控制振荡流的出现，也必须提高微重力水平和限制悬浮区的尺寸．这个结论对空间材料制备有应用价值．

为了验证浮力不稳定性机理，还必须进行一些判别性的实验研究．特别是对比地面的小尺寸实验与空间实验的结果．此外，在理论上需要计算不定常过程的数值模拟，以研究由层流向湍流的转捩过程．这些都是下一步将要进行的研究工作．

显然，热毛细对流的振荡机制将是复杂的，它依赖于典型无量纲参数的范围．一些研究工作已经指出，不同的典型参数范围可导致不同的振荡机理．本文所指出的浮力亦可能产生振荡对流，它也是在特定条件下起作用的机制．这也表明，热毛细对流的振荡机理是一个需要进一步研究的课题．

参 考 文 献

[1] Ostrach, S., *Ann. Rev., Fluid Mech.*, **14**(1982), 313.

[2] Chun, ch. -H., & Wuest, W., *Acta Astronautica*, 6(1979), 1073.

[3] Chun, ch. -H., *Acta Astronautica*, 7(1980), 479.

[4] Chun, ch. -H) *J. Crystal Growth*, 48(1980), 600.

[5] Schwabe, D. & Scharmann, A., *J. Crystal Growth*, **46**(1979), 125.

[6] Preisser ,F., Schwabe, D. & Scharmann, A., *J. Fluid Mech.*, **126**(1983), 545.

[7] Komotani, Y., Ostrach, S. & Vargas, M., *J. Crystal Growth*, **66**(1984), 83.

[8] Monti, R., Napolitano, L. G. & Russo, G., *4th European Symp. on Material Science in Space*, ESA sp-10? 1983, 219.

[9] Monti, R., Napolitano, L. G. & Russo, G., *Acta Astonautica*, 11(1984), 369.

[10] Monti, R., *5th European Symp. on Material Science under Micro Gravity*, ESA sp-222, 1985.

[11] Schwabe, D., Preisser, F. & Scharmann, A., *Acta Astronautica*, 9(1982), 265.

[12] Schwabe, D. & Scharmann, A., *Advance Space Res.*, 4(1984), 43.

[13] Napolitano, L. G., Monti, R. & Russo, G., *Naturwissen Schaften*, 73(1986), 352.

[14] Monti, R., *Acta Astronautica*, 15(1987), 557.

[15] Ostrach, S., Komotani, Y, & Lai, C. L., *PCH Physi chemical Hydrodynamics*, 6(1985), 585.

[16] Hu, W. R., *39th Congress of IFA*, IAF-88-365, 1988.

[17] Hu, W. R., *Proceedings of 16th Inter. Symp. on Space Tech. and Sci.*, AGNE Publishing Inc. ch. 20, 198.