中 国 科 学
1986 年 10 月　　A 辑　　第 10 期

关于激光在磁化等离子体中的非相干散射*

陆全康　陈　虹　尹　琦　王文华
（复旦大学物理系，上海）

提　　要

激光在等离子体中的非相干散射，决定于电子密度涨落的谱密度．对于库仑等离子体，许多学者计算了散射谱．本文基于考虑等离子体中粒子间的完全电磁相互作用，计算了磁化等离子体的电子密度涨落和散射频谱．

一、引　　言

目前，激光散射已成为等离子体诊断的主要手段之一．从散射频谱可以决定等离子体的电子、离子温度和密度，外加磁场的方向和大小以及有关等离子体中的涨落（包括波，不稳定性等等）信息．作为一种诊断方法，它具有良好的时间和空间分辨率，而且它对系统的扰动也是很小的．

这方面最初的工作是 Bowles[1] 利用雷达波对电离层的研究．在这以后，Salpeter[2]，Dougherty 和 Farley[2] 等人从理论上用不同的方法计算了散射谱．六十年代初，Rostoker[4] 从 BBGKY 理论出发，发展了等离子体的涨落理论，并且采用试探粒子模型计算了包括有外加恒定磁场存在时的电子密度涨落谱．然而，由于 BBGKY 理论对于描述完全电磁相互作用体系时存在的数学复杂性，上面所提到的计算，只计及等离子体中粒子间的库仑力而忽略了 Lorentz 力．

本文在 Rostoker 和 Rosenbluth 的工作基础上，推广了试探粒子模型，并给出在等离子体参量 $g(=1/n\lambda_D^3$，n 为电子密度，λ_D 为 Debye 长度）一级近似下，能够完整地描述完全电磁相互作用等离子体的基本方程．从这套方程出发，我们计算了磁化等离子体的电子密度涨落和散射频谱．

二、基 本 方 程

在试探粒子模型下，并计及等离子体的完全电磁相互作用，Vlasov 方程为

$$\frac{\partial f_a}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x f_a+\frac{q_a}{m_a}\left[\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}_0)\right]\cdot\nabla_v f_a=0, \tag{1}$$

自洽电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 由 Maxwell 方程决定

本文 1985 年 5 月 7 日收到．
* 中国科学院科学基金资助的课题．

$$\nabla_x \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\nabla_x \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{4\pi}{c} q_T \boldsymbol{v}'\delta[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'(t)], \tag{3}$$

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho + 4\pi q_T \delta[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'(t)], \tag{4}$$

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{5}$$

其中

$$\rho = \sum_a n_a q_a \int f_a d\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{j} = \sum_a n_a q_a \int f_a \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{v}, \tag{6}$$

是等离子体中的电荷密度和电流密度. $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{v}'$ 是试探粒子 q_T 在时间 t 时的位置和速度. 在试探粒子与背景等离子体相互作用的零级近似下,试探粒子的运动方程为

$$\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt} = \boldsymbol{v}',$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \frac{q_T}{m_T}\left(\frac{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}_0}{c}\right), \tag{7}$$

其中 B_0 是外加磁场.

方程 (1)—(6) 和方程 (7) 一起构成一套封闭的方程组. 可以证明,在 $g = (1/n\lambda_D^3)$ 级近似下,它可以描述和处理等离子体中的涨落,关联和散射等问题.

比较方程(1)—(7)与文献[5]的基本方程可知,我们这里用带试探粒子效应的 Maxwell 方程取代了 Poisson 方程, 这意味着用完全电磁相互作取代了库仑相互作用, 即方程 (1)—(7) 更基本,包含的内容更丰富. 这是我们的新模型.

三、电子密度涨落

我们考虑有外加恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{e}_3$ 存在的平衡等离子体,选取如图 1 所示的坐标系.

在 t 时刻试探粒子的轨迹为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{x}_0' &+ a_T'[\cos(\Omega_T' t + \beta') - \cos\beta']\boldsymbol{e}_1 \\ &+ a_T'[\sin(\Omega_T' t + \beta') - \sin\beta']\boldsymbol{e}_2 \\ &+ v_{\parallel}' t\boldsymbol{e}_3,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}'(t) = &-v_{\perp}'\sin(\Omega_T' t + \beta')\boldsymbol{e}_1 + v_{\perp}'\cos(\Omega_T' t + \beta')\boldsymbol{e}_2 \\ &+ v_{\parallel}'\boldsymbol{e}_3.\end{aligned} \tag{9}$$

这里

$$\Omega_T' = \frac{q_T B_0}{m_T c}, \quad a_T = \frac{v_{\perp}'}{\Omega_T'}, \tag{10}$$

是迴旋频率和迴旋半径, q_T, m_T, $(v_{\perp}', v_{\parallel}')$, β' 是试探粒子的电量、质量、初速和初位相.

经线性化和 Fourier-Laplace 变换,(1)—(6) 式化为

$$(-i\omega + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})f_{a1}(\boldsymbol{k}, \omega, \boldsymbol{v})$$

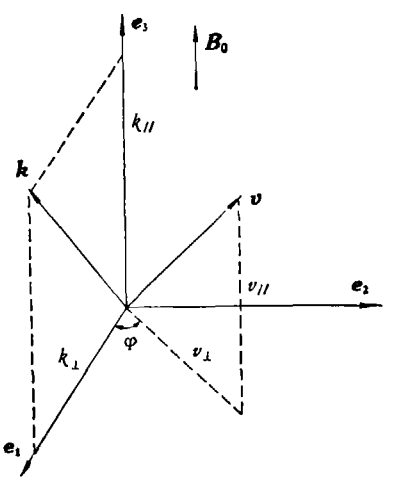


图 1　散射坐标系

$$+\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\frac{\partial f_{\alpha_0}(\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{v}}-\Omega_\alpha\frac{\partial f_{\alpha_1}(\boldsymbol{k},\omega,\boldsymbol{v})}{\partial\varphi}=0,\quad(\mathrm{Im}\,\omega>0). \tag{11}$$

$$i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}, \tag{12}$$

$$i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}=-\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{E}+\frac{4\pi}{c}\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha\int\boldsymbol{v}f_{\alpha_1}(\boldsymbol{k},\omega,\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_T(\boldsymbol{k},\omega), \tag{13}$$

$$\boldsymbol{j}_T=q_T\exp\{-i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_0'-k_\perp a_\perp'\cos\beta']\}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m e^{-im\beta'}$$

$$\times\frac{v_\perp'\left(\frac{m}{k_\perp a_T'}\right)J_m\boldsymbol{e}_1+iv_\perp'J_m'\boldsymbol{e}_2+v_\parallel J_m\boldsymbol{e}_3}{-i\omega+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}'+in\Omega_T'}. \tag{14}$$

这里，$f_\alpha=f_{\alpha_0}(\boldsymbol{v})+f_{\alpha_1}(\boldsymbol{k},\omega,\boldsymbol{v})$，$J_m=J_m(k_\perp a_T')$ 是 Bessal 函数. 为方便起见(不失一般性)，我们取波矢 $\boldsymbol{k}$ 在 xz 平面上，并利用了等式:

$$\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0)}{c}\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{v}}=-\Omega_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\varphi}. \tag{15}$$

假设平衡分布 $f_{\alpha_0}(\boldsymbol{v})$ 仅是 $v_\parallel$，$v_\perp$ 的函数而与 φ 无关，从 (11)—(12) 式我们得

$$f_{\alpha_1}(\boldsymbol{k},\omega,\boldsymbol{v})=-\frac{iq_\alpha}{m_\alpha}e^{ik_\perp a_\alpha\sin\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}_n^\alpha\cdot\boldsymbol{E}}{\omega-k_\parallel v_\parallel-n\Omega_\alpha}e^{in\varphi}. \tag{16}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_n^\alpha=A_{nx}^\alpha\boldsymbol{e}_1+A_{ny}^\alpha\boldsymbol{e}_2+A_{nz}^\alpha\boldsymbol{e}_3,$$

$$A_{nx}^\alpha=\left[\frac{k_\parallel v_\perp}{\omega}\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial v_\parallel}+\left(1-\frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega}\right)\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial v_\perp}\right]\left(\frac{n}{k_\perp a_\alpha}\right)J_n(k_\perp a_\alpha),$$

$$A_{ny}^\alpha=\left[\frac{k_\parallel v_\perp}{\omega}\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial v_\parallel}+\left(1-\frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega}\right)\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial v_\perp}\right]iJ_n'(k_\perp a_\alpha),$$

$$A_{nz}^\alpha=\left[\left(1-\frac{n\Omega_\alpha}{\omega}\right)\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial v_\parallel}+\frac{n\Omega_\alpha}{\omega}\frac{v_\parallel}{v_\perp}\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial v_\perp}\right]J_n(k_\perp a_\alpha). \tag{17}$$

将这些式子代入 (13) 式，并由 (12) 式消去 $\boldsymbol{B}$，我们得到电场 $\boldsymbol{E}$ 满足的方程

$$\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{i4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}_T, \tag{18}$$

其中 $\mathbf{D}$ 是介电张量，由下式给出

$$\mathbf{D}=\left(1-\frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)\mathbf{I}+\frac{c^2}{\omega^2}\boldsymbol{kk}+\frac{i4\pi}{\omega}\boldsymbol{\sigma},$$

$$\boldsymbol{\sigma}=-i\sum_\alpha\frac{n_\alpha q_\alpha^2}{m_\alpha}\int d\boldsymbol{v}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{S}_n}{\omega-k_\parallel v_\parallel-n\Omega_\alpha},$$

$$\mathbf{S}_n=\begin{pmatrix} v_\perp\left(\frac{n}{k_\perp a_\alpha}\right)^2J_n^2U & iv_\perp\left(\frac{n}{k_T a_\alpha}\right)J_nJ_n'U & v_\perp\left(\frac{n}{k_\perp a_\alpha}\right)J_n^2W \\ -iv_\perp\left(\frac{n}{k_\perp a_\alpha}\right)J_nJ_n'U & v_\perp J_n'^2U & -iv_\perp J_nJ_n'W \\ v_\parallel\left(\frac{n}{k_\perp a_\alpha}\right)J_n^2U & iv_\parallel J_nJ_n'U & v_\parallel J_n^2W \end{pmatrix}, \tag{19}$$

和定义函数

$$u=\left[\frac{k_{\parallel}v_{\perp}}{\omega}\frac{\partial f_{a_0}}{\partial v_{\parallel}}+\left(1-\frac{k_{\parallel}v_{\parallel}}{\omega}\right)\frac{\partial f_{a_0}}{\partial v_{\perp}}\right],$$

$$W=\left[\left(1-\frac{n\Omega_a}{\omega}\right)\frac{\partial f_{a_0}}{\partial v_{\parallel}}+\frac{n\Omega_a}{\omega}\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}\frac{\partial f_{a_0}}{\partial v_{\perp}}\right]. \tag{20}$$

从 (18) 式,我们得

$$\boldsymbol{E}=-\frac{i4\pi}{\omega}\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{j}_T, \tag{21}$$

其中 $\mathbf{D}^{-1}$ 是 $\mathbf{D}$ 的逆张量.

对于稳定等离子体,将 (21) 式代入 (16) 式,经 Fourier-Laplace 反演,我们得到分布函数

$$f_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)=f_{a_0}(\boldsymbol{v})-\frac{4\pi q_T q_a}{m_a}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\exp[ik_{\perp}a_a\sin\varphi]$$

$$\times\exp\{-i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0'-k_{\perp}a_T'\cos\beta']\}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(n-m)\beta'}(-i)^m e^{-i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}']_m^T t}}{[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}']_m^T([\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}']_m^T-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}]_n)}$$

$$\times\boldsymbol{A}_n^a\cdot\mathbf{D}^{-1}\cdot\boldsymbol{I}_m^{aT}. \tag{22}$$

这里引人记号

$$[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}']_m^T=k_{\parallel}v_{\parallel}'+m\Omega_T',\quad[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}]_n^a=k_{\parallel}v_{\parallel}+n\Omega_a \tag{23}$$

和

$$\boldsymbol{I}_m^{at}=\begin{pmatrix}v_{\perp}'\left(\frac{m}{k_{\perp}a_T'}\right)J_m\\ iv_{\perp}'J_m'\\ v_{\parallel}'J_m\end{pmatrix}. \tag{24}$$

最后,我们得到了由于一个试探电荷存在所引起的电子密度涨落的普遍表达式

$$\tilde{n}_{ee}=\exp\{-i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0'-k_{\perp}a_e'\cos\beta']\}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m e^{-im\beta'}(2\pi)\delta(\omega-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}']_m^e)$$

$$\cdot\left\{J_m(k_{\perp}a_e')-\omega_{pe}^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d\boldsymbol{v}\,\frac{J_n(k_{\perp}a_e)\boldsymbol{A}_n^e\cdot\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{I}_m^{et}}{\omega(\omega-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}]_n^e)}\right\}, \tag{25}$$

$$\tilde{n}_{ei}=\exp\{-i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0'-k_{\perp}a_i'\cos\beta']\}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m e^{-im\beta'}2\pi\delta(\omega-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}']_m^i)$$

$$\cdot Z\cdot\left\{\omega_{pe}^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d\boldsymbol{v}\,\frac{J_n(k_{\perp}a_e)\boldsymbol{A}_n^e\cdot\mathbf{D}^{-1}\cdot\boldsymbol{I}_m^{it}}{\omega(\omega-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}]_n^e)}\right\}, \tag{26}$$

这里 $\tilde{n}_{ee}$, $\tilde{n}_{ei}$ 分别表示试探电子和试探离子引起的电子密度的涨落. Z 为离子的电荷数.

从 (25),(26) 式可见, 试探粒子方法的图象是清楚的. (25) 式右边的第一项表示"裸电子",即试探电子的本身;第二项和 (26) 式的右边项则表示那些对试探电子和离子产生屏蔽作用的电子对电子密度涨落的贡献.

四、散射频谱

散射频谱 $S(\boldsymbol{k},\omega)$ 与电子密度涨落的关系[5]

$$S(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{1}{TV}\langle|\tilde{n}_e(\boldsymbol{k},\omega)|^2\rangle,\quad \begin{matrix}T\to\infty\\ V\to\infty,\end{matrix} \tag{27}$$

其中 T 表示平均时间，V 为散射体积，$\langle\rangle$ 表示系综平均.

在试探粒子模型下，认为试探粒子之间无关联，而等离子体则视为是试探粒子的集合. 这意味着试探粒子的系综平均是对无关联的零级分布 $f_{T0}(\boldsymbol{v})$ 的平均. 因此，将 (25)，(26) 式代入 (27) 式，并作出系综平均，我们得到空间均匀的稳态等离子体的散射频谱

$$S(\boldsymbol{k},\omega)=2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int d\boldsymbol{v}' f_{e_0}(\boldsymbol{v}')\delta(\omega-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}']_m^e)|J_m(k_\perp a_e')+P_m^e(\boldsymbol{k},\omega,\boldsymbol{v}')|^2$$

$$+2\pi Z\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int d\boldsymbol{v}' f_{i_0}(\boldsymbol{v}')\delta(\omega-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}']_m^i)|P_m^i(\boldsymbol{k},\omega,\boldsymbol{v}')|^2, \tag{28}$$

式中，

$$P_m^e(\boldsymbol{k},\omega,\boldsymbol{v}')=\omega_{pe}^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d\boldsymbol{v}\frac{J_n(k_\perp a_e)\boldsymbol{A}_n^e\cdot\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{I}_m^{et}}{\omega(\omega-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}]_n^e)},$$

$$P_m^i(\boldsymbol{k},\omega,\boldsymbol{v}')=\omega_{pe}^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d\boldsymbol{v}\frac{J_n(k_\perp a_e)\boldsymbol{A}_n^e\cdot\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{I}_m^{it}}{\omega(\omega-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}]_n^e)}. \tag{29}$$

这里，函数 $\boldsymbol{A}_n^e$，$\mathbf{D}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{I}_m^{et}$，$\boldsymbol{I}_m^{it}$ 分别由 (17)—(20) 式给出.

至此，我们求得了磁化等离子体的散射频谱的完整的解析表达式，原则上通过计算机算出数值结果，即可与实验作比较.

五、结 论

从以上的计算，可以得出以下结论:

1. 散射频谱是由一系高斯型谱线构成的调制谱，中心频率为 $\omega=n\Omega_\alpha$，$n=0,\pm1\pm2,\cdots$ (这里 $\omega=\omega_s-\omega_0$，即散射频率与入射频率之差: $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_s-\boldsymbol{k}_0$，即散射波矢与入射波矢之差). 这与 Sheffield[7] 的结果一致. 这表明，感应电磁场对谱的调制无影响.

2. 与文献 [7] 不同的是，谱峰的强度有所改变，这是由计及 Lorentz 力所引起的效应.

3. 作为一种实验手段，原则上散射频谱可以提供大量的信息. 由于 $S(\boldsymbol{k},\omega)\propto\mathbf{D}^{-1}$，则 $S(\boldsymbol{k},\omega)$ 能够给出等离子体在每一个正则模附近的共振效应. 而本文的计算是基于等离子体的完整描述，是在一般情况下给出色散关系(即包含了各种静电模和电磁模)，因此，从给出的散射频谱 $S(\boldsymbol{k},\omega)$ 可以研究磁化等离子体中的各种不稳定性.

参 考 文 献

[1] Bowles, K. L., *Phys. Rev. Let.*, **1**(1958), 454.
[2] Salpeter, E. E., *Phys. Rev.*, **120**(1960), 1528.
[3] Dougherty, J. P. and Farley, D. T., *Proc. Roy. Soc. A*, **259**(1960), 79.
[4] Rostoker, N., *Nuclear Fusion*, **1**(1961), 101.
[5] Rostoker, N. and Rosenbluth, M. N., *Phys. Pluids*, **5**(1962), 776.
[6] Ichimaru, S., *Ann. Phys.*, Paris, **20**(1962), 78
[7] Sheffield, I., *Plasma Scattering of Electromagnetic Radiation*, Academic Press, New York, 1975, chap. 8.