中 国 科 学
1984 年 3 月　　A 辑　　第 3 期

应用时序展开求解偶极子的电流脉冲响应

沈 浩 明*
(中国科学院电子研究所，北京)

摘　要

偶极子在脉冲激励下的电流响应是一脉冲系列．本文利用准行波解法求得了系列中每一个电流脉冲；利用递推关系确定了各脉冲源函数和响应函数的关系．

整个时序解给出了一幅清晰的物理图象：电流脉冲响应可以用幅度、主波和长尾来表示；脉冲间关系则用特征函数、反射函数、导纳函数和传输函数来表示．

和总体解比较，时序解具有解析表达式简单、物理图象明确和精度高的优点．

一、初 发 脉 冲

在“求解脉冲电磁场的时序法”一文[1]中，偶极子的电流响应积分方程被分解为时序递推方程组(见文献[1]中(2.5)式)．利用直导体表面电波传播的行波特性和细导体的同时性求得了最简单(退化)情形——无穷长细导线——的准行波解．利用此准行波解和边界条件(见文献[1]中(2.6, 2.7)式)，可以求解偶极子的电流脉冲序列．为此，需将方程组及边界条件修改如下

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I_{2n-1}(t-R,|z'|)+I_{2n}(t-R,|z'|)}{R}dz'=F_{2n-1}(T_{2n-1})+F_{2n}(T_{2n});$$
$$n=0,1,2\cdots z\geqslant 0; \tag{1.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[I_{2n-1}(t,z)+I_{2n}(t,z)]=0;\quad z\geqslant h; \tag{1.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[-F_{2n-1}(t-2nh)+F_{2n}(t-2nh)]=2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}V_0(t). \tag{1.3}$$

由于源函数 F_m 的行波特性，I_m 将是如下准行波

$$I_m(t,z)=A_m(z)H_m(T_m,z),\quad m=0,1,2\cdots, \tag{1.4}$$

式中 $H_m(T_m,z)$ 应当是 z 的平缓函数．

下面划分时间段并依顺序来求解(1.1)—(1.3)式．第一个时间段从 $t=0$ 到 h．在这一段时间，除 F_0，I_0 外所有的 F_m，I_m 为零，此时(1.1)式只有 $(n=0)$

$$\int_0^{\infty}\frac{I_0(t-R,z')}{R}dz'+\int_{-\infty}^{0}\frac{I_0(t-R,-z')}{R}dz'=F_0(t-z)=2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}V_0(T_0),$$
$$z\geqslant 0. \tag{1.5}$$

本文 1983 年 6 月 17 日收到．

* 作者原是哈尔滨建筑工程学院教师．本文是在美国哈佛大学访问时研究工作的一部分．

方程(1.5)比文献[1]中单振子的方程(3.1)多了一项，它是下部振子上[1]电流对矢位的贡献．将(1.4)式代入(1.5)式，并将积分分解如下

$$\left(\int_0^{z+\varepsilon}+\int_{-\varepsilon}^{0}+\int_{z+\varepsilon}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\right)\frac{A_0(|z'|)H_0(T_0-|\tau|,|z'|)}{R}dz'=F_0(T_0),\qquad(1.6)$$

式中 $T_0=t-z$，$|\tau|=\tau_+=\tau(z-z')$ 当 $z'>0$，$|\tau|=\tau_-=\tau(z'-z)=-2z$ 当 $z'<0$ 是沿上振子和下振子的程差函数如文献[1]中图2所示．式中第一个积分对形成 F_0 起了主导作用；第三、四个积分是不同时的，它们将形成 F_0 的长尾；第二个积分是下振子中靠近激励源的电流作的贡献，它在 $z\gg a$ 时很小，只在 z 接近零时变得大起来，对主波有相当大的影响．因此这一项必须另行考虑．将二、三、四项积分移到右面，方程(1.6)可以进一步分解为三个

$$\int_0^{z+\varepsilon}\frac{A_0(z')H_{0i}(T_0-\tau_+,z')}{R}dz'=F_{qi}(T_0,z),\quad i=1,2,3,\ z\geqslant 0.\qquad(1.7)$$

式中

$$F_{q1}(T_0,z)=F_0(T_0),\qquad(1.8a)$$

$$F_{q2}(T_0,z)=-\int_{z+\varepsilon}^{\infty}\frac{A_0(z')H_0(\tau_0-\tau_+,z')}{R}dz'-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{A_0(-z')H_0(T_0-\tau_-,-z')}{R}dz',\qquad(1.8b)$$

$$F_{q3}(T_0,z)=-\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{A_0(-z')H_0(T_0-\tau_-,-z')}{R}dz',\qquad(1.8c)$$

$$H_0(T_0,z)=\sum_{i=1}^{3}H_{0i}(T_0,z),\quad z\geqslant 0.\qquad(1.8d)$$

由于源函数 F_{q1} 是一纯行波，和第一部分的分析一样，可以预期 H_{01} 应当独立于 z．但 F_{q2}，F_{q3} 不是纯行波，相应的 H_{02}，H_{03} 也将随 z 而变．为了进一步减少 H_{0i} 对 z 的依赖性，今在(1.6)式两边各加一调正项

$$\int_{-\varepsilon_1}^{0}\frac{A_0(z')H_0(T_0-\tau_+,0)}{R}dz'.\qquad(1.9)$$

而将(1.7)式改成

$$\int_{-\varepsilon_1}^{z+\varepsilon}\frac{A_0(z')H_{0i}(T_0-\tau_+,z')}{R}dz'=F_{qi}(T_0,z),\quad i=1,2,3,\quad z\geqslant 0,\qquad(1.10)$$

式中 F_{q1}，F_{q2} 和(1.8a)，(1.8b)式一样．但

$$F_{q3}(T_0,z)=\int_{-\varepsilon_1}^{0}\frac{A_0(z')H_0(T_0-\tau_+,z')}{R}dz'-\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{A_0(-z')H_0(T_0-\tau_-,-z')}{R}dz',\quad z\geqslant 0,\qquad(1.11)$$

(1.9)式中 $A_0(z')H_0(T_0,z)$ 在 $(-\varepsilon_1,0)$ 中定义为[2]：$A_0(z)$ 是原来的 $A_0(z)$ 在 $z\geqslant 0$ 区域的

1) 此处上、下振子是指将偶极子竖立后的上、下．

2) 由(1.12)定义的 $I_0=A_0(z)H_0(T_0,z)$ 在 $(-\varepsilon_1,0)$ 内没有物理意义．它仅是为了提高解的准确性而引入的(见调整项(1.9))．它并不代表下振子中靠近激励源处的电流．按照对称性，下振子中电流为 $I_-=A_0(-z)H_0(t+z,-z)$，它是幅度和上振子对称分布向下传播的行波．而(4.12)定义的 I_0 在 $(-\varepsilon_1,0)$ 中的幅度却大不相同(图1表明了 $A_0(z)$，$A_0(-z)$ 在 $(-\varepsilon_1,0)$ 中的差别)，它却是向上传播的准行波．

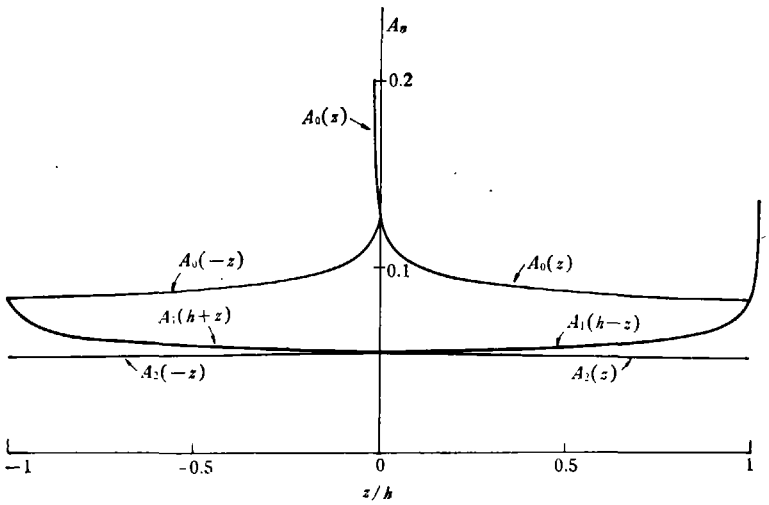


图 1 各电流脉冲的幅度变化

延拓;而

$$H_0(T_0, z) = \begin{cases} H_0(T_0, z), & 0 \leqslant z, \\ H_0(T_0, 0), & -\varepsilon_1 \leqslant z \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

增加调正项(1.9)式的目的和常数 ε_1 的确定将在下面说明.

当 $i = 1$ 时,(1.10)式和文献[1]中 (3.6) 式一样,只要将 z 变成 $z + \varepsilon_1$. 因此利用平缓条件(见文献[1]中(3.14)式)可求得幅度

$$A_0(z) = 1/\ln[\tau_0/\tau(z + \varepsilon_1)], \quad -\varepsilon_1 \geqslant z. \tag{1.13}$$

式中 $A(z)$ 的定义域已扩展到 $(-\varepsilon_1, 0)$; $\tau_0 = \tau(-\varepsilon)$. H_{01} 的像函数为:

$$\tilde{H}_{01}(s, z) = \tilde{F}_0(s)/C_0(s, z), \tag{1.14}$$

$$C_0(s, z) = \int_{-\varepsilon_1}^{z+\varepsilon} \frac{A_0(z')e^{-s\tau(z-z')}}{R} dz' = 1 - A_0(z + \varepsilon)E(s). \tag{1.15}$$

当 $i = 2$, (1.10) 式可用文献[1]同样办法求解, $\tilde{H}_{02}$ 一级解为:

$$\tilde{H}_{02}(s, z) = -L_0(s, z)\tilde{H}_{01}(s, z), \tag{1.16}$$

$$L_0(s, z) = e^{-s\tau_0}\int_0^{\infty}\left[\frac{A_0[z + (\tau + \tau_0)/2]}{\tau + \tau_0} + \frac{A_0[(\tau + \tau_0)/2]}{2z + \tau + \tau_0}\right] e^{-s\tau}d\tau. \tag{1.17}$$

当 $i = 3$, (1.10) 的像方程为:

$$\int_{-\varepsilon_1}^{z+\varepsilon} \frac{A_0(z')e^{-s\tau(z-z')}H_{03}(s, z')}{R} dz' = F_{q3}(s, z), \tag{1.18}$$

$$\tilde{F}_{q3}(s, z) = \int_{-\varepsilon_1}^{0} \frac{A_0(z')\tilde{H}_0(s, 0)e^{-s\tau_+}}{R} dz' - \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{A_0(-z')\tilde{H}_0(s, -z')e^{-s\tau_-}}{R} dz'. \tag{1.19}$$

对 $\tilde{F}_{q3}$ 的估算表明,它随 z 而变. 所以预计 $\tilde{H}_{03}$ 也依赖着 z. 但由于(1.18)式左边的积分核在颠峰 $z' = z$ 附近比 $|\tilde{F}_{q_3}|$ 要陡得多(见图 2a),左边的积分近似等于 $\tilde{H}_{03}(s,z)\,C_0(s, z)$. (1.18)式右边积分没有颠峰,但在 $z = 0$ 有一极大,所以 $\tilde{H}_{03}$ 可以在 $z = 0$ 提出积分. 基于这些考虑,(1.18) 式可调整如下:

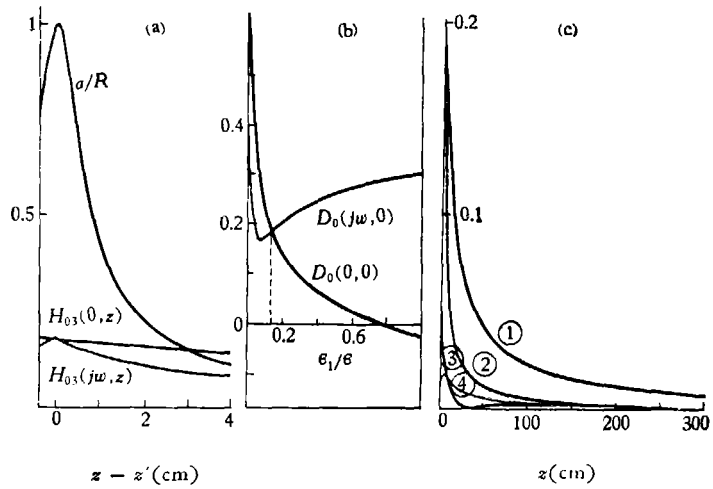


图　2

(*a*) a/R 与 $|H_{03}(0,z)|$ 及 $|H_{03}(j\omega,z)|$ 的比较 ($a=0.45$cm, $\omega=\pi/30$cm, $R=\sqrt{(z-z')^2+a^2}$)
(*b*) $|D_0(s,0)|$ 随 ε_1 的变化(图中虚线指最佳值)
(*c*) 一阶和二阶解 H_{03} 的差
(① $|H_{03}^{(1)}(0,z)|$, ② $|H_{03}^{(1)}(j\omega,z)$, ③ $|H_{03}^{(2)}(0,z)-H_{03}^{(1)}(0,z)|$,
④ $|H_{03}^{(2)}(j\omega,z),-H_{03}^{(1)}(j\omega,z)|$)

$$\tilde{H}_{03}(s,z)C_0(s,z)=[\tilde{H}_{01}(s,0)+\tilde{H}_{03}(s,0)]D_0(s,z)+\tilde{\delta}'(s,z)^{1)},\quad z\geqslant 0, \tag{1.20}$$

$$D_0(s,z)=\int_{-\varepsilon_1}^{0}\frac{A_0(z')e^{-s\tau_+}}{R}dz'-\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{A_0(-z')e^{-s\tau_-}}{R}dz', \tag{1.21a}$$

$$\tilde{\delta}(s,z)=\int_{-\varepsilon_1}^{z+\varepsilon}\frac{A_0(|z'|)[\tilde{H}_{03}(s,z)-\tilde{H}_{03}(s,z')]e^{-s(R-z+|z'|)}}{R}dz', \tag{1.21b}$$

式中 $C_0(s,z)$, τ_+, τ_- 已给于(1.15)和(1.6)式中，且 $\tilde{\delta}$ 是一小量可以先略去. 令 $z=0$，由(1.20)式解得:

$$\tilde{H}_{03}(s,0)=\tilde{H}_{01}(s,0)D_0(s,0)/B_0(s), \tag{1.22}$$

$$B_0(s)=C_0(s,0)-D_0(s,0)=2\int_0^{\varepsilon}\frac{A(z')e^{-s(R_0+z')}}{R_0}dz'\quad(R_0=\sqrt{z'^2+a^2}). \tag{1.23}$$

将(1.22)式代入(1.20)式，得到解

$$\tilde{H}_{03}(s,z)=\tilde{H}_{01}(s,z)D_0(s,z)/B_0(s),\quad z\geqslant 0. \tag{1.24}$$

(1.24)式表明，$\tilde{H}_{03}$ 随 z 的变化量决定于 $|D_0(s,0)|$ 之值(因当 $z\gg a$ 时 $|D_0|\to 0$). 为了平缓 $\tilde{H}_{03}$ (这将减小 $\tilde{H}_{03}$ 由积分号下提出的误差)，可以选择参数 ε_1 使 $|D_0(s,0)|$ 最小. 计算表明，当 $\varepsilon_1=0.13\varepsilon-0.17\varepsilon$ 时，$|D_0(0,0)|$ 和 $|D_0(j\omega,0)|$ 都比较小(见图 2b).

(1.22) 式是一阶近似解. 将它代入 (1.20) 式后，可得到高阶近似解. 逼近的速度是很快的. 图 2c 表示出一阶和二阶近似的差在 $s=0$ 和 $s=j\omega$ 是很小的，所以解(1.22)式是有足够精度的.

联合(1.14)和(1.22)式，主波像函数为:

1) $\tilde{H}_{02}$ 很小，可将它略去.

$$\tilde{H}_{0M}(s, z) = \tilde{H}_{0l}(s, z) + \tilde{H}_{0s}(s, z) = K_{0M}(s, z)\tilde{H}_{0M}(s, 0). \tag{1.25}$$

式中 $\tilde{H}_{0M}(s, 0) = \tilde{F}_0(s)/B_0(s)$ 是主波在激励源处的像函数;

$$K_{0M}(s, z) = [B_0(s) + D_0(s, z)]/C_0(s, z)$$

是主波"传输函数"且 $K_{0M}(s, 0) = 1$.

当 $z \gg a$, $D_0 \to 0$, 于是(1.25)式成为:

$$\tilde{H}_{0M}(s, z) = \tilde{F}_0(s)/C_0(s, z). \tag{1.26}$$

这和单振子的解(见文献[1]中(3.15))一样. 有下振子时的解(1.25)只有靠近激励源时才与单振子不同.

将(1.25)和(1.16)式进行拉氏反变换,得到整个"初发脉冲"波形

$$H_0(T_0, z) = H_{0s}(T_0, z) + H_{0r}(T_0, z) + H_{0l}(T_0, z), \tag{1.27}$$

式中

$$H_{0s}(T_0, z) = \sum_{m=1}^{M} \frac{F_m[B_0(s_m) + D_0(s_m, z)]}{B_0(s_m)C_0(s_m, z)} e^{s_m T_0}, \tag{1.28}$$

$$H_{0r}(T_0, z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}_0(s_\mu)[B_0(s_\mu)+D_0(s_\mu, z)]}{B_0(s_\mu)C_0'(s_\mu, z)} e^{s_\mu T_0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}_0(s_\nu)D_0(s_\nu, z)}{B_0'(s_\nu)C_0(s_\nu, z)} e^{s_\nu T_0}, \tag{1.29}$$

$$H_{0l}(T_0, z) = -\sum_{m=1}^{M} \frac{L_0(s_m, z)F_m}{C_0^2(s_m, z)} e^{s_m T_0} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{L_0(s_\mu, z)\tilde{F}_0(s_\mu)}{C_0'^2(s_\mu, z)} T_0 e^{s_\mu T_0}, \tag{1.30}$$

分别是稳态波形、瞬态波形和长尾. s_m; s_μ 和 s_ν 分别是 $\tilde{F}_0(s)$, $1/C_0(s, z)$ 和 $1/B_0(s)$ 的奇点, 而 F_m, $1/C'(s_\mu, z)$ 和 $1/B'(s_\nu)$ 是对应的留数. 奇点 s_μ 和 s_ν 已示于图 3a 中. 无穷级数(1.29)和(1.30)式收敛是很快的(以 $1/\mu^M$ 和 $1/\nu^M$ 的速度). 当偶极子被一短脉冲 $V_0(t)=1-\cos\omega t$ 激励时,级数以 $M = 3$ 的速度收敛. 图 4 划出了(由 (1.27)—(1.30)式)电流响应波形. 图 4a 是整个波形的不同部分; 图 4b 的曲线 1 是 $V_0(t)$ 和响应函数 $H_0(t, 0)$ 的比较图; 在不同位置电流波形的比较则示于图 4b 曲线 2. 连同图 1, 可以看出幅度和波形的主要变化发生在激励点附近.

为验证结果的精度,将解 (1.27) 和已有理论或实验结果作了比较. 文献 [2] 求得了无穷长偶极子的电流响应的严格解. 当偶极子为有限长时,在场或电流脉冲到达顶端 $z = h$ 以前,(第一个)电流初发脉冲应和文献 [2] 的电流脉冲一致. 图 4b 曲线 1 的点"·"是用文献 [2] 中严格理论算得的结果. 它和用公式(1.27)算得的曲线完全一致. 在文献 [3] 中测量了偶极子的表观输入电阻 $R_a = V_{0m}/I_{0m}$. 当 $a = 0.238$cm 时,测量 $R_a = 2 \times 370\Omega$. 这里,由 (1.27)和(1.29)式,表观电阻 (apparent resistace) 可以用下面公式表示:

$$R_a = 1/2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} A_0(0) \left[\frac{1}{B_0(0)} + \frac{1}{|B_0(j\omega)|}\right]. \tag{1.31}$$

由此算得 $R_a = 665\Omega$, 接近于实验值.

二、一次反射脉冲

下一步,考虑时间段 $[h, 2h]$. $t = h$ 以后, 初发脉冲对 $[F_0, I_0]$ 到达终端 $z = h$, 经反射

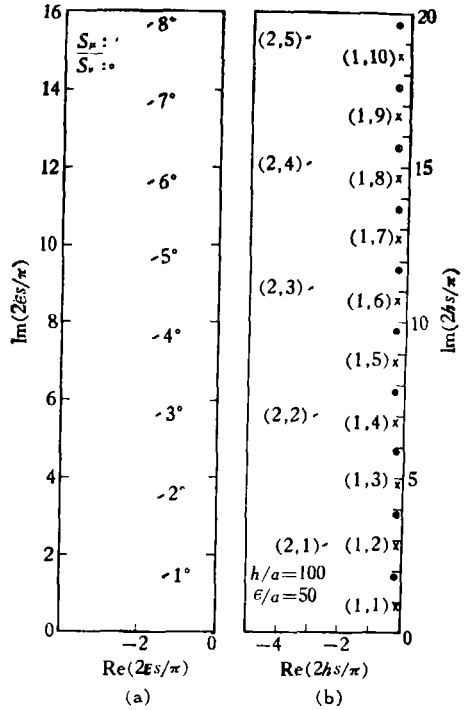


图 3　两类奇点的位置

(a) 第一类 s_μ 和 s_ν，(b) 第二类 s_{1n} 和 s_{2n}

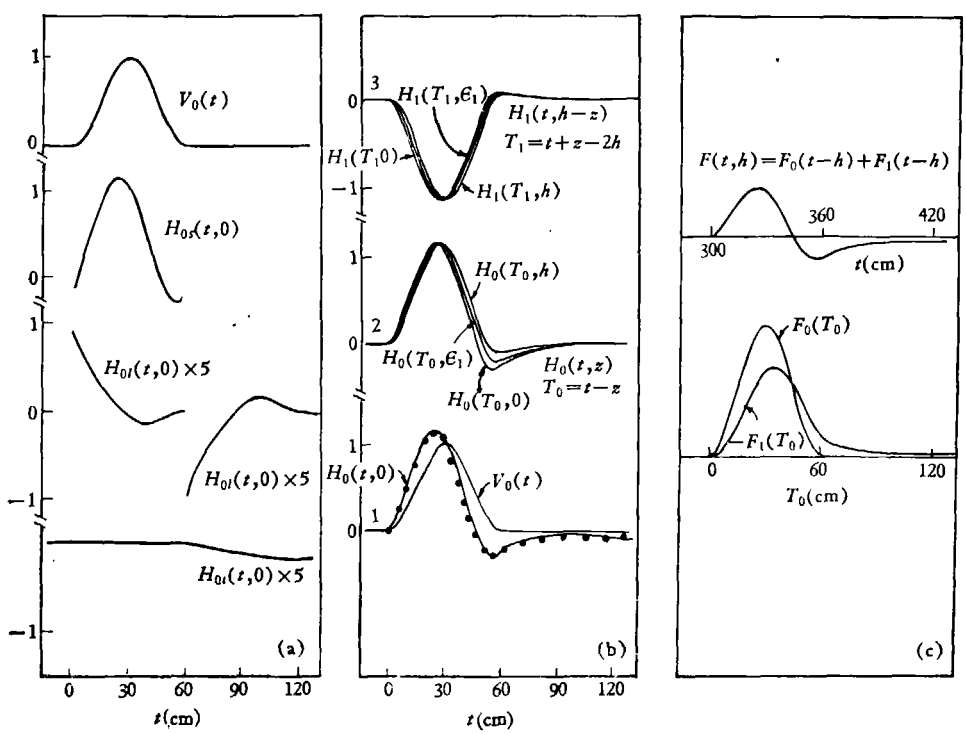


图 4　(a) 激励点的脉冲各部分，(b) 波形的变化 ($h=300$cm，$\epsilon_1=4$cm，$\epsilon=30$cm，$a=0.45$cm)，(c) 矢位的变化 ($F_0(T_0)=1-\cos(\omega T_0)$，$\omega=2\pi/T$，$T=60$cm，$T_0=t-h$)

出现了第一反射脉冲对 $[F_1, I_1]$. 由(1.1)和(1.2)式,当 $n=1$,可得到相应方程及边界条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{I_1(t-R,|z'|)+I_2(t-R,|z'|)}{R}\right]dz'=F_1(T_1)+F_2(T_2),\quad z\geqslant 0, \tag{2.1}$$

$$I_0(t,z)+I_1(t,z)+I_2(t,z)+\cdots=0,\quad z\geqslant h, \tag{2.2}$$

式中 $T_1=t+z-2h$, $T_2=t-z-2h$. 在时段 $(h, 2h)$ 和区间 $(0, \infty)$ 内, $T_2<0$. 因此 $F_2, I_2=0$. 将(2.2)式代入(2.1)式中后,方程及边界条件变成

$$\int_{-\infty}^{h}\frac{I_1(t-R,z')}{R}dz'=F_1(t+z-2h)+\int_{h}^{\infty}\frac{I_0(t-R,z')}{R}dz',\quad z\geqslant 0, \tag{2.3}$$

$$I_1(t,h)=-I_0(t,h). \tag{2.4}$$

为了和上节初发脉冲的解形式上一致,引进 $z_1=h-z$,并将 I_1 的形式解由(1.4)式改为:

$$I_1(t,z)=A_1(z_1)H_1(T_1,z_1)\quad (T_1=t+z-2h=t-z_1-h). \tag{2.5}$$

将(2.5)式代入(2.3)式,并令 z' 变为 $z_1'=h-z'$,得到

$$\int_0^{\infty}\frac{A_1(z_1')H_1(T_1-\tau_{1+},z_1')}{R_1}dz_1'=F_1(T_1)+\int_{-\infty}^{0}\frac{A_0(h-z_1')H_0(T_1-\tau_{1-},h-z_1')}{R_1}dz_1', \tag{2.6}$$

式中

$$R_1=\sqrt{(z_1-z_1')^2+a^2}=R,\quad \tau_{1+}=\tau(z_1-z_1'),\quad \tau_{1-}=\tau(z_1'-z_1)-2z_1.$$

同理在(2.6)式两边加上调整项,

$$\int_{-\varepsilon_1}^{0}\frac{A_1(z_1')H_1(T_1-\tau_{1+},0)}{R_1}dz_1', \tag{2.7}$$

并将它们分解成三个方程和边界条件,

$$\int_{-\varepsilon_1}^{z_1+\varepsilon}\frac{A_1(z_1')H_{1i}(T_1-\tau_{1+},z_1')}{R_1}dz_1'=F_{qi}(T_1,z_1),\quad i=1,2,3,\ z_1\geqslant 0, \tag{2.8}$$

$$H_{1i}(t-h,0)=-H_{0i}(t-h,h), \tag{2.9}$$

$$A_1(0)=A_0(h), \tag{2.10}$$

式中

$$F_{q1}(T_1,z_1)=F_{11}(T_1), \tag{2.11a}$$

$$F_{q2}(T_1,z_1)=F_{12}(T_1)+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{A_0(h-z_1')H_0(T_1-\tau_{1-},h-z_1')}{R_1}dz_1'-\int_{z_1+\varepsilon}^{\infty}\frac{A_1(z_1')H_1(T_1-\tau_{1+},z_1')}{R_1}dz_1', \tag{2.11b}$$

$$F_{q3}(T_1,z_1)=F_{13}(\tau_1)+\int_{-\varepsilon_1}^{0}\frac{A_1(z_1')H_1(T_1-\tau_{1+},0)}{R_1}dz_1'+\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{A_0(h-z_1')H_0(T_1-\tau_{1-},h-z_1')}{R_1}dz_1', \tag{2.11c}$$

$$F_1(T_1)=\sum_{i=1}^{3}F_{1i}(T_1),\quad H_1(T_1,z_1)=\sum_{i=1}^{3}H_{1i}(T_1,z_1). \tag{2.11d}$$

方程(2.8)看起来很像初发脉冲的方程(1.7). 但这里源函数 $F_{1i}(t)$ 是未知的,需要利用条件(2.9),(2.10)来确定.

当 $i=1$ 时，(2.8)和(2.9)式的像为

$$\tilde{H}_{11}(s, z_1)C_1(s, z_1) = \tilde{F}_{11}(s), \tag{2.12}$$

$$\tilde{H}_{11}(s, 0) = -\tilde{H}_{01}(s, h), \tag{2.13}$$

$$C_1(s, z_1) = \int_{-\varepsilon_1}^{z+\varepsilon} \frac{A_1(z_1')e^{-s\tau(z_1-z_1')}}{R_1}\, dz_1'. \tag{2.14}$$

此处 $\tilde{H}_{11}(s, z_1)$ 已从积分号内提出，因为在 A_1 满足下面平缓条件后，它应当独立于 z，

$$\int_{-\varepsilon_1}^{z_1+\varepsilon} \frac{A_1(z_1')}{R_1}\, dz_1' = k_0, \tag{2.15}$$

利用条件(2.10)，$A_1(z_1)$ 及常数 k_0 由(2.15)式解出为：

$$A_1(z_1) = k_0/\ln[\tau_0/\tau(z_1+\varepsilon_1)] = k_0A_0(z_1), \tag{2.16}$$

$$k_0 = A_0(h)\ln(\tau_0/\tau(\varepsilon_1)). \tag{2.16a}$$

将(2.16)式代入(2.14)式，得到

$$C_1(s, z_1) = k_0C_0(s, z_1). \tag{2.14a}$$

由(2.12)，(2.13)式，令 $z=0$，可解出 $\tilde{F}_{11}(s)$ 及 $\tilde{H}_{11}(s, z_1)$，

$$\tilde{F}_{11}(s) = -\tilde{H}_{01}(s, h)C_1(s, 0), \tag{2.17}$$

$$\tilde{H}_{11}(s, z_1) = -\tilde{H}_{01}(s, h)C_1(s, 0)/C_1(s, z_1). \tag{2.18}$$

当 $i=3$，同理(2.8)和(2.9)的像为：

$$\tilde{H}_{13}(s, z_1)C_1(s, z_1) = \tilde{F}_{13}(s) - \tilde{H}_0(s, h)D_1(s, z_1), \tag{2.19}$$

$$\tilde{H}_{13}(s, 0) = -\tilde{H}_{03}(s, h), \tag{2.20}$$

$$D_1(s, z_1) = \int_{-\varepsilon_1}^{0} \frac{A_1(z_1')e^{-s\tau_{1+}}}{R_1}\, dz_1' - \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{A_0(h-z_1')e^{-s\tau_{1-}}}{R_1}\, dz_1' = k_0D_0(s, z_1). \tag{2.21}$$

令 $z_1=0$，可解得：

$$\tilde{F}_{13}(s) = \tilde{H}_0(s, h)D_1(s, 0) - \tilde{H}_{03}(s, h)C_1(s, 0), \tag{2.22}$$

$$\tilde{H}_{13}(s, z_1) = \{H_0(s, h)[D_1(s, 0) - D_1(s, z_1)] - \tilde{H}_{03}(s, h)C_1(s, 0)\}/C_1(s, z_1). \tag{2.23}$$

(2.22)式表明，$|\tilde{H}_{13}|$ 随 z 的变化量依赖于 $|D_1(s, 0)|$. 同理选择 $\varepsilon_1 \doteq \varepsilon/7$，使 $|D_1(s, 0)|$ 最小.

联合(2.17)，(2.20)及(2.18)，(2.21)式后，得到 F_1 及 I_1 的主波

$$\tilde{F}_{1M}(s) = \tilde{F}_{11}(s) + \tilde{F}_{13}(s) = K_{aM}(s)\tilde{F}_0(s), \tag{2.24}$$

$$\tilde{H}_{1M}(s, z_1) = \tilde{H}_{11}(s, z_1) + \tilde{H}_{13}(s, z_1) = K_{1M}(s, z_1)\tilde{H}_{0M}(s, h), \tag{2.25}$$

式中

$$K_{aM}(s) = -B_1(s)/C_0(s, h) = -k_0B_0(s)/C_0(s, h), \tag{2.26a}$$

$$K_{1M}(s, z_1) = -[B_1(s) + D_1(s, z_1)]/C_1(s, z_1) = -K_{0M}(s, z_1), \tag{2.26b}$$

$$B_1(s) = C_1(s, 0) - D_1(s, 0) = k_0B_0(s). \tag{2.26c}$$

这里 $K_{1M}(s, z_1)$ 是电流脉冲的“反射函数”，且 $K_{1M}(s, 0) = -1$. 这表明电流在端点 $z_1=0$ ($z=h$) 是全反射.

当 $i=2$，由(2.8)及(2.9)式可解得 F_1 及 I_1 的长尾，

$$\tilde{F}_{12}(s) = L_a(s)C_1(s, 0)\tilde{H}_0(s, h), \tag{2.27}$$

$$\tilde{H}_{12}(s, z_1) = L_1(s, z_1)C_1(s, 0)\tilde{H}_{01}(s, h)/C_1(s, h), \tag{2.28}$$

式中 $L_a(s) = L_0(s, h) - L_0(s, 0)$，$L_1(s, z_1) = L_0(s, z_1) + L_a(s)$，而 $L_0(s, z)$ 则由 (1.17)

式定义.

经过拉氏逆变换,反射矢位及电流脉冲分别为:

$$F_1(T_1) = F_{1s}(T_1) + F_{1t}(T_1) + F_{1l}(T_1), \tag{2.29}$$

$$H_1(T_1, z_1) = H_{1s}(T_1, z_1) + H_{1t}(T_1, z_1) + H_{1l}(T_1, z_1), \tag{2.30}$$

式中

$$F_{1s}(T_1) = -k_0 F_0(T_1) + k_0 \sum_{m=1}^{M} \frac{F_m D_0(s_m, 0)}{C_0(s_m, h)} e^{s_m T_1}, \tag{2.31a}$$

$$F_{1t}(T_1) = k_0 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}_0(s_\mu) D_0(s_\mu, 0)}{C_0'(s_\mu, h)} e^{s_\mu T_1}, \tag{2.31b}$$

$$F_{1l}(T_1) = k_0 \sum_{m=1}^{M} F_m L_a(s_m) e^{s_m T_1}, \tag{2.31c}$$

$$H_{1s}(T_1, z_1) = -H_{0s}(T_1, h) + \sum_{m=1}^{M} \frac{F_m [D_0(s_m, 0) - D_0(s_m, z_1)]}{C_0(s_m, h) C_0(s_m, z_1)} e^{s_m T_1}, \tag{2.32a}$$

$$H_{1t}(T_1, z_1) = -H_{0t}(T_1, h) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}_0(s_\mu)[D_0(s_\mu, 0) - D_0(s_\mu, z_1)]}{C_0'(s_\mu, h) C_0'(s_\mu, z_1)} T_1 e^{s_\mu T_1}, \tag{2.32b}$$

$$H_{1l}(T_1, z_1) = \sum_{m=1}^{M} \frac{F_m L_1(s_m, z_1)}{C_0(s_m, h)} e^{s_m T_1} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}_0(s_\mu) L_1(s_\mu, z_1)}{C_0'(s_\mu, h)} e^{s_\mu T_1}. \tag{2.32c}$$

图 4c 显示了矢位在端点反射前后的变化及二者在端点的叠加. 它(不像电流)在端点不等于零. 图 4b 曲线 3 则显示了电流反射脉冲在不同位置的波形. 和初发脉冲相似,反射电流的幅度和波形的变化主要在反射点附近.

三、多次反射脉冲

进一步虑时间段 $(2h, 3h)$. 在 $t = 2h$ 以后,第一反射脉冲到达激励点 $z = 0$,产生向上的第二反射脉冲对 (F_2, I_2). $t = 3h$ 以前,F_3, I_3 及以后的脉冲都还未产生,积分方程及边界条件只剩下 $(n = 1)$

$$\int_0^\infty \frac{I_s(t - R, z') + I_1(t - R, z')}{R} dz' + \int_{-\infty}^0 \frac{I_s(t - R, -z') + I_1(t - R, -z')}{R} dz' = F_1(T_1) + F_2(T_2), \quad z \geqslant 0, \tag{3.1}$$

$$-F_1(t - 2h) + F_2(t - 2h) = 0, \tag{3.2}$$

式中 $F_1(T)$ 和 $I_1(t, z)[= A_1(h - z)H_1(T_1, h - z)]$ 已知 $(z > h$ 时,由边界条件 (2.2) $I_1(t, z) = -I_0(t, z))$. 由形式解(1.4)式,有

$$I_2(t, z) = A_2(z) H_2(T_2, z). \tag{3.3}$$

将(3.2),(3.3)式代入(3.1)式后,得到

$$\int_0^\infty \frac{A_2(z') H_2(T_2 - \tau_+, z')}{R} dz' + \int_{-\infty}^0 \frac{A_1(h + z') H_1(T_2 - \tau_-, h + z')}{R} dz' + \int_0^\infty \frac{A_1(h - z') H_1(T_1 - \tau_+, h - z')}{R} dz' + \int_{-\infty}^0 \frac{A_2(-z') H_2(T_1 - \tau_-, -z')}{R} dz' = F_1(T_2) + F_1(T_1). \tag{3.4}$$

由此方程的对称性，不难看出解 A_2, H_2 为：

$$A_2(z) = A_1(h + z), \quad H_2(T_2, z) = H_1(T_2, h + z). \tag{3.5}$$

解(3.5)式表明：在上振子中的二次反射脉冲对 F_2, I_2 正是下振子中第一反射脉冲对 $F_1(t - z - 2h)$, $I_1(t, h + z)$ 的延续．这一对脉冲由下端点 $z = -h$ 反射后，向上传播不变化的经过了激励点．这是因为假设激励源的输出阻抗为零．通常，脉冲经过激励点要发生变化．

$t = 3h$ 以后，产生了第三反射脉冲对，仿照求第一脉冲对的办法可以求得它们，仅需将入射脉冲由 F_0, I_0 改为 F_2, I_2．$t = 4h$ 以后，第四反射脉冲产生，像第二对脉冲一样，它们也可以求出来．如此下去，第 $2n - 1$ 及 $2n$ 次反射脉冲对可以表示成下式，幅度为：

$$A_{2n-1}(h - z) = k_0 k^{n-1} / \ln(\tau_0/\tau(h + \varepsilon_1 - z)), \tag{3.6a}$$

$$A_{2n}(z) = k_0 k^{n-1} / \ln[\tau_0/\tau(h + \varepsilon_1 + z)], \tag{3.6b}$$

式中

$$k = \ln(\tau_0/\tau(\varepsilon_1))/\ln(\tau_0/\tau(2h + \varepsilon_1)),$$

$$k_0 = \ln(\tau_0/\tau(\varepsilon_1))/\ln(\tau_0/\tau(h + \varepsilon_1)).$$

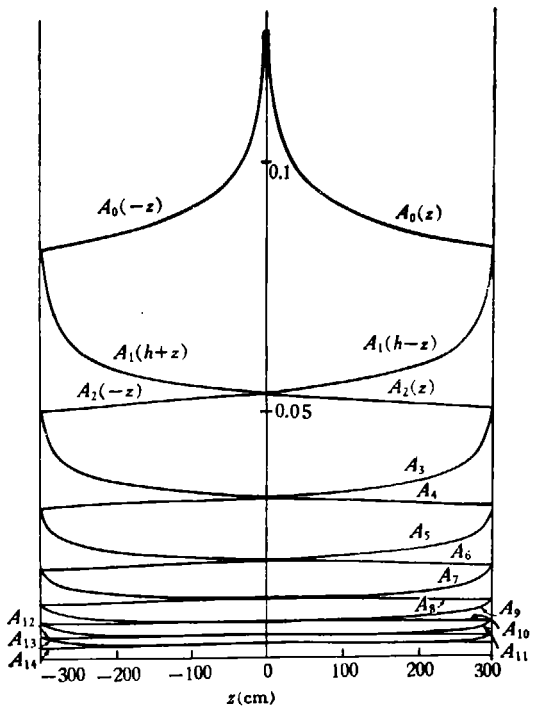


图 5　多次反射电流脉冲的幅度沿偶极子的变化
($A_0(0) = 0.12843$, $A_0(h) = 0.08263$,
$k_0 = 0.6434$, $k = 0.6089$)

图 5 划出了电流多次反射时幅度沿振子的变化．随着电流脉冲行进和反射，幅度连续的不均匀的下降．主要的衰减发生在反射后反射点附近．当 $h = 3m$, $a = 0.45$cm, $\varepsilon = T/2 = 0.3m$ 及 $\varepsilon_1 = 0.04$m 时，$k = 0.6089$．两次反射间幅度下降 40%．F_m 及 H_m 的像函数为：

$$\tilde{F}_{2n-1}(s) = \tilde{F}_{2n}(s) = K_{aT}^n(s)\tilde{F}_0(s), \tag{3.7}$$

$$\tilde{H}_{2n-1}(s, h - z) = K_{0T}(s, h)K_{1T}^{n-1}(s, 2h)K_{1T}(s, h - z)\tilde{H}_0(s, 0), \tag{3.8a}$$

$$\tilde{H}_{2n}(s, z) = K_{0T}(s, h)K_{1T}^{n-1}(s, 2h)K_{1T}(s, h + z)\tilde{H}_0(s, 0), \tag{3.8b}$$

式中

$$K_{aT}(s) = -k_0[1 - L_a(s)]B_0(s)/C_0(s, h), \tag{3.9a}$$

$$K_{iT}(s, z) = (-)^i[B_{iT}(s) + D_{iT}(s, z)]/C_{iT}(s, z) \quad i = 0, 1. \tag{3.9b}$$

$$X_{iT}(s, z) = X_i(s, z)/(1 - L_i(s, z)), \quad X = B, C, D, \tag{3.9c}$$

$$\tilde{H}_0(s, 0) = \tilde{F}_0(s)/B_{0T}(s), \tag{3.9d}$$

此处 K_{aT}, K_{iT} 是 (2.26a), (2.26b) 式的推广，它提供了整个脉冲(包括长尾)的特性．

四、总 电 流

由文献[1]中 (2.5a) 式，总电流的像函数为：

$$\tilde{I}(s, z) = \tilde{I}_0(s, z) + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{I}_{2n-1}(s, z) + \tilde{I}_{2n}(s, z)). \tag{4.1}$$

由于

$$I_{2n-1}(t, z) = A_{2n-1}(h - z)H_{2n-1}(T_{2n-1}, h - z),\ I_{2n}(t, z) = A_{2n}(z)H_{2n}(T_{2n}, z).$$

(4.1)式可以写成，

$$\tilde{I}(s, z) = A_0(z)e^{-sz}H_0(s, z) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{2n-1}(h - z)e^{-(2nh-z)}H_{2n-1}(s, h - z) + A_{2n}(z)e^{-(2nh+z)}H_{2n}(s, z)]. \tag{4.2}$$

将 (3.6), (3.8), (3.9d) 式及 $F_0(t) = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}V_0(t)$ 代入，得到

$$\tilde{I}(s, z) = Y(s, z)\tilde{V}_0(s), \tag{4.3}$$

式中

$$Y(s, z) = Y_0(s)[K_0(s, z) + K(s, 2h)K_1(s, z)], \tag{4.4}$$

$$Y_0(s) = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}B_{0T}(s), \tag{4.5}$$

$$K_0(s, z) = A_0(z)K_{0T}(s, z)e^{-sz}, \tag{4.6}$$

$$K_1(s, z) = A_0(h - z)K_{1T}(s, h - z)e^{sz} + A_0(h + z)K_{1T}(s, h + z)e^{-sz}, \tag{4.7}$$

$$K(s, 2h) = k_0K_{0T}(s, h)e^{-2hs}\sum_{n=1}^{\infty}[kK_{1T}(s, 2h)e^{-2hs}]^{n-1}. \tag{4.8}$$

这些复变函数从不同角度给出了总电流响应的特性. $Y(s, z)$ 是总电流的复数导纳. 当 $z = 0$

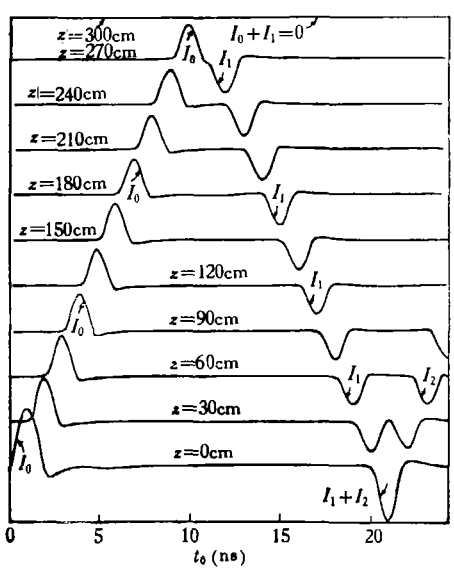


图 6 在不同位置总电流脉冲系列

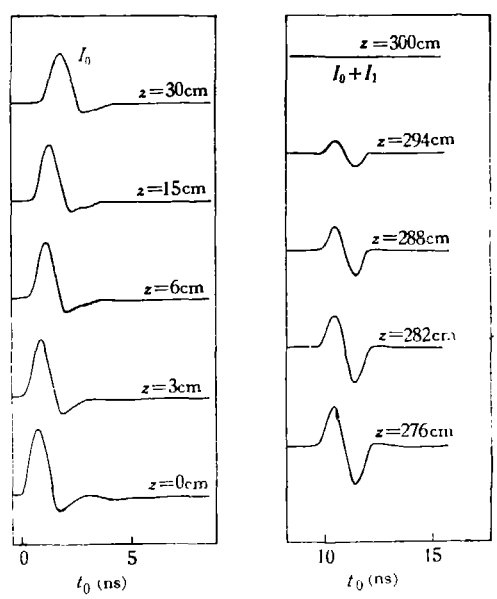


图 7

(a) 靠近激励源的初发脉冲 $I_0(T_0, z)$ 的变化
(b) 靠近端点的总电流波形

时，偶极子输入导纳为：

$$Y_{in}(s) = Y(s, 0) = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}A_0(0)\left[\frac{1}{B_{0T}(s)} - \frac{K(s, 2h)}{C_{0T}(s, h)}\right]. \tag{4.9}$$

$Y_0(s)$ 是初发电流脉冲的复数导纳．它提供了由 $V_0(t)$ 到 $I_0(t, 0)$ 的变换．$K_0(s, z)$ 是初发电流脉冲的传输函数．它提供了脉冲传播时，幅度的衰减（由 $A_0(z)$）波形的变化（由 $K_{0T}(s, z)$）及时延（由 e^{-sz}）．$K_1(s, z)$ 则是各次反射电流脉冲的传输函数．它提供了每一个反射脉冲在不同位置的幅度（由 $A_0(h \mp z)$）波形（由 $K_{1T}(s, h \mp z)$）时延及传播方向（由 $e^{\pm sz}$）．$K(s, 2h)$ 是反射脉冲间的传输函数．它给出了在同一位置不同的反射脉冲间的关系，也即幅度衰减（由 k）波形变化（由 $K_{1T}(s, 2h)$）及时延（由 e^{-2hs}）．

图 6 划出了由准行波展开解，(4.3)—(4.8)式算得的在不同位置的总电流脉冲序列．图形显示了初发脉冲第一和第二次反射脉冲在振子中沿不同方向移动时幅度的衰减和形状的微小变化．图 7a 表示出初发脉冲在离开激励点后的显著变化．图 7b 则表示出端点总电流．在反射点附近，反射前后两个脉冲靠得很近，叠加后总电流不同于单个电流脉冲．

(4.3)—(4.8)式还显示出偶极子受激后电量间的因果关系：电磁场（或电流）仅依赖它的“历史”和“现在”而与“将来”无关．也就是说某一点的单个电流脉冲，只决定系统的前部和地区结构而与后部结构无关．例如，初发脉冲的解(4.3)—(4.5)式完全和振子长度无关．图 6 也显示出，在 $t_0 = (h/v =)10$ns 以前，电流不受尾端结构影响．又如（由 3.8a）单个反射脉冲的形状可以用反射点的脉冲表示

$$\tilde{H}_{2n-1}(s, z_1) = -K_{1T}(s, z_1)\tilde{H}_{2n-1}(s, 0), \tag{4.10}$$

其中 $K_{1T}(s, z_1)$ 仅决定于振子前部（z_1）和地区（ε）．(4.10)式表明波形的相对变化也仅决定于比较两点（此时为 0 及 z_1）而与总长度无关．

解(4.3)—(4.8)是按时间顺序求得的个体准行波解的叠加．这是便于计算单个脉冲的“分体解”．由于(4.8)式是一幂级数，它可以求和而得到“整体解”

$$K(s, 2h) = k_0K_{0T}(s, h)e^{-2hs}/[1 - kK_{1T}(s, 2h)e^{-2hs}]. \tag{4.11}$$

正如(4.8)式是用来计算单个电流脉冲，(4.11) 和 (4.3)—(4.7) 式则可用来计算总电流．此时总电流响应决定于两类奇点(见(4.4)式)：第一类是 Y_0，K_{0T}，K_{1T} 的奇点．它们就是 $B_0(s)$ 及 $C_0(s, z)$ 的奇点 (s_ν, s_μ)．这些奇点取决于振子的前部和地区特性描绘出单个脉冲的性质．另一类是 $K(s, 2h)$ 的奇点．由(4.11)式很易找到这一类奇点系．它们已示于图 3b 中．有趣的是，这一类奇点 $s_{l,n}$ 紧密的依赖长度 $2h$ 而且按层分布(用 l 表示层)．将这一类奇点和由奇点展开法获得的谐振频率[1] 相比较，当 $h/a = 100$，$\varepsilon/a = 50$ 时，第一层奇点 $(s_{1,n} \doteq n\pi/2h)$ 极相似．在这里只得到“偶性”奇点(图中用“×”表示)．这是因为振子是中心激励的，所以电流是对称的(见(4.7)式)．如果振子不对称激励．电流解中将出现非对称项

$$k_0K_{0T}(s, h)e^{-2hs}/[1 + kK_{1T}(s, 2h)e^{-2hs}],$$

它将提供“奇性”奇点如图 3b 中“·”点所示．奇点 $s_{l,n}$ 提供了同一地点电流脉冲系列中各单个脉冲间的关系，它依赖于系统的纵向尺寸，显然这一类奇点与纵向自振频率有关．而奇点 s_ν，s_μ 却与“地区自振频率”有关．因为它依赖于地区参数 ε，但是 ε 的确定有很大任意性，所以 s_μ，s_ν 应当认为是某种数学因子而不是物理量．

理论上说，电流响应可以用(4.8)或(4.11)式(加上 (4.3)—(4.7) 式)来计算．但实际效果．

这两种公式是不同的. 当振子很长时($h \gg T$), 第一层奇点 $s_{1,h}\left(=\frac{n\pi}{2h}\right)$ 将会聚到原点以致奇点展开的级数收敛很慢$\left(\text{以速度 }\left(\frac{2h}{nT}\right)^3\right)$, 计算工作量将迅速增加. 而公式(4.8)却是按时序计算单个脉冲,忽略级数(4.8)式后面尾项,丝毫不影响序列前面脉冲的计算精度. 这是时序解的优点之一.

五、结 论

1. 求解瞬态(脉冲)响应的整个思路可归纳如下

a) 由于系统在脉冲激励下,电磁波在系统中多次反射; 源函数 $F(t, z)$ 及响应函数 $I(t, z)$ 都是脉冲系列. 它们可按单个脉冲对 (F_m, I_m) 分解而得到时序递推方程. *b*) $I_m(t, z)$是 t 和 z 的迅变函数. 求解含 I_m 积分方程的主要想法是: 将 $I_m(t, z)$ 中与 z 有关和无关部分分开来从而将 z 无关,但含 t 部分由积分号下提出. 基于源函数 $F_m(t \pm z)$的行波特性, I_m 中随 z 迅速变化的部分先被吸收于 $T_0 = t \pm z$ 中,以致 $I_q(T_0, z)$ 中(余下的)与 z 有关部分比原来要缓慢得多,得到一准行波解. *c*) 其次准行波 $I_q(T, z)$ 中与 z 有关部分被提取到幅度函数 $A(z)$ 中. 幅度函数满足平缓条件,这确保剩下的波形函数 $H(T, z)$ 更为平缓. *d*) 由于脉冲的主波和长尾有不同特性,这两部分被分离开来依次求解. 这样一来解具有较简单的形式,而且显示了响应的时序特性. *e*) 边界条件是借助递推方程间的耦合项来表示. 这些耦合项改变了响应函数在边界(不连续点)的性质. 为了处理这些耦合项,积分方程被进一步分解. 这些方程组可以用附加调整项、采用不同幅度函数或直接用逐次逼近法来求解.

2. 准行波展开法是一近似方法,但它有很高的精度. 各种方式验证表明,仅一阶近似精度就达 1%. 这不包括转折点(I_0 在激励点, I_m 在端点), 在那里误差达 5%. 更精确的解可以用高阶近似得到,逼近速度是很快的. 在另一篇文章中作者求得了递推方程的严格解,结果基本一致.

3. 用此法获得的解提供了许多表明实际过程的物理量,如描述一个脉冲的幅度、主波和长尾;表示脉冲间变化关系的传输、导纳和反射函数. 这些物理量特别便于研究响应脉冲的个别特征,如幅度衰减、波形变化,复数输入阻抗(初发脉冲为 Y_0, 总电流为 Y_{in}) 等.

4. 准行波解是基于海伦型积分方程中源函数的行波特征. 它适于研究长而平坦物体的辐射和散射问题. 在这类物体表面, 矢位是按或接近于行波方式传播的. 对图 1 所示这类物体的进一步分析,将另文发表.

最后,作者对哈佛大学 R. W. P. King 和吴大峻教授的鼓励和帮助表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] 沈浩明,中国科学A辑, 1984, 2: 157—168.
[2] Wu, T. T., *J. Math. Phys.*, **2**(1961), 892—894.
[3] King, R. W. P. & Schmitt, H. J., *IRE Trans. Antennas Propagation*, Ap-**10** (1962), 222—228.