中 国 科 学
1985 年 4 月　　A 辑　　第 4 期

闭合水平环状日珥的磁流体静力学平衡

隆 辉　　胡文瑞
(中国科学院力学研究所，北京)

摘　　要

对太阳进行的 H_α 单色光观测有时会看到水平环状日珥. 本文着重讨论了这种等离子体环的静力学平衡. 对于这种轴对称和闭场条件的情形，求得磁场和密度的解析解. 本文的结论表明，在不同的重力场和线性无力因子 α 的影响下，磁面形状和热力学参量的分布会有很大的变化.

一、前　　言

十年以前，Sheely 等人就曾观测到水平闭合的环状日珥[1]. 北京天文台也曾于 1980 年先后观测到三个环平面与太阳表面大致平行的环状日珥. 这些环状日珥在太阳表面上持续了 1—2 天. 在这段时间内可以认为这些日珥是闭合的. 已经知道这种闭合磁场结构对于日珥外部日冕的高温环境有某种屏蔽作用[2-4]，这种作用有助于维持日珥的状态. 我们可以把这种日珥环看做是处于静力学平衡态的闭合等离子体环，用轴对称条件和磁流体静力学方程组，研究其静力学平衡态下的磁场位形及热力学参量分布的各种特征.

王正志等人曾对这种环状日珥的平衡问题进行过研究[5]. 考虑到日珥环内 β 数比较小 (β 是特征热压与特征磁压之比)，他们在求解的过程中，使用小参数 β 展开，求得磁面函数的零级解与重力无关. 而在实际情况下，尽管 β 可以比较小，但大环半径 R 远大于小环半径 r_0，因而 $\beta R^2/r_0^2 \simeq 1$. 在这种条件下，很显然基本的磁面位形将受到重力的显著影响. 为此，我们放弃了对小 β 展开. 用以寻找更为合理的平衡位形. 结果表明，磁面形状、磁场强度及磁轴的下移量，都对 h_0 表现出较强的依赖性 (h_0 是重力标高). 进一步我们还将说明无力因子 α 的大小对解的性态的影响.

二、基本方程组及其求解

重力场下磁流体静力学方程组为:

$$\frac{1}{4\pi}(\nabla \times \boldsymbol{B}_1) \times \boldsymbol{B}_1 + \rho_1 \boldsymbol{g} = \nabla p_1, \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}_1 = 0, \tag{2.2}$$

$$p_1 = \rho_1 k T_1 / m, \tag{2.3}$$

本文 1984 年 5 月 10 日收到，1984 年 12 月 5 日收到修改稿.

其中 $\boldsymbol{B}_1$ 为磁场强度，ρ_1，p_1，T_1 分别是等离子体的物质密度、热压力及温度，m 为粒子质量，$\boldsymbol{g}$ 是重力加速度，k 是 Boltzmann 常数。由于所研究的问题是轴对称的，则在柱坐标系中磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 可表为[6]：

$$\boldsymbol{B}_1=\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial z_1},\ G_1(\psi_1)/r_1,\ -\frac{1}{r_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial r_1}\right),\tag{2.4}$$

其中 G_1 是 ψ_1 的任意函数，此时方程 (2.2) 自动满足。

引入无量纲参量：

$$\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{B}_1}{B_0},\ \psi=\frac{\psi_1}{B_0a^2},\ G=\frac{G_1}{\psi_0/a},\ \rho=\frac{\rho_1}{\rho_0},\ p=p_1/p_0,$$

$$T=\frac{T_1}{T_0},\ r=\frac{r_1}{a},\ z=\frac{z_1}{b},\ \psi_0=B_0a^2.$$

如果设日珥内是等温的，无量纲磁流体静力学方程组即可写为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\left\{\mathscr{L}(\psi)+G\dfrac{dG}{d\psi}\right\}=-\beta r^2\dfrac{\partial\rho}{\partial r},\\[2ex]\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\left\{\mathscr{L}(\psi)+G\dfrac{dG}{d\psi}\right\}=-\beta r^2\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial z}+\dfrac{\rho}{h_0}\right).\end{cases}\tag{2.5}$$

其中 $\beta=\dfrac{4\pi p_0}{B_0^2}$，$h_0=\dfrac{kT_0}{mgb}$，算符 $\mathscr{L}=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$。由 (2.5) 式可得到自洽性条件：

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial z}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}+\frac{\rho}{h_0}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r}.\tag{2.6}$$

作函数变换 $\rho=ue^{-z/h_0}$，将此式代入 (2.6) 式即得：

$$\frac{\partial(u,\ \psi)}{\partial(r,\ z)}=0.\tag{2.7}$$

由 (2.7) 式得出：

$$\rho=u(\psi)e^{-z/h_0}.\tag{2.8}$$

将 (2.8) 式代入 (2.5) 式，得到确定函数 ψ 的一个标量方程：

$$\mathscr{L}(\psi)+G\frac{dG}{d\psi}=-\beta r^2\frac{du}{d\psi}e^{-z/h_0}.\tag{2.9}$$

日珥环在重力作用下，其截面失去了对于水平面的对称性，作为一种闭场结构，同时兼顾

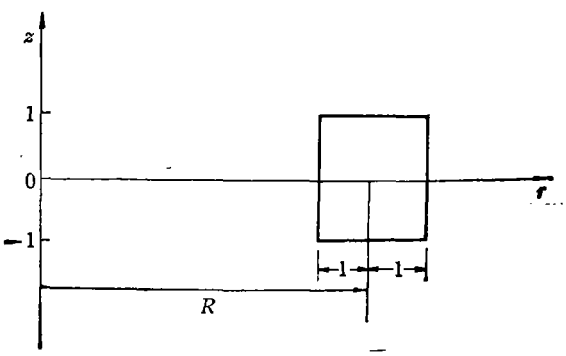


图 1　环状日珥截面示意图

数学上的简化，可取其环截面为矩形(图 1)。在线性近似下我们讨论 $G = \alpha\phi$。另外日珥内部温度较低，故可取 $u = C - \theta\phi$，其中 C 和 θ 是常数。问题随即化为求解下列方程的边值问题：

$$\begin{cases} \mathscr{L}(\phi) + \alpha^2\phi = \beta\theta r^2 e^{-\frac{1}{h_0}z}, \\ \phi(r, \pm 1) = \phi(R \pm 1, z) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

作变换 $z = z' - 1$，引进有限富氏变换：

$$\phi_n = \int_0^2 \phi(r, z') \sin\frac{1}{2} n\pi z' \, dz', \tag{2.11}$$

(2.10) 式即可化为下列常微分方程：

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \alpha^2 - \left(\frac{an\pi}{2b}\right)^2\right)\phi_n = \beta\theta r^2 \frac{n\pi(e^{1/h_0} + (-1)^{n-1}e^{-1/h_0})}{2\left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{n^2\pi^2}{4}\right)}, \\ \phi_n(R \pm 1) = 0, \qquad n = 1, \cdots n_0, n_0 + 1, \cdots. \end{cases} \tag{2.12}$$

n_0 是满足 $\alpha^2 > \left(\frac{na\pi}{2b}\right)^2$ 关系的最大整数。引进新的函数 φ_n，

$$\varphi_n = \frac{1}{r}\phi_n, \text{ 则 } \phi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} r\varphi_n(r) \sin\frac{n\pi}{2}(1 + z).$$

方程 (2.12) 式可化为：

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{a^2n^2\pi^2}{4b^2}\right) - \frac{1}{r^2}\right]\varphi_n = \beta\theta r M_n, \\ \varphi_n(R \pm 1) = 0, \; M_n = \frac{n\pi(e^{1/h_0} + (-1)^{n-1}e^{-1/h_0})}{2\left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{n^2\pi^2}{4}\right)}. \end{cases} \tag{2.13}$$

令 $\sqrt{\left|\alpha^2 - \left(\frac{an\pi}{2b}\right)^2\right|}\, r = \beta_n r = x$。可进一步将原方程化简。

先讨论 $\alpha^2 > \left(\frac{na\pi}{2b}\right)^2$，这时方程 (2.13) 可化为：

$$\begin{cases} \varphi_n'' + \frac{1}{x}\varphi_n' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\varphi_n = N_n x, \\ \varphi_n(\beta_n(R \pm 1)) = 0, \; N_n = \frac{\beta\theta M_n}{\beta_n^3}, \quad n = 1, \cdots n. \end{cases} \tag{2.14}$$

利用柱函数所满足的关系，及由 φ_n 所满足的边界条件，得到 φ_n 的解如下：

$$\varphi_n(x) = N_n\left[\frac{(\alpha_n^- Y_1(\alpha_n^+) - \alpha_n^+ Y_1(\alpha_n^-))J_1(x) + (\alpha_n^+ J_1(\alpha_n^-) - \alpha_n^- J_1(\alpha_n^+))Y_1(x)}{J_1(\alpha_n^+)Y_1(\alpha_n^-) - J_1(\alpha_n^-)Y_1(\alpha_n^+)} + x\right], \tag{2.15}$$

其中 $\alpha_n^{\pm} = \beta_n(R \pm 1)$，$J_1(x)$，$Y_1(x)$ 分别是第一类、第二类 Bessel 函数。由于 $r \neq 0$，$Y_1(x)$ 不会发散。

当 $\alpha^2 < \left(\frac{an\pi}{2b}\right)^2$ 时，方程 (2.13) 可化为：

$$\begin{cases} \varphi_n'' + \dfrac{1}{x}\varphi_n' - \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\varphi_n = N_n x, \\ \varphi_n(\alpha_n^{\pm}) = 0, \quad n = n_0 + 1, \cdots. \end{cases} \tag{2.16}$$

可与 (2.14) 式类似地求出:

$$\varphi_n(x) = N_n \left[\frac{(\alpha_n^+ K_1(\alpha_n^-) - \alpha_n^- K_1(\alpha_n^+))I_1(x) + (\alpha_n^- I_1(\alpha_n^+) - \alpha_n^+ I_1(\alpha_n^-))K_1(x)}{K_1(\alpha_n^-)I_1(\alpha_n^+) - I_1(\alpha_n^-)K_1(\alpha_n^+)} - x \right], \tag{2.17}$$

其中 $I_1(x)$, $K_1(x)$ 是第一类、第二类虚宗量 Bessel 函数.

回到原偏微分方程,由 (2.11), (2.15), (2.17) 式,可求出磁面函数 ψ 的表达式:

$$\psi = r \left[\sum_{n=1}^{n_0} L_n(r + A_{1n}J_1(\beta_n r) + A_{2n}Y_1(\beta_n r)) \sin \frac{1}{2} n\pi (1 + z) \right.$$
$$\left. + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} L_n(B_{1n}I_1(\beta_n r) + B_{2n}K_1(\beta_n r) - r) \sin \frac{1}{2} n\pi (1 + z) \right], \tag{2.18}$$

其中

$$L_n = \frac{\beta\theta n\pi (e^{1/h_0} + (-1)^{n-1} e^{-1/h_0})}{2\beta_n^2 \left(\dfrac{1}{h_0^2} + \left(\dfrac{n\pi}{2}\right)^2\right)},$$

$$A_{1n} = (\alpha_n^- Y_1(\alpha_n^+) - \alpha_n^+ Y_1(\alpha_n^-))/\beta_n (J_1(\alpha_n^+)Y_1(\alpha_n^-) - Y_1(\alpha_n^+)J_1(\alpha_n^-)),$$
$$A_{2n} = (\alpha_n^+ J_1(\alpha_n^-) - \alpha_n^- J_1(\alpha_n^+))/\beta_n (J_1(\alpha_n^+)Y_1(\alpha_n^-) - Y_1(\alpha_n^+)J_1(\alpha_n^-)), \tag{2.19}$$
$$B_{1n} = (\alpha_n^+ K_1(\alpha_n^-) - \alpha_n^- K_1(\alpha_n^+))/\beta_n (I_1(\alpha_n^+)K_1(\alpha_n^-) - K_1(\alpha_n^+)I_1(\alpha_n^-)),$$
$$B_{2n} = (\alpha_n^- I_1(\alpha_n^+) - \alpha_n^+ I_1(\alpha_n^-))/\beta_n (I_1(\alpha_n^+)K_1(\alpha_n^-) - K_1(\alpha_n^+)I_1(\alpha_n^-)).$$

在整个计算过程中，对 β 和 R 的取值没有限制. 运用渐近分析，不难证明当 n 较大时，$L_n \propto \left(\dfrac{n\pi}{2}\right)^{-3}$，级数是收敛的.

由 (2.4), (2.8) 式不难得到磁场和密度分布的解:

$$B_r = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2} n\pi L_n(r + A_{1n}J_1(\beta_n r) + A_{2n}Y_1(\beta_n r)) \sin \frac{1}{2} n\pi (1 + z)$$
$$+ \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2} n\pi L_n (B_{1n}I_1(\beta_n r) + B_{2n}K_1(\beta_n r) - r) \sin \frac{1}{2} n\pi (1 + z),$$

$$B_z = -\sum_{n=1}^{n_0} L_n \left[2 + A_{1n} \left(\frac{J_1(\beta_n r)}{r} + \beta_n J_1'(\beta_n r) \right) \right.$$
$$\left. + A_{2n} \left(\frac{Y_1(\beta_n r)}{r} + \beta_n Y_1'(\beta_n r) \right) \right] \sin \frac{1}{2} n\pi (1 + z)$$
$$\times \sum_{n=n_0+1}^{\infty} L_n \left[B_{1n} \left(\frac{I_1(\beta_n r)}{r} + \beta_n I_1'(\beta_n r) \right) \right.$$
$$\left. + B_{2n} \left(\frac{K_1(\beta_n r)}{r} + \beta_n K_1'(\beta_n r) \right) - 2 \right] \sin \frac{1}{2} n\pi (1 + z),$$

$$B_\theta = \alpha\left\{\sum_{n=1}^{n_1} L_n(r + A_{1n}J_1(\beta_n r) + A_{2n}Y_1(\beta_n r))\sin\frac{1}{2}n\pi(1+z)\right.$$

$$\left. + \sum_{n=n_1+1}^{\infty} L_n(B_{1n}I_1(\beta_n r) + B_{2n}K_1(\beta_n r) - r)\sin\frac{1}{2}n\pi(1+z)\right\},$$

$$\rho = e^{-\frac{1}{R_1}z}\left\{C - \theta r\left[\sum_{n=1}^{n_1} L_n(A_{1n}J_1(\beta_n r) + A_{2n}Y_1(\beta_n r) + r)\sin\frac{1}{2}n\pi(1+z)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n=n_1+1}^{\infty} L_n(B_{1n}I_1(\beta_n r) + B_{2n}K_1(\beta_n r) - r)\sin\frac{1}{2}n\pi(1+z)\right]\right\}. \tag{2.19}$$

三、计 算 结 果

当 $h_0 \to \infty$ 时，磁面形状是比较规则的，可以得到和文献 [5] 大致相同的结果. 我们关心的是重力场标高和纵向电流变化所引起的磁面变形，以及由于重力作用等离子体向下部沉积的程度. 为此我们考虑 h_0 比较小，变动 α，考察由此带来的一系列变化.

如 α 较小，由 (2.18) 式，ψ 表达式中仅含虚宗量 Bessel 函数，由于 r 较大. 运用渐近分析，展开函数 ψ 的前两项，得

$$\psi \sim r\left\{L_1\left[\frac{(R+1)\sqrt{\frac{R+1}{R+r'}}\,\mathrm{sh}\beta_1(1+r') + (R-1)\sqrt{\frac{R-1}{R+r'}}\,\mathrm{sh}\beta_1(1-r')}{\mathrm{sh}2\beta_1} - (R+r)\right]\right.$$

$$\times \cos\frac{1}{2}\pi z - L_2$$

$$\times\left[\frac{(R+1)\sqrt{\frac{R+1}{R+r'}}\,\mathrm{sh}\beta_2(1+r') + (R-1)\sqrt{\frac{R-1}{R+r'}}\,\mathrm{sh}\beta_2(1-r')}{\mathrm{sh}2\beta_2} - (R+r')\right]$$

$$\left.\times 2\sin\frac{1}{2}\pi z\cos\frac{1}{2}\pi z\right\}, \tag{3.1}$$

其中 $r' = r - R$. 在这表达式的两个方括号内的数值，总保持不大于零. 如 h_0 很小，α 较小时，易知 L_1 与 L_2 相差很小. 又因方括号内的表达式对 β_n 是增函数，故当参数选择适当时，在 $z > 0$ 的区域内，存在 ψ 的异号区，这意味着可能存在纵向排列的多磁轴结构，这一点在 a/b 很小时尤为明显. 在 α 变大时，这种情况会有所缓和，磁力线的"刚度"会随 α 变大而增强.

当 α 很大时，由 (2.18) 式，用渐近展开可得第一项为：

$$\psi \sim rL_1\left\{(R+r') - \frac{(R+1)\sqrt{\frac{R+1}{R+r'}}\sin\beta_1(1+r') + (R-1)\sqrt{\frac{R-1}{R+r'}}\sin\beta_1(1-r')}{\sin 2\beta_1}\right\}$$

$$\times \sin\frac{1}{2}\pi(1+z).$$

当 $\alpha^2 > \left(\frac{a\pi}{2b}\right)^2$，但 α 不十分大时，大括号表达式始终保持不大于零，当 $\alpha^2 \gg \left(\frac{a\pi}{2b}\right)^2$ 时，ψ 会出现

变号现象．即沿横向排列的磁轴数目增多．由于篇幅所限，我们仅给出对应 $h_0 = 1$，$h_0 = 0.1$ 的磁面和密度分布图（图 2—7）．在所有的磁面图及密度图中，我们对 β，C，$\frac{a}{b}$，R 诸参数取如

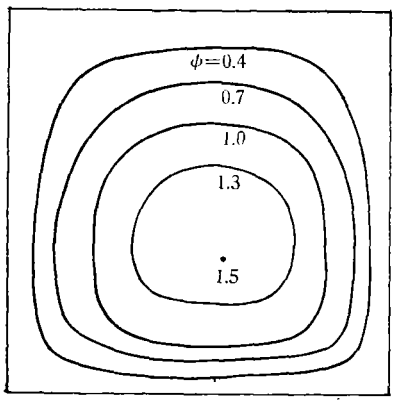


图 2a　磁面位形
($\alpha = 0.3$，$h_0 = 1.0$，$\theta = -0.9$)

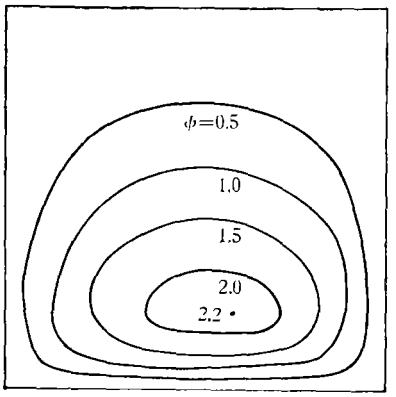


图 2b　密度分布图

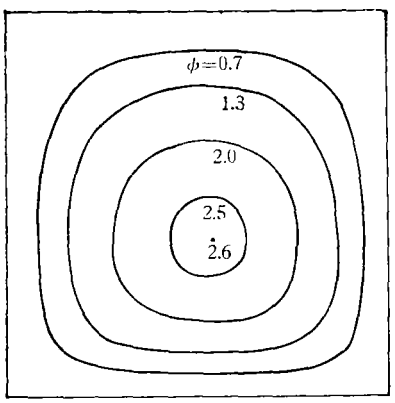


图 3a　磁面位形
($\alpha = 1.4$，$h_0 = 1.0$，$\theta = -0.92$)

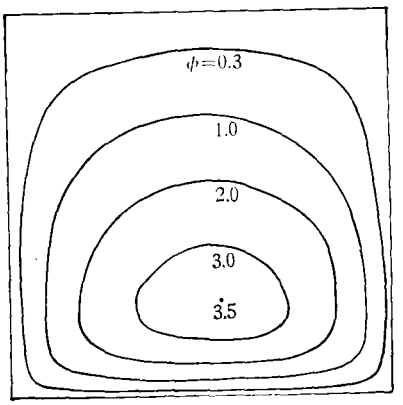


图 3b　密度分布图

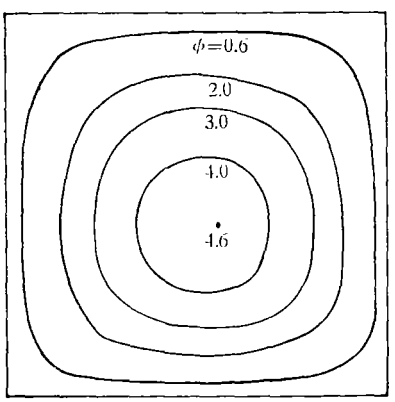


图 4a　磁面位形
($\alpha = 1.8$，$h_0 = 1.0$，$\theta = -0.9$)

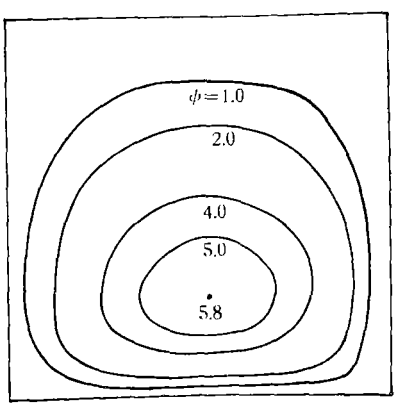


图 4b　密度分布图

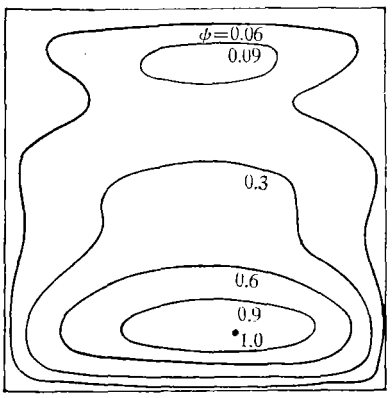


图 5a 磁面位形
($\alpha = 0.3$, $h_0 = 0.1$, $\theta = -0.0013$)

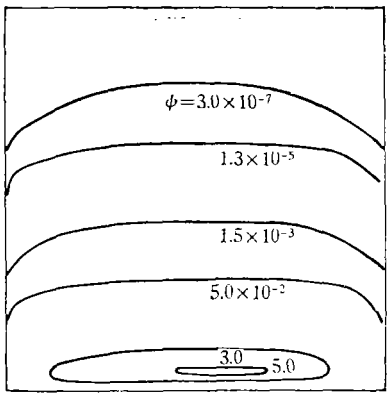


图 5b 密度分布图

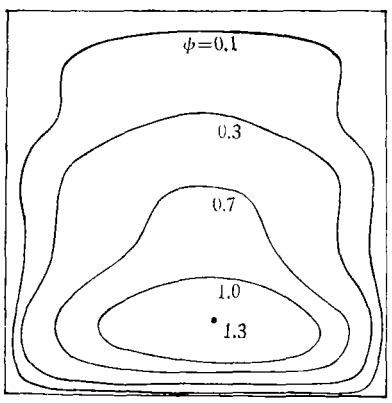


图 6a 磁面位形
($\alpha = 1.4$, $h_0 = 0.1$, $\theta = -0.0013$)

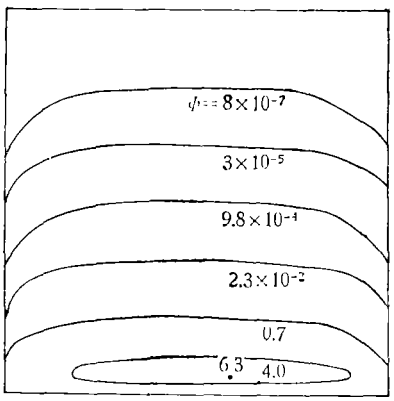


图 6b 密度分布图

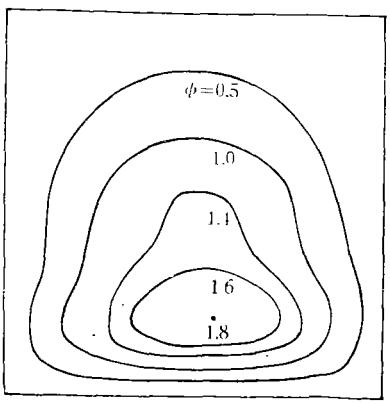


图 7a 磁面位形
($\alpha = 1.8$, $h_0 = 0.1$, $\theta = -0.0013$)

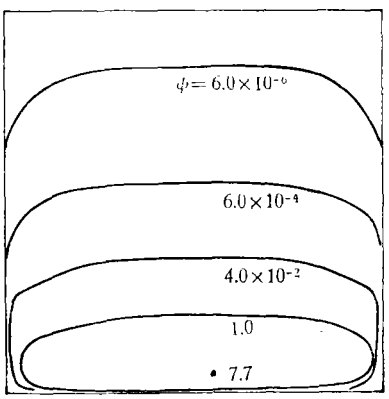


图 7b 密度分布图

下固定数值

$$\beta = 0.05,\ C = 0,\ \frac{a}{b} = 1,\ R = 10.$$

仅仅变动 α 和 θ，由此观察纵电流对平衡态的影响．带有符号 (a) 的诸图给出磁面位形——等 ψ 图，其中等 ψ 线上的数值给出对应的 ψ 数值．带有符号 (b) 的诸图给出密度分布——等密度图，其中等密度线上的数值给出对应的密度值．

对 h_0 较小的情况，在以前的一些工作中[5]，得到密度分布表达式为 $\psi^{(0)}e^{-z/h_0}$，$\psi^{(0)}$ 是无力场近似的一个本征解，即 $\psi^{(0)}$ 与重力无关．因此这表达式不能更好地反映磁压、重力、热压相互耦合而实现的力学平衡．不难证明，当 $C = 0$，密度的极大值纵标满足下列条件：

$$\frac{\partial \ln|\psi|}{\partial z} = \frac{1}{h_0}.$$

在 h_0 较大时，得到与王正志等人[5]完全相同的结果，在 h_0 较小时，极大值纵标会下移．

在求解时，无量纲参量与有量纲物理量之间的关系不容忽视．由 (2.5) 式易见，当特征尺度 a，b，特征热力学参量 p_0，T，加速度 g 给定时，β，ρ_0，h_0 也就被确定．留下可供变动的参量仅有 α，C，θ，在变动这些参量的过程中，会发现局部 β 数通常并非很小，它常高于

$$\beta = \frac{4\pi p_0}{B_0^2},$$

重力造成了 β 这个平均度量在纵向尺度上与局部状况有较大差异．如 R 增大，在其它参量不变时，磁场强度会大为下降．综合上述结果，可见 $\beta R^2 \sim 1$，忽略重力是使小参数 β 展开求解日珥环的方法不够完善的一个物理上的原因．

四、讨论和结论

本文在较合理的条件下，对日珥环等温磁流体静力学平衡求出了解析表达式．并给出各种典型参数条件下的剖面分布，其结果显示了磁流体静力学平衡的特性．

日珥环的平衡位形对重力标高变化很敏感．在环内 h_0 较小，固定 h_0 后，其它参量的变动也会显著地影响磁面形状．例如可能产生多磁轴结构，这些是和以往一些工作的重要区别．对 α，不必再为适应边界条件而满足离散化条件．无力场稳定性要求 α 不能过大[7]，现在由于考虑了重力和压力，对 α 取值的这一限制可以放宽．

在假定等温模式的同时，为了有助于说明日珥在高温环境中的维持我们采用了闭场的条件．因此不存在连续日珥模型中常常要着重说明的参量转化区．这些模型在物理上是个间断模型，热力学量和磁场强度都可能产生间断．日珥外部存在着维持总压守恒的磁场位形．由于闭场条件，边界上的热流矢量对能量输运贡献为零，其它的机械能流，如波动加热，可由日珥中的辐射损失来平衡．日珥在日面上的投影为暗条，根据本文的模型，在日珥内有一均匀的较低的温度、较高的密度，其外有较高的温度较低的密度，因而在边界上维持总压守恒是可能的．

等温模型在数学上避免了动量方程和能量方程联立求解．同研究片状日珥一样，把等温模型推广到表现各种能量输运过程的非等温模式是十分必要的．对于片状日珥，许多人做过这方面的工作．如果使用多方关系 $p = K\rho^r$ 来代替能量方程，问题会大为简化．选择不同的

参数 γ，可以模拟极为广泛的各类非等温过程，代表极为广泛的能量输运机制，我们将另文讨论.

环状日珥较之片状日珥是很不稳定的. 片状日珥的理论模型常常具有某些对称性，环状日珥则不然. 在环内的物质要受到一个合力指向沿大环半径向外的 Lorentz 力[8]. 如果没有适当的外场抵消这种力，平衡是无法维持的. 太阳上产生这种外场的电流体系是经常发生变化的，这种变化可能导致外部纵场的减弱或消失，从而引起日珥环不稳定. 在这里外部纵场相当于为环状日珥提供一个磁位阱，当纵场变化时，可能导致这个位阱变"浅"，以致等离子体脱离约束. 在观测上环状日珥至多持续 1—2 天，而片状宁静日珥常能持续维持数十天. 环状日珥不常出现，而片状日珥却每时都有. 这些事实都可能从磁面结构的复杂性及磁面位形的稳定性分析中得到一定程度的说明.

参 考 文 献

[1] Sheely, N. R. and Harvey, J. W., *Solar Physics*, **45**(1975), 275.
[2] Kopp, R. A. and Kuperus, M., *ibid.*, **4**(1986), 212.
[3] Kopp, R. A., *ibid.*, **27**(1972), 273.
[4] Cabriel, A. H., *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A**281**(1976), 339.
[5] 王正志等，中国科学 A 辑，1983，1：57.
[6] 胡文瑞，中国科学，1977，2：109.
[7] Voslamber, D. and Callebant, D. K., *Phys. Rev.*, **128**(1960), 2016.
[8] 卡多姆采夫，Б. Б.，等离子体中的集体现象，原子能出版社，1983.