中 国 科 学
1990 年 2 月　　A 辑　　第 2 期

精密的基本不等式与亏量和*

杨　乐**
(中国科学院数学研究所，北京 100080)

摘　要

本文讨论了亚纯函数的一些精密的基本不等式．应用它们，我们得到了亏量和的精确估计．主要结果为：设 $f(z)$ 于开平面超越亚纯，k 为一正整数，则

$$T(r,f)<\left(1+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\left(1+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$$
$$-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f)$$

以及

$$\delta(a,f^{(k)})+\delta(b,f^{(k)})\leqslant 1+\frac{1}{2k+1}.$$

这里 ε 是任意的小正数，a 与 b 是任意两个判别的有穷复数．

关键词：亚纯函数，亏量和

一、引　言

在函数值分布论中，引入所论函数的导数是一个重要的研究课题．这方面的非常突出与有趣的结果是下述 Hayman 不等式．

定理 A (Hayman[1])．设 $f(z)$ 于开平面超越亚纯，k 为一正整数，则

$$T(r,f)<\left(2+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$
$$+\left(2+\frac{2}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+S(r,f),\tag{1.1}$$

其中 $S(r,f)$ 具有通常余项的性质．

值得注意的是，在 Hayman 不等式中仅用了两项密指量便可界囿特征函数 $T(r,f)$．这在没有引进导数时是不能做到的．然而这两项密指量的系数较大，不像通常 Nevanlinna 第二基本定理中密指量的系数等于 1．

本文 1989 年 1 月 19 日收到．
* 国家自然科学基金会资助项目．
** 1988 年 8 月 1 日至 7 日在北京举行的国际数论与分析会议上，作者所作综合报告“亚纯函数的亏值与亏函数”的最后一部分摘要叙述了本文的主要结果．

针对这种情况，Hayman[3] 提出：在其不等式(1.1)里，$N\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 与 $N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$ 的系数是否为最佳数值？虽然已经过了 20 多年，但就笔者所知，关于这个问题还没有任何研究工作．在这篇短文里，我们使用简单的方法建立一个用 $N\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 与 $N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$ 来界囿 $T(r,f)$ 的基本不等式，而系数却可大大减小．此外，本文也讨论了一些其他类型的精密的基本不等式．应用它们，我们给出了亏量和的精确估计．

二、几 个 引 理

以下如无其他说明，$f(z)$ 是假定于开平面超越亚纯的函数，k 为一正整数．我们采用通常 Nevanlinna 理论中的记号(参阅文献[2,3])，如 $T(r,f)$，$N(r,f)$，$\bar{N}(r,f)$，$\delta(a,f)$等．量 $S(r,f)$ 表示在区间$(0,+\infty)$内定义的非负函数，并且具有如下性质：当 $f(z)$ 的级有穷时，$S(r,f)=O(\log r)$，$(r\to\infty)$；当 $f(z)$ 的级为无穷时，可能除去一列总辐长为有穷的例外区间后有 $S(r,f)=O\{\log(rT(r,f))\}$，$(r\to+\infty)$．$S(r,f)$ 每次出现时，可以是具有上述性质的不同函数．类似地有量 $S(r,f^{(k)})$．

为了以后的应用，我们先叙述两个已知结果作为引理．

引理 1 (Milloux[2,3])．

$$T(r,f)<\bar{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f). \tag{2.1}$$

引理 2 (Frank 与 Weissenborn[4])． 若 ε 为任意的正数，$N_1(r,f)=N(r,f)-\bar{N}(r,f)$，则

$$(k-1)\bar{N}(r,f)<(1+\varepsilon)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+(1+\varepsilon)N_1(r,f)+S(r,f). \tag{2.2}$$

引理 3． 若 ε 为任意的正数，则

$$\bar{N}(r,f)<\frac{1}{k}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\frac{1}{k}N(r,f)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f). \tag{2.3}$$

证．在(2.2)式中取正数 $\frac{\varepsilon}{3}$，并注意到 $N_1(r,f)=N(r,f)-\bar{N}(r,f)$，则

$$\bar{N}(r,f)<\frac{1}{k}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\frac{1}{k}N(r,f)+\frac{\varepsilon}{3k}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\frac{\varepsilon}{3k}N(r,f)+S(r,f). \tag{2.4}$$

由于

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\leqslant T(r,f^{(k)})+O(1)$$

$$\leqslant (k+1)T(r,f)+m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+O(1),$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{3k}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\frac{\varepsilon}{3k}N(r,f)\\&\leqslant\frac{k+2}{3k}\varepsilon T(r,f)+S(r,f)\\&\leqslant\varepsilon T(r,f)+S(r,f).\end{aligned}$$

将此估计式代入(2.4)式，引理 3 即可得证.

引理 4. 若 ε 为任意正数，则

$$\begin{aligned}\bar{N}(r,f)<&\frac{1}{k}N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\frac{1}{k}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\\&+\varepsilon T(r,f)+S(r,f).\end{aligned}\tag{2.5}$$

证. 对 $f(z)$，$k+1$ 与 $\frac{\varepsilon}{2}$ 应用引理 3，则

$$\begin{aligned}N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)>&(k+1)\bar{N}(r,f)-N(r,f)\\&-\frac{k+1}{2}\varepsilon T(r,f).\end{aligned}$$

将此式代入 Milloux 不等式(2.1)，得

$$\begin{aligned}k\bar{N}(r,f)<&N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\\&+(N(r,f)-T(r,f))+\frac{k+1}{2}\varepsilon T(r,f)+S(r,f).\end{aligned}$$

从而有(2.5)式.

三、精密的 Hayman 不等式

现在我们建立：

定理 1. 设 $f(z)$ 于开平面超越亚纯，k 为一正整数. 若 ε 为任意的正数，则在 $r>0$ 时有

$$\begin{aligned}T(r,f)<&\left(1+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\left(1+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\\&-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f).\end{aligned}\tag{3.1}$$

又若 a,b 为二有穷复数且 b 不为 0，则

$$\delta(a,f)+\delta_r(b,f^{(k)})\leqslant\frac{k+2}{k+1},\tag{3.2}$$

其中 $\delta_r(b,f^{(k)})$ 是值 b 对于 $f^{(k)}(z)$ 的相对亏量，其定义为

$$\delta_r(b, f^{(k)}) = 1 - \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}\right)}{T(r,f)}. \tag{3.3}$$

证. 在 Milloux 不等式(2.1)中,用估计式(2.5)来代替项 $\bar{N}(r,f)$, 即得(3.1)式.

应用(3.1)式于函数 $\frac{f(z)-a}{b}$,有

$$T(r,f) < \left(1+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) + \left(1+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right) - N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right) + \varepsilon T(r,f) + S(r,f).$$

因此

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)\left\{1-\frac{N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}\right\} + \left(1+\frac{1}{k}\right)\left\{1-\frac{N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)}{T(r,f)}\right\} \leqslant 1+\frac{2}{k}+\varepsilon+\frac{S(r,f)}{T(r,f)}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{k}\right)\delta(a,f) + \left(1+\frac{1}{k}\right)\delta_r(b,f^{(k)})\\ &\leqslant \overline{\lim_{r\to+\infty}}\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}\right) + \left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)}{T(r,f)}\right)\right\}\\ &\leqslant \overline{\lim_{r\to+\infty}}\left(1+\frac{2}{k}+\varepsilon\right) + \lim_{r\to+\infty}\frac{S(r,f)}{T(r,f)}\\ &= 1+\frac{2}{k}+\varepsilon.\end{aligned}$$

注意到 ε 的任意性,即得(3.2)式.

显然,在定理 1 的基本不等式(3.1)中, $N\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 或 $N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$ 的系数均不能小于1. 因此当 k 适当大时,(3.1)式可以说是近似于最佳的.

四、关于 $f^{(k)}(z)$ 的引理

为了进一步讨论,我们需要:

引理 5.

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r,f^{(k)}). \tag{4.1}$$

证. 由已知结果[3]有

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right) < C_k\left\{1+\log^+R+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{R-r}\right.$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+T(R,f)\Big\},$$

其中 $0<r<R<+\infty$，C_k 为仅依赖于 k 的常数.

另一方面，若 $\tau>1$，则有下述庄圻泰的不等式[3]

$$T(R,f)<C_\tau T(\tau R,f')+\log^+(\tau R)+4+\log^+|f(0)|,$$

其中

$$C_\tau=1+\frac{\sigma+1}{\sigma-1}+\frac{\log\frac{8e\sigma^2}{\sigma-1}}{\log\sigma},\quad \sigma=\tau^{\frac{1}{3}}.$$

由此不难证明

$$T(R,f)<(C_\tau)^kT(\tau^kR,f^{(k)})+k(C_\tau)^k\Big\{\log^+(\tau^kR)+4+\sum_{i=0}^{k}\log^+|f^{(i)}(0)|\Big\}.$$

若 $0<r<\rho<2r<+\infty$，取 $R=(\rho r)^{\frac{1}{2}}$，$\tau=\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{2k}}$. 这时

$$\log^+R<\log^+\rho,$$

$$\log^+\frac{1}{R-r}\leqslant\log^+\frac{\rho^{\frac{1}{2}}+r^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}(\rho-r)}\leqslant\log^+(2\rho)+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\frac{1}{r},$$

$$\log^+T(R,f)<\log^+T(\rho,f^{(k)})+\log^+\rho+C_k+\sum_{i=0}^{k}\log^+\log^+|f^{(i)}(0)|+2k\left\{\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}+\log\frac{\log\frac{8e\sigma^2}{\sigma-1}}{\log\sigma}\right\}.$$

我们再估计上式花括弧中的表达式

$$\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\leqslant\log\frac{2\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{6k}}}{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{6k}}-1}\leqslant\log 2+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\left(1+\frac{\rho-r}{r}\right)^{\frac{1}{6k}}-1}$$

$$\leqslant\log 2+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\frac{1}{6k}\cdot\frac{\rho-r}{r}}$$

$$< C_k + 2\log^+\rho + \log^+\frac{1}{r} + \log^+\frac{1}{\rho - r},$$

$$\log\frac{8e\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{3k}}}{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{6k}} - 1} < C_k + 2\log^+\rho + \log^+\frac{1}{r} + \log^+\frac{1}{\rho - r},$$

$$\log\frac{1}{\log\sigma} = \log\frac{6k}{\log\left(1 + \frac{\rho - r}{r}\right)} \leqslant \log\frac{6k}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho - r}{r}}$$

$$< C_k + \log^+\rho + \log^+\frac{1}{\rho - r}.$$

根据以上这些估计式,我们有

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < C_k\left\{1 + \log^+\rho + \log^+\frac{1}{r} + \log^+\frac{1}{\rho - r} + \log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|} + \sum_{i=0}^{k}\log^+\log^+|f^{(i)}(0)| + \log^+T(\rho, f^{(k)})\right\}.$$

再应用 Borel 关于单调函数的引理[2],便有引理 5 的结论.

如同 Frank 与 Weissenborn 关于引理 2 的证明,并结合引理 5, 我们有:

引理 6. 若 ε 为任意的正数, $N_1(r, f)$ 如同引理 2 中的定义,则

$$(k-1)\bar{N}(r, f) < (1+\varepsilon)N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + (1+\varepsilon)N_1(r, f) + S(r, f^{(k)}). \tag{4.2}$$

应用引理 6, 如同引理 3 的证明,我们有:

引理 7. 若 ε 为任意的正数,则

$$\bar{N}(r, f) < \frac{1}{k}N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + \frac{1}{k}N(r, f) + \varepsilon T(r, f^{(k)}) + S(r, f^{(k)}). \tag{4.3}$$

引理 8. 若 a, b 为两个判别的有穷复数,则

$$\bar{N}(r, f) < \frac{1}{2k}N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - a}\right) + \frac{1}{2k}N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b}\right) + \varepsilon T(r, f^{(k)}) + S(r, f^{(k)}), \tag{4.4}$$

以及

$$\bar{N}(r, f) < \frac{1}{2k}N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - a}\right) + \frac{1}{2k}N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b}\right) + \varepsilon T(r, f) + S(r, f). \tag{4.5}$$

证. 对函数 $f^{(k)}(z)$ 与三个判别的复数 a, b, ∞ 应用 Nevanlinna 第二基本定理,则

$$T(r, f^{(k)}) < \bar{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - a}\right)$$

$$+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f^{(k)}). \tag{4.6}$$

注意

$$T(r,f^{(k)})=m(r,f^{(k)})+N(r,f)+k\bar{N}(r,f),$$

以及由(4.3)式有

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)>(k+1)\bar{N}(r,f)-N(r,f)$$
$$-(k+1)\varepsilon T(r,f^{(k)})-S(r,f^{(k)}).$$

将以上两估计式代入(4.6)式，即得引理 8 结论中的(4.4)式，类似地可证(4.5)式.

五、其他类型的精密不等式

现在我们应用引理 8 证明：

定理 2. 设 $f(z)$ 于开平面超越亚纯，k 为一正整数. 若 ε 为任意正数，a 与 b 为任意两个判别的有穷复数，则

$$T(r,f^{(k)})<\left(1+\frac{1}{2k}\right)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a}\right)+\left(1+\frac{1}{2k}\right)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)$$
$$-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+\varepsilon T(r,f^{(k)})+S(r,f^{(k)}) \tag{5.1}$$

与

$$\delta(a,f^{(k)})+\delta(b,f^{(k)})\leqslant 1+\frac{1}{2k+1}. \tag{5.2}$$

证. 对函数 $f^{(k)}(z)$ 与三个判别的复数 a，b，∞ 应用 Nevanlinna 第二基本定理 (4.6)式，其中的 $\bar{N}(r,f)$ 再用估计式(4.4)代入，即得(5.1)式.

为了证明(5.2)式，我们由(5.1)式有

$$\left(1+\frac{1}{2k}\right)\delta(a,f^{(k)})+\left(1+\frac{1}{2k}\right)\delta(b,f^{(k)})$$
$$\leqslant\lim_{r\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2k}\right)\left(1-\frac{N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a}\right)}{T(r,f^{(k)})}\right)+\left(1+\frac{1}{2k}\right)\left(1-\frac{N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)}{T(r,f^{(k)})}\right)\right\}$$
$$\leqslant\lim_{r\to+\infty}\left\{1+\frac{1}{k}+\varepsilon+\frac{S(r,f^{(k)})}{T(r,f^{(k)})}\right\}$$
$$\leqslant 1+\frac{1}{k}+\varepsilon.$$

由于 ε 的任意性，即得(5.2)式.

定理 3. 命 $f(z)$，k，ε 均如定理 2 所设. 若 a 与 b 均为有穷复数且 b 不等于 0，则

$$T(r,f)<N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\frac{1}{2k}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)$$
$$+\left(1+\frac{1}{2k}\right)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)$$

$$+\varepsilon T(r,f)+S(r,f), \tag{5.3}$$

以及

$$\delta(a,f)+\frac{1}{2k}\delta_r(0,f^{(k)})+\left(1+\frac{1}{2k}\right)\delta_r(b,f^{(k)})\leqslant 1+\frac{1}{k}, \tag{5.4}$$

其中 $\delta_r(0,f^{(k)})$ 与 $\delta_r(b,f^{(k)})$ 分别为值 0 与 b 关于 $f^{(k)}(z)$ 的相对亏量(见(3.3)式).

证. 由

$$m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\leqslant m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f-a}\right),$$

有

$$T(r,f)<N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+T(r,f^{(k)})-N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(r,f).$$

类似于(5.1)式的推导,我们有

$$T(r,f^{(k)})<\left(1+\frac{1}{2k}\right)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\left(1+\frac{1}{2k}\right)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f).$$

联合以上两式,即有(5.3)式. 从(5.3)式可导出(5.4)式.

在基本不等式(5.1)与(5.3)中,右端正项密指量的系数和为 $2+\frac{1}{k}$,它比(3.1)式中右端正项密指量的系数和 $2+\frac{2}{k}$ 减少了一点. 在这方面,我们还有:

定理 4. 命 $f(z)$ 于开平面超越亚纯, k 为非负整数, ε 为任意正数,若 a,b,c 均为有穷复数且 b,c 皆不为 0, 则

$$T(r,f)<N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)+\frac{1}{2(k+1)}N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}-c}\right)-\left(1-\frac{1}{2(k+1)}\right)N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f), \tag{5.5}$$

与

$$\delta(a,f)+\delta_r(b,f^{(k)})+\frac{1}{2(k+1)}\delta_r(c,f^{(k+1)})\leqslant 1+\frac{1}{2(k+1)}. \tag{5.6}$$

证. 由 Milloux 不等式有

$$T(r,f)<\bar{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)$$

$$-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f).$$

再由(4.5)式有

$$\bar{N}(r,f)<\frac{1}{2(k+1)}N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+\frac{1}{2(k+1)}N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}-c}\right)$$
$$+\varepsilon T(r,f)+S(r,f).$$

联合以上两式，即可导出(5.5)式．由(5.5)式不难推出(5.6)式．

参　考　文　献

[1] Hayman, W. K., *Ann. of Math.*, **70**(1959), 9—42.

[2] ———, *Meromorphic Functions*, Oxford, 1964.

[3] 杨乐，值分布论及其新研究，科学出版社，1982.

[4] Frank, G., & Weissenborn, G., *Bull. London Math. Soc.*, **18**(1986), 29—33.