中 国 科 学(A 辑)
第25卷 第4期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1995年4月

非稳态光传输的微分几何描述*

郭 弘 邓锡铭

(中国科学院上海光学精密机械研究所，高功率激光物理国家实验室，上海 201800)

摘要 引入四维Riemann流形描述光束在介质中的传输过程，并在Cartan结构方程的基础上研究了光束的传输方程并给出了其测地线方程解释和曲率解释，在此基础上研究了该系统的守恒流性质及其推论.

关键词 Riemann流形 守恒流 Cartan标架

过去的光束传输大多限于稳态传输，即传输过程与时间无显函数关系，在此基础上发展了各种理论，如纯几何光学的程函方程及衍生的矩阵光学方法[1,2]、波动光学及推广的矩阵光学方法[1,2]以及Hamilton光学和算子光学方法[3,4]，等等. 文献[5]提出的光流体模型及其发展性工作[6]提供了另一种研究光束传输的途径，以此为基础，我们用微分几何方法全面地研究了稳态光束传输问题并作了应用性讨论[7]，本文将推广这种方法，把稳态研究推广到非稳情形，以四维Riemann几何代替三维Riemann几何，对标量光场的传输行为进行全面讨论. 为简便起见，下面均取自然单位制，即令真空中光速 $c=1$.

1 光与介质相互作用体系的四维Riemann几何结构

在稳态传输中，我们假定了系统的几何结构由Fermat原理给出[7]，当推广到非稳态情形时(即系统的几何结构含时间变量)，我们有理由认为其几何结构由不变元 $d\tau$ 决定，即

$$d\tau^2=n^2d\boldsymbol{x}^2-dt^2, \tag{1}$$

其中 $n=n(\boldsymbol{x},t)$ 为折射率，写成张量形式为

$$d\tau^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad (\mu,\nu=0,1,2,3), \tag{2}$$

其中 $g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)$ 为度规系数，$dx^\mu=(dx^0,d\boldsymbol{x})$，0分量为时间分量. 显然

$$g_{00}=-1,\ g_{ij}=n^2(\boldsymbol{x},t)\delta^i_{\ j} \qquad (i,\ j=1,2,3), \tag{3}$$

对光而言，其不变元 $d\tau\equiv 0$，亦即光线是零测地线方程之解. 在(1)式之下，依照文献[7]中的类似作法，把三维Riemann流形推广到四维流形中去，在反标空间中，根据Cartan结构方程及用Cartan标架表示的测地线方程，我们可以求得该系统的光线方程和曲率张量(以及Gauss曲率标量)，并以之分析光传输中的各种经典行为. 同时还可以根据这种结构研究光的守恒流结构、能量动量张量及受力情况. 此时，有[8]

1994-01-12收稿，1994-07-10收修改稿
*国家自然科学基金及国家"八六三"高科技基金资助项目

$$g_{\mu\nu}=\eta_{ab}e^{a}_{\cdot\mu}\ e^{b}_{\cdot\nu}\ , \tag{4}$$

其中 $\eta_{ab}=(-1,1,1,1)$, $e^{a}_{\cdot\mu}$ 为半度规，是随动标架变到 Cartan 标架的变换矩阵元，(1)式在 Cartan 标架下变为

$$d\tau^2=(e^1)^2+(e^2)^2+(e^3)^2-(e^0)^2, \tag{5}$$

其中 $e^a(a=0,1,2,3)$ 为 Cartan 标架，且满足

$$e^a=e^a_{\cdot\mu}\,dx^\mu \qquad (a,\mu=0,1,2,3), \tag{6}$$

于是

$$e^0=dt,\ e^1=ndx,\ e^2=ndy,\ e^3=ndz. \tag{7}$$

Cartan 结构方程[8]为

$$\begin{cases} de^a+\omega^a_{\cdot b}\wedge e^b=0 \qquad (\text{无挠情况下}), \\ d\omega^a_{\cdot b}+\omega^a_{\cdot c}\wedge\omega^c_{\cdot b}=-\dfrac{1}{2}R^a_{\cdot b}\ . \end{cases} \tag{8}$$

Cartan 标架下的测地线方程为

$$de^a+\omega^a_{\cdot b}\,e^b=0, \tag{9}$$

其中各项意义和(8)，(9)式中微分的区别请见文献[7,8]. 由(7)，(8)式可以解出

$$\begin{cases} \omega^0_{\cdot 1}=\omega^1_{\cdot 0}=n_t+dx, \\ \omega^0_{\cdot 2}=\omega^2_{\cdot 0}=n_t+dy, \\ \omega^0_{\cdot 3}=\omega^3_{\cdot 0}=n_t+dz, \\ \omega^1_{\cdot 2}=-\omega^2_{\cdot 1}=\dfrac{1}{n}(n_y dx-n_x dy), \\ \omega^1_{\cdot 3}=-\omega^3_{\cdot 1}=\dfrac{1}{n}(n_z dx-n_x dz), \\ \omega^2_{\cdot 3}=-\omega^3_{\cdot 2}=\dfrac{1}{n}(n_z dy-n_y dz), \end{cases} \tag{10}$$

其中 n_t, n_x, n_y, n_z 分别表示 n 对 t, x, y, z 的偏导数，及曲率张量 $R^a_{\cdot bcd}$:

$$\begin{cases} R^0_{\cdot 101}=R^0_{\cdot 202}=R^0_{\cdot 303}=-\dfrac{n_{tt}}{n}\ , \\ R^1_{\cdot 212}=\dfrac{1}{n^3}(n_{xx}+n_{yy})-\dfrac{1}{n^4}(n_x^2+n_y^2-n_z^2)-\dfrac{n_t^2}{n^2}\ , \\ R^1_{\cdot 313}=\dfrac{1}{n^3}(n_{xx}+n_{zz})-\dfrac{1}{n^4}(n_x^2+n_z^2-n_y^2)-\dfrac{n_t^2}{n^2}\ , \\ R^1_{\cdot 323}=\dfrac{1}{n^3}(n_{yy}+n_{zz})-\dfrac{1}{n^4}(n_y^2+n_z^2-n_x^2)-\dfrac{n_t^2}{n^2}\ , \end{cases} \tag{11}$$

故其 Gauss 曲率为

$$\begin{aligned} R=R_{abab}&=2[R_{0101}+R_{0202}+R_{0303}+R_{1212}+R_{1313}+R_{2323}] \\ &=\frac{2}{n^3}\left\{2\nabla^2 n-\frac{1}{n}(\nabla n)^2\right\}+\frac{n}{6}\left\{n_{tt}-\frac{n_t^2}{n}\right\}, \end{aligned} \tag{12}$$

测地线方程(9)化为

$$\begin{cases} \mathrm{d}^2t = n \cdot n_t(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2), \\ \mathrm{d}(n\mathrm{d}\boldsymbol{x})+\mathrm{d}n\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\nabla n\dfrac{\mathrm{d}s^2}{n^2}, \end{cases} \tag{13}$$

其中

$$\mathrm{d}s^2 = n^2\mathrm{d}l^2 = n^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2), \tag{14}$$

$$\mathrm{d}n = n_t\mathrm{d}t+\nabla n \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{15}$$

(13)式易化为

$$\begin{cases} \mathrm{d}^2t = -n \cdot n_t\mathrm{d}l^2, & (16a) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(n\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}l}\right)=\nabla n, & (16b) \end{cases}$$

显见(16b)式即是熟知的程函方程[1,2]，但因此时 n 与时间有关，故与(16a)式配合才能共同求解问题．可以理解为(16a)式为运动方程，(16b)式为轨迹方程．

2　几何结构下的电磁场方程

我们知道，真空中的标量电磁场方程是

$$\partial_\lambda\partial^\lambda\varphi = 0 \qquad (\lambda=0,1,2,3), \tag{17}$$

其中 $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 为标量电磁场量．引入(1)式，将普通微分变为绝对微分后，(17)式将会变为介质中的标量电磁场方程

$$\nabla_\lambda\nabla^\lambda\varphi = 0 \qquad (\lambda=0,1,2,3), \tag{18}$$

由于

$$\nabla_\lambda\nabla^\lambda\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\lambda(\sqrt{-g}\,g^{\lambda\nu}\partial_\nu\varphi), \tag{19}$$

其中 $g=\det(g_{\mu\nu})$，故(18)式可化为

$$\nabla^2\varphi - n^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\nabla n}{n}\cdot\nabla\varphi - 3n\frac{\partial n}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0, \tag{20}$$

易见，当稳态传输时，即 $\varphi(\boldsymbol{x},t)=\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 时，(20)式将退化到文献[7]中的结果．

该系统的守恒流方程可求得为

$$\nabla_\lambda j^\lambda = 0, \tag{21}$$

其中若令 $\varphi=\varphi_0(\boldsymbol{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL(\boldsymbol{x},t)}$，$\varphi_0(\boldsymbol{x},t)$ 为实函数，k 为真空波矢，$L(\boldsymbol{x},t)$ 为程函，则

$$j^\lambda = \varphi_0^2\nabla^\lambda L, \tag{22}$$

即

$$\begin{cases} j^0 = -\varphi_0^2\dfrac{\partial L}{\partial t}=\rho V^0, \\ \boldsymbol{j}=\dfrac{\varphi_0^2}{n^2}\nabla L=\rho\boldsymbol{V}, \end{cases} \tag{23}$$

其中

$$\rho=\varphi_0^2,\ V^0=-\frac{\partial L}{\partial t},\ \boldsymbol{V}=\frac{\nabla L}{n^2},\tag{24}$$

将试解 $\varphi=\varphi_0(\boldsymbol{x},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL(\boldsymbol{x},t)}$ 代入(18)式中可得

$$\begin{cases}\nabla_\lambda L\nabla^\lambda L=\dfrac{1}{k^2}\dfrac{\nabla_\lambda\nabla^\lambda\varphi_0}{\varphi_0}, & (25)\\ \nabla_\lambda\nabla^\lambda L=-2\dfrac{\nabla_\lambda L\nabla^\lambda\varphi_0}{\varphi_0}. & (26)\end{cases}$$

可以证明(26)式与守恒流方程一致. (25)式可推出

$$(\nabla L)^2=n^2\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{k^2\varphi_0}\left\{\nabla^2\varphi_0-n^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t^2}+\frac{\nabla n\cdot\nabla\varphi_0}{n}-3n\frac{\partial n}{\partial t}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}\right\},\tag{27}$$

令

$$(\nabla L)^2=n_{\mathrm{G}}^2,\tag{28}$$

则 n_{G} 就是在非稳态情形下定义的广义折射率,这种重新定义的 n_{G} 所构成的几何结构将使(25)式为0,即

$$\nabla_\lambda L\nabla^\lambda L=0,\tag{29}$$

由于 $V^\lambda=\nabla^\lambda L$, 故

$$V_\lambda V^\lambda=0,\tag{30}$$

即

$$V_\lambda V^\lambda=\frac{\mathrm{d}x_\lambda}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}=g_{\lambda\eta}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\eta}{\mathrm{d}s}=n^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2}{\mathrm{d}s^2}-\frac{\mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}s^2}=0,$$

这样的 V^λ 是自洽的,此时 $\boldsymbol{V}=\dfrac{1}{n}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}l}$, $V^0=1$. 对于稳态情形, $L(\boldsymbol{x},t)=L(\boldsymbol{x})-t$, 显然 $\dfrac{\partial L}{\partial t}=-1$, 亦是自洽的. 在该情况下, (27)式退化为文献[7]中结果.

由守恒流得到能量动量张量和广义介质力,有

$$T^{\mu\nu}=\rho V^\mu V^\nu\qquad(\mu,\nu=0,1,2,3),\tag{31}$$

$$f^\nu=\partial_\mu T^{\mu\nu}\qquad(\mu,\nu=0,1,2,3),\tag{32}$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0\qquad(\mu,\nu=0,1,2,3),\tag{33}$$

其中 $T^{\mu\nu}$ 为能量动量张量, f^ν 为四维的广义介质力(含自身作用,见文献[7]). 依文献[7]中类似作法,可以证明(33)式将会推得测地线方程,即与前面得到的轨迹方程是自洽的(含运动方程和程函方程,此时是含时的,故要两个方程). 由(32)式得到

$$\begin{cases}f^0=-3\varphi_0^2\left\{\dfrac{n_{\mathrm{G}'}}{n_{\mathrm{G}}}+\dfrac{\nabla n_{\mathrm{G}}\cdot\nabla L}{n_{\mathrm{G}}^3}\right\}, & (34)\\ \boldsymbol{f}=\varphi_0^2\left\{\dfrac{-5n_{\mathrm{G}'}\nabla L}{n_{\mathrm{G}}^3}-\dfrac{5\nabla n_{\mathrm{G}}\cdot\nabla L}{n_{\mathrm{G}}^5}\nabla L\right\}+\dfrac{\varphi_0^2}{n_{\mathrm{G}}^3}\nabla n_{\mathrm{G}}, & (35)\end{cases}$$

容易发现，当 $n_{G'}=0$ 时，有

$$f^0=-3\varphi_0^2\frac{\nabla n_G\cdot\nabla L}{n_G^3}\ , \tag{36}$$

$$\boldsymbol{f}=-5\varphi_0^2\frac{\nabla n_G\cdot\nabla L}{n_G^5}\nabla L+\frac{\varphi_0^2}{n_G^3}\nabla n_G\ , \tag{37}$$

且有

$$\boldsymbol{f}=\frac{5}{3}\frac{f^0}{n_G^2}\nabla L+\frac{\varphi_0^2}{n_G^3}\nabla n_G\ , \tag{38}$$

这与

$$\boldsymbol{j}=\frac{j^0}{n_G^2}\nabla L\qquad\left(\frac{\partial L}{\partial t}=-1,\text{稳态}\right) \tag{39}$$

十分相似，这里几何结构所决定的对称性就十分明显．亦易看到，(37)式即为文献[7]中结果．可见非稳态情形可以退化为稳态情形．

3　讨论和结论

(1) 容易发现，本文中关于 R、测地方程及能动张量和广义介质力的结论在稳态要求下均可退化为文献[7]中结论，故在理论上是合理的推广．

(2) 由于时间因素的引入，许多结论都将与时间有关．最明显的例子就是超短脉冲和超快过程物理的研究，这时由于有了介质的弛豫效应等效应，稳态理论将不能再解释传输现象．本文的后续工作将在这些方面进行探讨．

(3) 时间的引入使得有关色散的效应不可忽略，此方面的工作亦将在后续工作中进行．

(4) 本文只是给出了以几何方法研究光传输(含时)问题的框架，许多具体工作仍待后文讨论．

参　考　文　献

1　Gahtak A. Optics. New Delhi: McGraw-Hill, 1977. 1～200

2　Born M, Wolf E. Principles of Optics, 5th ed. Oxford: Pergman, 1975. 165～166

3　Luneberg R K. Mathematical Theory of Optics. Berkely: Uni California Press, 1964. 1～50

4　Arnaud J A. Hamilton theory of beam mode propagation. In: Wolf E ed. Progress in Optics, XI. Amsterdam: North-Holland, 1993

5　邓锡铭．有限束宽光动力学．杭州：杭州大学出版社，1993. 4, 7

6　邓锡铭，林伟平，方洪烈．光束传输的动力学分析．光学学报，1981, 1(5): 385～389

7　郭　弘，邓锡铭．Fermat 原理及稳态光束传输的微分几何．中国科学，A 辑，1995, 25(3): 273～279

8　Eguchi T, Gilkey P B, Hanson A J. Gravitation, gauge theories and differential geometry. Phys Rev, 1980, 66(6): 241～383