中 国 科 学
1988 年 2 月　　A 辑　　第 2 期

激光-等离子体相互作用中的等离子体密度轮廓修正

余 玮　　徐至展
（中国科学院上海光学精密机械研究所）

摘　要

本文系统地研究了激光-等离子体相互作用过程中出现的两种类型的密度轮廓修正．我们由分析力学类比导出的重要关系式，不仅能在取消前人工作中的各种近似的基础上更精确地给出有关特征参量的定标律，而且能自洽地求出因激光反射及等离子体波共振激发而导致的等离子体密度台阶及相应的场结构．

一、引　言

由于激光光波在不均匀等离子体的反射使其临界密度点附近的等离子体承受两倍的波压，光子动量的局部沉积改变了等离子体向真空膨胀的进程，使临界点附近的等离子体密度轮廓明显变陡，并在其上、下两侧的相邻部位造成梯度平缓的上、下坪台．此外，激光-等离子体相互作用的许多物理过程，如共振吸收[1]、上混杂共振[2]以及受激 Raman 散射[3]等均涉及电子等离子体波的共振激发，因各种原因形成的频率为 ω 的驱动电场在其等离子体共振点（等离子体频率 $\omega_{pe}=\omega$ 处）附近激发相同频率的等离子体波．由于等离子体共振点又是等离子体波的临界点，受激等离子体波只能向低密度晃区传播．这种外向传播的等离子体波也将使其临界区等离子体承受波压，在那里造成密度台阶．

由于激光-等离子体相互作用的绝大多数物理过程都发生在激光光波或受激等离子体波的临界点附近，密度台阶的出现无疑具有决定性的影响．近年来，这一课题受到高度重视[4-8]．关于激光反射时的密度轮廓修正，Lee 等人[4]计算了上、下坪台的等离子体密度与流动速度．Kruer 和 Estabrook[5] 在假定临界点附近的等离子体密度分布局部线性的基础上，计算了所设线性层的定标长度．关于等离子体波共振激发过程中的密度轮廓修正的研究，通常采用电容器模型．Kruer[7] 曾利用局部线性近似，就小密度台阶的定标律作了理论估计．Takabe 和 Mulser[8] 则试图直接解出电容器模型的基本方程组，然而由于数值计算中的困难迫使他们不得不假定在整个超音速区（supersonic region）等离子体流动速度恒等于离子声速．应当指出，迄今为止的研究都忽视了一个有关密度轮廓修正的重要关系式．利用本文由分析力学类比导出的这一关系式，不仅可以在不需进行上述各种近似的条件下准确地导出各有关特征

本文 1986 年 11 月 29 日收到，1987 年 6 月 19 日收到修改稿．

参量的定标律，而且可以方便地确定光波和受激等离子体波临界点附近的自洽密度轮廓与相应的场结构.

二、流体方程

一维不均匀等离子体，在其自身热压力的作用下向真空自由膨胀的过程中所形成的密度轮廓，由流体动力学方程的"自相似解"[9]

$$n_0 = Ae^{-x/l} \quad (l = c_s t \sim c_s \tau) \tag{1}$$

描述，其中 A 为常数，n_0 为等离子体密度，$c_s = (ZT_e/m_i)^{\frac{1}{2}}$ 为离子声速，τ 为激光脉宽，T_e，Z，m_i 分别为等离子体温度、离子电荷数及离子质量. 在上述密度轮廓中，各点的局域定标长度 $L = |n_0/(dn_0/dx)|$ 恒等于 l.

为了研究发生于临界区的密度轮廓修正，通常选用与局部变陡的密度台阶同步运动的坐标系. 在这个坐标系里，临界区等离子体的流体动力学行为由下列稳态方程组描述：

$$\frac{d}{d\xi}(NV) = 0, \tag{2}$$

$$V\frac{dV}{d\xi} = -\frac{1}{4}\frac{d}{d\xi}|q|^2 - \frac{1}{N}\frac{d}{d\xi}N. \tag{3}$$

这里，采用了归一化单位：

$$N = n_0/n_{cr}, \quad V = v_0/c_s, \quad \xi = Kx,$$

$$q = eE(x)/m\omega v_e, \quad v_e = (T_e/m)^{\frac{1}{2}},$$

其中，v_0，v_e 为等离子体流动速度及电子热速度，n_{cr} 为临界密度，$E(x,t) = \mathrm{Re}[E(x)e^{-i\omega t}]$ 为电场强度，ω 可以是光波或等离子体波的频率. 应当指出：激光-等离子体相互作用中出现的等离子体波的频率不一定等于激光频率，其临界点也不一定重合. 由方程(2)，(3)可导出：

$$V = N_s/N, \tag{4}$$

$$|q|^2 = |q_s|^2 - 2(V^2 - \ln V^2 - 1), \tag{5}$$

$$\frac{d}{d\xi}|q|^4 = 4(N_s^2N^{-3} - N^{-1})\dot{N}, \tag{6}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}|q|^2 = 4[(N_s^2N^{-3} - N^{-1})\ddot{N} - (3N_s^2N^{-4} - N^{-2})\dot{N}^2], \tag{7}$$

其中 $\dot{N}$，$\ddot{N}$ 表示 N 的一阶及二阶导数，N_s，q_s 为 N，q 在声速点的值. 在声速点，等离子体流动速度等于离子声速，$V = 1$，由(6)式可知，$|q_s|$ 为临界区最大场振幅.

三、波反射与密度轮廓修正

光波或电子等离子体波在其临界点反射后在等离子体晃区形成驻波. 这时 q 为实量.

光波所满足的波动方程为：

$$\frac{d^2}{d\xi^2}q + (1 - N)q = 0, \tag{8}$$

其中 $\xi = K_0x = \omega x/c$. 在临界密度区，(8)式必须与稳态流体动力学方程(2)及(3)式一起求解，我们采用力学类比的方法[8]：将 ξ 视为时间，q 视为质点的坐标，$p = \dot{q}$ 视为质点的动量，

由(8)式可建立 Hamilton 方程组:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -(1-N)q, \tag{9}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{10}$$

将由流体方程导出的(6)式代入,可求得"能量积分":

$$\frac{1}{2}\dot{q}^2 + 2\left(N_s^2N^{-1} + N - \frac{1}{2}N_s^2N^{-2} - \ln N\right) = E,$$

其中 $\frac{1}{2}\dot{q}^2$ 相当于质点动能、常数 E 则相当于总能量. 由(6)式得到在声速点 $\dot{q}=0$, 故

$$E = 4N_s - 2\ln N_s - 1, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\dot{q}^2 = \frac{1}{2}(q_s^2 - q^2) + 2N_s(2 - V - V^{-1}). \tag{12}$$

以 $\dot{q}$ 乘方程(8)两侧也可导出(12)式. 这个为以往的研究者所忽视的重要关系式在推导定标律时极其有用的. 在上坪台,电场强度及其导数都趋于零[4,5]. 令(5)及(12)式中的 q, $\dot{q}$ 为零, 并以 N_b, V_b 表示上坪台密度及流动速度,即有

$$q_s^2 = 2(V_b^2 - \ln V_b^2 - 1), \tag{13}$$

$$N_s = V_b q_s^4/4(1-V_b)^2. \tag{14}$$

在下坪台, $q=0$ 但 $\dot{q}\neq 0$, 以 N_a, V_a 表示下坪台密度及流动速度,由(5)及(12)式导出

$$q_s^2 = 2(V_a^2 - \ln V_a^2 - 1), \tag{15}$$

$$\dot{q}_a^2 = q_s^4 - 4(2N_s - N_s^2N_a^{-1} - N_a). \tag{16}$$

将(6)式改写成

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{d\xi} = \dot{q}q/2(N_s^2N^{-2} - 1) \tag{17}$$

后以(5)及(12)式代入,可求出临界区各点的局域定标长度. 其中,在临界点

$$K_0L_{cr} = |N_{cr}/\dot{N}_{cr}| = \sqrt{2}(1-N_s^2)[4N_s - N_s^2 - \ln N_s^2 - 3]^{-\frac{1}{2}} \times [q_s^4 - 2(N_s^2 - \ln N_s^2 - 1)]^{-\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

(13)—(15)及(18)式给出了描述临界区密度轮廓与场结构的主要特征参量 N_b, N_s, N_a, q_s, L_{cr} 之间的依赖关系.

应当指出,以上计算仅适用于临界区,如以此推广到低密度晕区,将导致 q, N 始终在 0 至 q_s 之间以及 N_a 至 N_s 之间等幅振荡[4,5]的显然不合理的结论. 这不仅因为(5)及(12)式的导出要求 q, $\dot{q}$ 为 V 的单值函数,而且即使在与密度台阶同步的坐标系中,稳态流体方程也并不适用于低密度区.事实上,光子动量的局部沉积所引起的等离子体密度轮廓修正仅出现在激光反射点附近,而在下坪台以下,依然是等离子体自由膨胀所造成的自相似密度轮廓(见(1)式). 由于 $K_0l \gg 1$, 方程(8)在自相似密度轮廓中的解可由 WKB 法求出:

$$q = 2q_0\varepsilon^{-1/4}\sin\left[-K_0l\left(2\sqrt{\varepsilon} + \ln\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}} + \phi_0\right)\right], \tag{19}$$

其中 $\varepsilon = 1-N$ 为等离子体介电系数, $q_0 = eE_0/m\omega v_e$, E_0 为真空中的激光场振幅. 设 x_a 为

下坪台坐标，则(1)及(19)式中，$A = n_a e^{x_a/l}$，

$$\phi_0 = -2\sqrt{\varepsilon_a} - \ln\frac{1-\sqrt{\varepsilon_a}}{1+\sqrt{\varepsilon_a}}.$$

由(16)及(19)式可以导出：

$$q_0^2 = (N_b - N_a)(N_b N_a - N_s^2)/N_b N_a\sqrt{1-N_a}. \tag{20}$$

(20)式使 q_0 与临界区特征参量联系起来. 图 1 画出了这些参量对于 q_0 的依赖关系，由此可得到以下定标律：

$$N_b = 1 + 0.59q_0^{0.98},\quad N_s = 1 - 0.66q_0^{0.8},$$
$$N_a = 1 - 0.97q_0^{0.64},\quad q_s = 2.1q_0^{0.82},$$
$$K_0 l_{cr} = 1.7q_0^{-1.37}.$$

在此基础上，不难由(1)，(5)，(17)及(19)式求出整个等离子体冕区的密度轮廓与相应的光波场结构(见图 2，其中 $q_0 = 0.325$，$K_0 l = 100$).

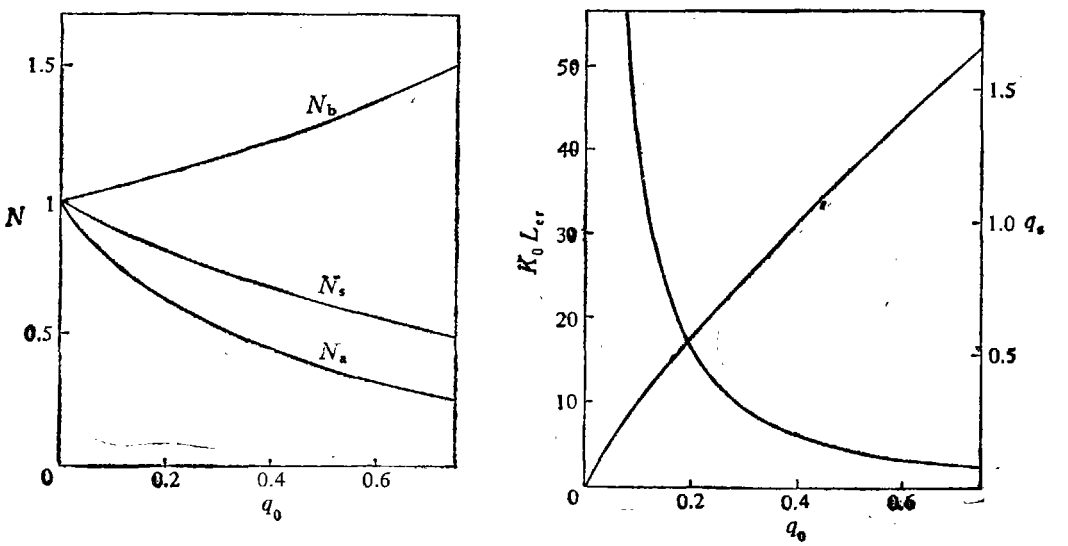


图 1　激光反射时，有关特征参量对于激光场强 q_0 的依赖关系

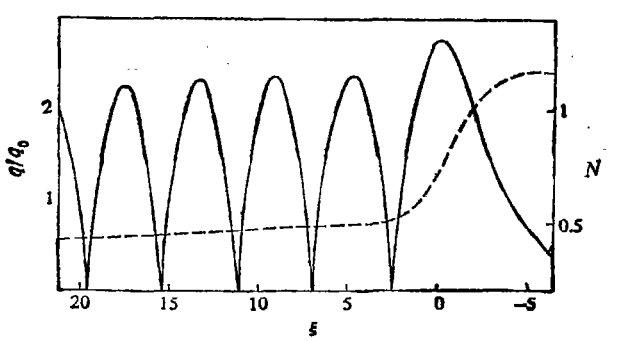


图 2　激光反射时的激光场结构(——)与等离子体密度轮廓(---)

我们再简单地讨论一下电子等离子体波反射点附近的密度轮廓修正. 电子等离子体波的波动方程可写为:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}q - \frac{1}{N}\frac{dN}{d\xi}\frac{dq}{d\xi} + (1-N)q = 0, \tag{21}$$

其中 $\xi = K_D x = \frac{\omega}{\sqrt{3}\,v_e}x$. 令 $p = \dot{q}/N$, 由(21)式得到

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{1}{N}(1-N)q, \tag{22}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{23}$$

将(6)式代入并考虑到 $\dot{q}_s = 0$, 可求出上述方程的"能量积分":

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}}{N}\right)^2 = \frac{1}{2}(1-V^2)^2/N_s^2 - \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{2}V^3 - \frac{3}{2}V\right)\Big/N_s^2. \tag{24}$$

以(5)及(24)式为基础,在上、下坪台进行与前类似的讨论,得到:

$$q_s^2 = 2(V_b^2 - \ln V_b^2 - 1) = 2(V_a^2 - \ln V_a^2 - 1) \tag{25}$$

$$N_s = \frac{3}{8}(1-V_b^2)^2 \Big/\left(1 + \frac{1}{2}V_b^3 - \frac{3}{2}V_b\right), \tag{26}$$

$$\dot{q}_s^2 = \frac{1}{V_a^2}\left[(1-V_a^2)^2 - \frac{8}{3}N_s\left(1 + \frac{1}{2}V_a^3 - \frac{3}{2}V_a\right)\right]. \tag{27}$$

将(5)及(24)式代入(17)式,可求出电子等离子体波临界点的局域定标长度:

$$K_D L_{cr} = 2N_s(1-N_s^2)\cdot\left[(1-N_s^2)^2 - \frac{8}{3}N_s\left(1 + \frac{N_s^3}{2} - \frac{3}{2}N_s\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\,[q_s^2 - 2(N_s^2 - \ln N_s^4 - 1)]^{-\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

在下坪台以下的低密度区,由于 $K_D l \gg 1$, 方程(21)在自相似密度轮廓中的解可表示为:

$$q = 2q_0\varepsilon^{-\frac{1}{4}}e^{(\xi_a-\xi)/2K_D l}\sin\left[-K_D l\left(2\sqrt{\varepsilon} + \ln\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}} + \phi_0\right)\right], \tag{29}$$

其中, $2q_0$ 表示 N 足够小处的等离子体驻波的振幅,

$$\phi_0 = -2\sqrt{\varepsilon_a} - \ln\frac{1-\sqrt{\varepsilon_a}}{1+\sqrt{\varepsilon_a}}.$$

由(27)及(29)式求得:

$$4q_0^2 = \left[(1-V_a^2)^2 - \frac{8}{3}N_s\left(1 + \frac{1}{2}V_a^3 - \frac{3}{2}V_a\right)\right]\Big/V_a^2\sqrt{1-N_a}. \tag{30}$$

由(25),(26),(28)及(30)式可求出特征参量 N_b, N_s, N_a, q_s, L_{cr} 对于 q_0 的依赖关系, 相应的定标律为:

$$N_b = 1 + 1.2q_0^{1.18},\quad N_s = 1 - 0.64q_0^{0.78},$$
$$N_a = 1 - 1.03q_0^{0.66},\quad q_s = 2.5q_0^{0.86},$$
$$K_D L_{cr} = 0.97q_0^{-1.5}.$$

因电子等离子体波的反射而造成的密度轮廓与场结构可以由(1),(5),(17),(24)及(29)式确定.

以上计算表明：(1)尽管方程(21)与方程(8)相比多了一个偶极项 $-\frac{1}{N}\frac{dN}{d\xi}\frac{dq}{d\xi}$，但两个方程所导出的定标律差别不大，这是因为在低密度区和上、下坪台附近 $dN/d\xi$ 很小，而在密度梯度很陡的声速点附近 $dq/d\xi \sim 0$. (2) 由于 $K_0/K_D = \sqrt{3}\, v_e/c \ll 1$，在等离子体波反射点附近出现的密度台阶将比光波反射点附近的更加陡峭，更加局域化.

四、等离子体波激发与密度轮廓修正

电子等离子体波共振激发过程中的密度轮廓修正，通常用电容器模型进行研究. 这一模型引进两项近似：[6,7] (1)略去了等离子体波波动方程中的偶极项；(2)假定作用于等离子体的高频驱动场 $\mathrm{Re}[E_d e^{-i\omega t}]$ 是空间均匀的. 虽然实际问题中的驱动场并不是空间均匀而往往是空间振荡的[1-3]，然而电子等离子体波的共振激发与其他区域无关而仅仅取决于共振点附近的驱动场，而在那里它们可以视为均匀并以其在共振点的值代换. 考虑到这一情况，在本文电容器模型中驱动场 E_d 的作用范围将限于下坪台以上，这样可以简化运算并使研究的对象集中于等离子体波的共振激发.

共振激发等离子体波是一个外向传递的行波，故 q 不再是实量. 令

$$q = eE(x)/m\omega v_e = q_1 + iq_2,\quad q_d = eE_d/m\omega v_e.$$

q_1, q_2 均为实量，电容器模型中的等离子体波波动方程为：

$$\frac{d^2}{d\xi^2}q_1 + (1-N)q_1 = \begin{cases} q_d & (N \geqslant N_a), \\ 0 & (N < N_a), \end{cases} \tag{31}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}q_2 + (1-N)q_2 = 0. \tag{32}$$

电子等离子体波的共振激发及其对等离子体密度轮廓的修正都发生在上、下坪台之间的临界密度区. 将 q_1, q_2 视为质点的二维坐标矢量的分量，$p_1 = \dot{q}_1$，$p_2 = \dot{q}_2$ 视为动量矢量的分量，由方程(31),(32)列出 Hamilton 方程组：

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -(1-N)q_1 + q_d,\quad \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \tag{33}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -(1-N)q_2,\quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}. \tag{34}$$

由(33),(34)式求得“能量积分”：

$$\frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + 2\left(N_s^2N^{-1} + N - \frac{1}{2}N_s^2N^{-2} - \ln N\right) - q_dq_1 = E, \tag{35}$$

其中 $|\dot{q}|^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2$. 考虑到当 $q_d \to 0$ 时，(35)式应能回复到(12)式，故

$$E = 4N_s - 2\ln N_s - 1,$$

$$\frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + \frac{1}{2}(|q|^2 - |q_s|^2) + 2N_s(V + V^{-1} - 2) - q_dq_1 = 0. \tag{36}$$

将(31),(32)式代入

$$\frac{d^2}{d\xi^2}|q|^2 = 2(q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

后得到:

$$|\dot{q}|^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}|q|^2 + (1-N)|q|^2 - q_d q_1, \tag{37}$$

将(37)式代入(36)式,得到

$$3q_d q_1 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}|q|^2 + (2-N)|q|^2 - 4N_s(2 - V - V^{-1}) - |q_s|^2. \tag{38}$$

将(38)式对 ξ 求导两次后代入方程(31),可以计算得到:

$$\frac{1}{2}\frac{d^4}{d\xi^4}|q|^2 + \frac{5}{2}(1-N)\frac{d^2}{d\xi^2}|q|^2 - 3\dot{N}\frac{d}{d\xi}|q|^2 - \ddot{N}|q|^2$$
$$= 3q_d^2 - (1-N)[(2-N)|q|^2 + 4N(N_s N^{-1} - 1)^2 - |q_s|^2], \tag{39}$$

其中 $|q|^2$, $\frac{d}{d\xi}|q|^2$, $\frac{d^2}{d\xi^2}|q|^2$ 由(5)—(7)式给出, $\frac{d^4}{d\xi^4}|q|^2$ 可由(7)式计算得到. 不难看出,方程(39)式是 N 的四阶微分方程,它决定了临界区各点的等离子体密度分布. 在下坪台以下的低密度冕区中,共振激发等离子体波沿 ξ 轴向外传播. 由于 $K_D l \gg 1$, 方程(31), (32)在自相似密度轮廓中的解为:

$$q = q_1 + iq_2 = |q_0|\varepsilon^{-1/4}\exp\left[-iK_D l\left(2\sqrt{\varepsilon} + \ln\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}} + \phi_s\right)\right], \tag{40}$$

其中 $|q_0|$ 为 N 足够小处的等离子体行波场振幅.

现我们来计算各特征参量对于驱动场强 q_d 的依赖关系. 在 $N > 1$ 的过密等离子体中,电子等离子体波蜕化为指数型衰减场,到了上坪台,q 和 $\dot{q}$ 均趋于 0. 由(5)及(36)式得到:

$$|q_s|^2 = 2(V_b^2 - \ln V_b^2 - 1), \tag{41}$$

$$N_s = (V_b^2 - \ln V_b^2 - 1)/2(V_b + V_b^{-1} + 2). \tag{42}$$

由(5),(36)及(40)式可以求得,在下坪台

$$|q_a|^2 = |q_0|^2(1-N_a)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= |q_s|^2 - 2(V_a^2 - \ln V_a^2 - 1), \tag{43}$$

$$\left(\frac{d}{d\xi}|q|^2\right)_a = \frac{1}{2}|q_0|^2(1-N_a)^{-3/2}\dot{N}_a$$
$$= 4(N_s^2 N_a^{-3} - N_a^{-1})\dot{N}_a, \tag{44}$$

$$|\dot{q}_a|^2 = |q_0|^2(1-N_a)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2(V_a^2 - \ln V_a^2 - 1) + 4N_s(2 - V_a - V_a^{-1}) + 2q_d q_{1a}. \tag{45}$$

由于下坪台位于"电容器"的边界,(45)式中的 $q_{1a} = q_d/\varepsilon_a = q_d(1-N_a)^{-1}$. (41)—(45)式确定了 $N_b, N_s, N_a, |q_s|, |q_0|$ 对于驱动场强 q_d 的依赖关系 (见图 3(a)). 在此基础上,对于不同强度的驱动场计算方程(39)的数值解,可确定等离子体波临界点的局域定标长度 L_{cr} 对于 q_d 的依赖关系 (见图 3(b)). 我们的计算导致以下定标律:

$$N_b = 1 + 0.49q_d^{0.58},\ N_s = 1 - 0.64q_d^{0.51},$$
$$N_a = 1 - 0.74q_d^{0.48},\ K_D L_{cr} = 0.73q_d^{-0.82},$$
$$|q_s| = 1.98q_d^{0.52},\ q_0 = 1.81q_d^{0.64}. \tag{46}$$

对于给定的驱动场强求出相应特征参量代入方程(1),(5)及(38)—(40),计算得到等离子

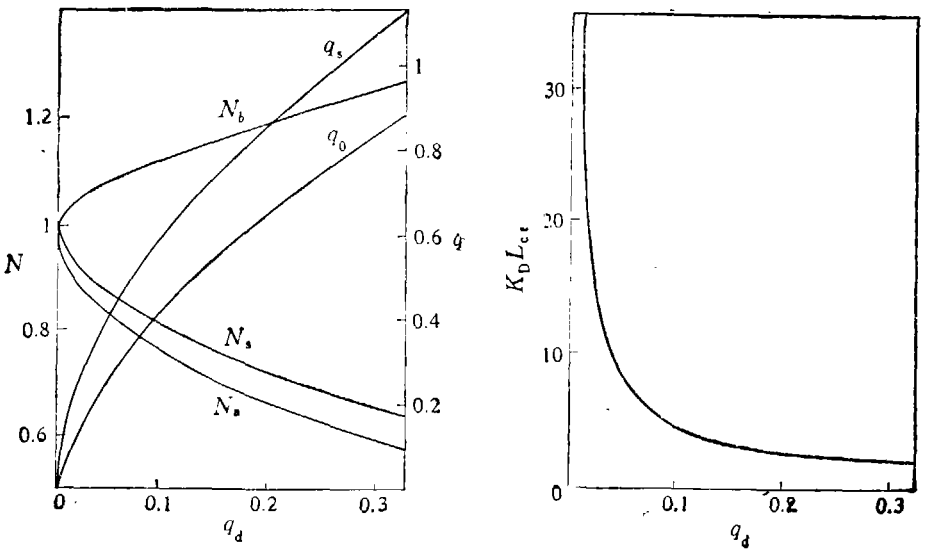


图 3　等离子体波共振激发过程中，有关特征参量对于驱动场强 q_d 的依赖关系

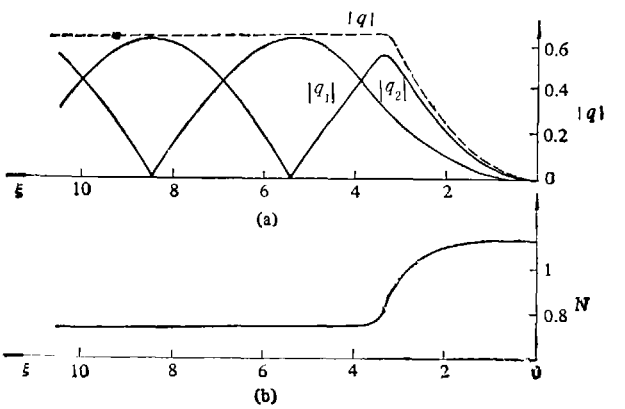


图 4　等离子体波共振激发过程中的等离子体波场强（a）与等离子体密度轮廓(b)

体冕区的共振激发等离子体波与自洽密度轮廓如图 3 所示，其中 $q_d = 0.1$, $K_D l = 1000$.

应当指出：本文并未考虑超热电子对密度轮廓修正的影响. 显然，由共振激发等离子体波的粒子捕获效应而造成的超热电子发射，会削弱等离子体波并因此减小其对等离子体密度轮廓的影响. 然而，超热电子自身的反向动量可以在一定程度上弥补这一点，因为超热电子的外向发射而使等离子体承受的压力被认为是导致密度轮廓修正的又一因素[10].

参　考　文　献

[1] Ginzburg, V. L., *Propagation of Electromagnetic Wave in Plasmas*, Pergamon, New York, **1964**.
[2] Kruer, W. L. and Estabrook, K., *Phys. Fluids*, **20**(1977), 10: 1688.
[3] Estabrook, K. and Kruer W. L., *Phys. Fluids*, **26** (1983), 7: 1892.
[4] Lee, K. et al., *ibid.*, **20**(1977), 1: 51.

[5] Kruer, W. L. and Estabrook, K., *ibid.*, **26** (1983), 7:1888.
[6] Xu Zhi-zhan (徐至展), Yu Wei (余玮), Zhang Wen-qi (张文琦), *Phys. Rev. A*, **32**(1985), 1: 659.
[7] Kruer, W. L., *Phys. Fluids*, **25**(1982), 12: 2324.
[8] Takabe, H., Mulser, P., *ibid.*, **25**(1982), 12: 2304.
[9] Jones, R. D. et al., *ibid.*, **24**(1981), 2: 310.
[10] Fedosejevs, R. et al., *ibid.*, **24**(1981), 3: 537.