中 国 科 学
1985 年 4 月　　A 辑　　第 4 期

二次微分轨道射线的边界性质

李　忠
（北 京 大 学 数 学 系）

摘　要

本文对于相当广泛的一类全纯二次微分建立了轨道射线的收敛性定理及长度不等式，并讨论了轨道射线的其它边界性质.

一、引　言

设 R 是一个 Riemann 曲面. R 上的一个在参数变换下不变的表达式 $\varphi(z)dz^2$，被称为一个二次微分. 每一个不恒为零的全纯（$\varphi(z)$是全纯函数）二次微分都诱导了一个度量

$$ds = |\varphi(z)|^{\frac{1}{2}}|dz|. \tag{1}$$

这个度量有某些极值性质，它们在 Teichmüller 空间理论及拟共形映射的极值问题中起着重要作用（见文献[1—3]）.

1975 年 Strebel[4] 讨论了单位圆盘上范数有穷，即满足条件

$$\iint_{|z|<1} |\varphi(z)|dxdy < \infty \tag{2}$$

的全纯二次微分 φdz^2 的几何性质. 他证明了在度量 (1) 式下每条极大的测地线都收敛于边界. 此外，他还对这样的二次微分建立了长度不等式及发散原理.

本文的目的是要从根本上放弃范数有穷这个条件，从而把 Strebel 的结果推广到更广泛的二次微分上. 首先给出了轨道射线的收敛性定理. 并讨论了长度不等式及轨道射线的其它边界性质. 最后我们给出一个例子，说明有这样的全纯二次微分，它的每一条非临界轨道射都发散.

本文的主要结果将在讨论拟共形映射的极值问题中得到应用. 作者将另有文章发表.

二、轨道射线的收敛性

设 φdz^2 是单位圆盘 $\Delta = \{z||z|<1\}$ 上一个全纯二次微分. 根据定义，使得 $\arg\varphi(z)dz^2 = const$ 的弧称为 φ 直线弧. 特别地，使得 $\varphi(z)dz^2 > 0$ (<0) 的弧称为水平（垂直）弧. 极大的水平弧称为水平轨道，或简称轨道. 一般说来，在度量 (1) 式下测地线是由若干条 φ 直线弧组成，它们在 φ 的零点相接连，而交角至少是 $2\pi/(n+2)$，其中 n 是 φ 的零点的阶.

设 α 是 φdz^2 的一条轨道. 我们用 α^+ 表示 α 的一条轨道射线，即自某点 $z_0 \in \alpha$ 开始沿某个方向前进的半轨道. 轨道射线 α^+ 有一个弧长参数的表示式：$z = \alpha^+(s)$，其中 s 表示点

本文 1984 年 8 月 27 日收到.

z_0 到点 $z\in\alpha^+$ 轨道弧的 φ 长度. 假定 s 的变化范围是 $[0, l)$, $l\leqslant\infty$.

设 A^+ 是 α^+ 的极限集,也即全体有下述性质的点 ζ: 存在 $s_n\in[0, l)$, $s_n\to l(n\to\infty)$, 使得

$$\zeta=\lim_{n\to\infty}\alpha^+(s_n).$$

若 α^+ 是非临界轨道射线,则 α^+ 一定是边界轨道射线,也即 $A^+\subset\partial\Delta$. 这时, 对于任意的 r: $0<r<1$, 存在一个 $s_0>0$, 使得

$$\alpha^+(s)\in\{z|r<|z|<1\},\ \forall s\in[s_0, l). \tag{3}$$

定理 1. 设 φ 是单位圆 Δ 内不恒为零的全纯函数. 若在单位圆周 $\partial\Delta$ 上有一个稠密子集 E, 使得

$$\int_0^1|\varphi(re^{i\theta})|^{\frac{1}{2}}dr<\infty,\ \forall e^{i\theta}\in E, \tag{4}$$

则二次微分 $\varphi(z)dz^2$ 的每一条非临界轨道射线 α^+ 都收敛于边界,也即 α^+ 的极限集由 $\partial\Delta$ 上的一个点组成.

注. 将这个定理中的非临界轨道射线换成极大测地射线,定理结论照旧成立. 其证明本质与下面的证明相同.

证. 设 α^+ 是任意一条非临界轨道射线, A^+ 是 α^+ 的极限集. 根据前面的说明, $A^+\subset\partial\Delta$.

现在用反证法. 假定 α^+ 不收敛,也即假定 A^+ 中不只包括一个点. 下面分两种情况讨论: i) $A^+\neq\partial\Delta$; ii) $A^+=\partial\Delta$.

我们先讨论第一种情况: $A^+\neq\partial\Delta$. 假定 Γ 是包含 A^+ 的最小闭圆弧,其端点为 $e^{i\theta_1}$ 与 $e^{i\theta_2}$, $0\leqslant\theta_1<\theta_2<2\pi$. 显然, Γ 的这两个端点也属于 A^+. 于是存在两个序列 $\{s_n'\}$ 与 $\{s_n''\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}s_n'=\lim_{n\to\infty}s_n''=l,$$
$$\lim_{n\to\infty}\alpha^+(s_n')=e^{i\theta_1},$$
$$\lim_{n\to\infty}\alpha^+(s_n'')=e^{i\theta_2}.$$

令 τ_n 是 α^+ 上相应于点 $\alpha^+(s_n')$ 与 $\alpha^+(s_n'')$ 之间弧. 根据 (3) 式可知,当 $n\to\infty$ 时, τ_n 上的点一致地趋向于 $\partial\Delta$. 对于 Γ 中任意一个内点 $e^{i\theta}$, $\theta_1<\theta<\theta_2$ 或 $\theta_2<\theta<\theta_1+2\pi$, 矢径 $\arg z=\theta$ 必定与 τ_n 相交,只要 n 充分大. 因此, $e^{i\theta}$ 是这些交点的极限点,也即 $e^{i\theta}\in A^+$. 由此可见, $\Gamma=A^+$. 也就是说, A^+ 是一条闭的圆弧.

根据集合 E 在 $\partial\Delta$ 上的稠密性及条件(4),我们可以选取 t_1 与 t_2, 使得 $e^{it_1}\in A^+$, $e^{it_2}\in A^+$, 且

$$m_1=\int_0^1|\varphi(re^{it_1})|^{\frac{1}{2}}dr<\infty, \tag{5}$$

$$m_2=\int_0^1|\varphi(re^{it_2})|^{\frac{1}{2}}dr<\infty, \tag{6}$$

这里 $t_1\neq t_2$. 不失一般性,我们假定 $\theta_1<t_1<t_2<\theta_2$.

我们考虑矢径 γ_j: $\arg z=t_j$, $j=1, 2$, 以及它们所围的扇形 $D=\{z||z|<1,\ t_1<\arg z<t_2\}$. 显然, α^+ 将与矢径 γ_1 和 γ_2 相交无穷多次. 取 z_n' 与 z_n'' 分别是 α^+ 跟矢径 γ_1 与

γ_2 的交点，$n=1,2,\cdots$，且使得界于点 z_n' 与 z_n'' 之间的轨道弧 $\beta_n\subset D$，而当 $n\to\infty$ 时，$z_n'\to e^{it_1}$，$z_n''\to e^{it_2}$．记 δ_n 是界于 z_n' 与 z_{n+1}' 之间的轨道弧．那么，δ_n 是 z_n' 与 z_{n+1}' 之间的最短连线(对于 φ 度量而言)．特别地，我们有

$$\int_{\delta_n}|\varphi(z)|^{\frac{1}{2}}|dz|\leqslant\left|\int_{r_n}^{r_{n+1}}|\varphi(re^{it_1})|^{\frac{1}{2}}dr\right|,$$

其中 $r_n=|z_n'|$，$r_{n+1}=|z_{n+1}'|$．由于积分(5)收敛，且 $r_n\to 1(n\to\infty)$，所以我们又有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta_n}|\varphi(z)|^{\frac{1}{2}}|dz|=0.$$

注意到 β_n 是 δ_n 或 δ_{n-1} 的子弧，立即推出

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\beta_n}|\varphi(z)|^{\frac{1}{2}}|dz|=0. \tag{7}$$

由(5)—(7)式不难看出：当 n 充分大时，

$$\int_{\partial D_n}|\varphi(z)|^{\frac{1}{2}}|dz|<m_1+m_2+1, \tag{8}$$

这里 D_n 是由 γ_1，γ_2 和 β_n 所围的区域．

(8) 式表明 φ 在 D 内属于空间 $E^{\frac{1}{2}}$ (其定义见文献 [5])．根据空间 $E^{\frac{1}{2}}$ 的性质，对于几乎所有的 $\theta\in(t_1,t_2)$ 有矢径极限

$$\varphi(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1}\varphi(re^{i\theta}).$$

显然，$\varphi(e^{i\theta})$ 不可能在 (t_1,t_2) 上几乎处处为零．因为否则即推出 $\varphi(z)$ 在 D 内恒为零，与定理假设矛盾．这样，存在一个正数 η 及一个可测集合 $\sigma\subset(t_1,t_2)$，$\mathrm{mes}(\sigma)>0$，使得

$$|\varphi(e^{i\theta})|^{\frac{1}{2}}>\eta,\ \forall\theta\in\sigma. \tag{9}$$

现在我们任意取一个单调序列 $\{r_n\}$，$0<r_n<1$，$n=1,2,\cdots$，且当 $n\to\infty$ 时，$r_n\to 1$．考虑集合

$$B_n=\bar{D}\cap\{z\,|\,r_n\leqslant|z|\leqslant r_{n+1}\},$$

并用矢径 $\arg z=\theta_j^{(n)}(j=0,1,\cdots,k_n)$，把 B_n 分成 k_n 个闭区域 $R_j^{(n)}=\{z\,|\,r_n\leqslant|z|\leqslant r_{n+1},\ \theta_j^{(n)}\leqslant\arg z\leqslant\theta_{j+1}^{(n)}\}$，$j=0,1,\cdots,k_n-1$，其中 $\theta_0^{(n)}=t_1$，$\theta_{k_n}^{(n)}=t_2$．

显然，通过加细分割的办法，可以使得函数值 $|\varphi(z)|^{\frac{1}{2}}$ 在每一个 $R_j^{(n)}$ 上的振幅充分小．因此，我们不妨假定上述的 r_n 及 $\theta_j^{(n)}$ 的选取，使得

$$\left||\varphi(z)|^{\frac{1}{2}}-|\varphi(\zeta)|^{\frac{1}{2}}\right|<\frac{1}{4}\eta,\ \forall z,\zeta\in R_j^{(n)}, \tag{10}$$

$$n=1,2,\cdots;\ j=0,1,\cdots,k_n-1.$$

注意到序列 $\varphi(r_ne^{i\theta})$ 在 (t_1,t_2) 内几乎处处收敛于 $\varphi(e^{i\theta})$，特别地，$\varphi(r_ne^{i\theta})$ 在 σ 上几乎处处收敛于 $\varphi(e^{i\theta})$，根据 Egoroff 定理我们知道，存在一个集合 $\sigma_1\subset\sigma$，使得 $\mathrm{mes}(\sigma_1)>\mathrm{mes}(\sigma)/2$，且 $\varphi(r_ne^{i\theta})$ 在 σ_1 上一致收敛于 $\varphi(e^{i\theta})$．由(9)式可知，当 n 充分大时，

$$|\varphi(r_ne^{i\theta})|^{\frac{1}{2}}>\frac{1}{2}\eta,\ \forall\theta\in\sigma_1. \tag{11}$$

现在我们考虑积分

$$\int_{\beta_m}|\varphi(z)|^{\frac{1}{2}}|dz|.$$

我们将轨道弧 β_m 分解为若干子弧：$\beta_m = \bigcup_l \delta_l^{(m)}$，使得每个子弧 $\delta_l^{(m)}$ 包含于某个 $R_j^{(n)}$ 之中．当 m 充分大时，β_m 上的点一致地接近于边界．所以当 m 充分大时，相应的 n (即 $\beta_m \cap R_j^{(n)} \neq \phi$) 也足够大．因此，下面我们不必区分极限过程 $m \to \infty$ 与 $n \to \infty$．

我们考虑这样的子弧 $\delta_l^{(m)}$：在 $\delta_l^{(m)}$ 上有一点 $\tilde{z} = \rho e^{i\theta}$，使得 $\tilde{\theta} \in \sigma_1$，并把具有这种性质的子弧 $\delta_l^{(m)}$ 记为 $\tilde{\delta}_l^{(m)}$，以示区别．设 $\omega_l^{(m)}$ 是 $\tilde{\delta}_l^{(m)}$ 上的一点 z 自 $\tilde{\delta}_l^{(m)}$ 的一端连续变动到另一端时辐角的振幅．那么

$$\int_{\tilde{\delta}_l^{(m)}} |dz| > r_n \omega_l^{(m)}, \quad \tilde{\delta}_l^{(m)} \subset R_j^{(n)}. \tag{12}$$

在公式(10)中取 $\zeta = r_n e^{i\theta}$，则我们有

$$|\varphi(z)|^{\frac{1}{2}} > |\varphi(r_n e^{i\theta})|^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\eta, \quad \forall z \in \tilde{\delta}_l^{(m)} \subset R_j^{(n)}.$$

注意到 $\tilde{\theta} \in \sigma_1$ 及公式(11)，我们又有

$$|\varphi(z)|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{4}\eta, \quad \forall z \in \tilde{\delta}_l^{(n)}, \tag{13}$$

只要 m 充分大．

由(12)与(13)式我们立即得出，当 m 充分大时，

$$\int_{\tilde{\delta}_l^{(m)}} |\varphi(z)|^{\frac{1}{2}} |dz| > \frac{1}{4}\eta r_n \omega_l^{(m)}, \tag{14}$$

其中 $\tilde{\delta}_l^{(m)} \subset R_j^{(n)}$．正象前面指出的，当 m 充分大时，相应的 n 也足够大．因此，当 m 充分大时上述的 $r_n > 1/2$．换句话说，(14)式可改写成

$$\int_{\tilde{\delta}_l^{(m)}} |\varphi(z)|^{\frac{1}{2}} |dz| > \frac{1}{8}\eta \omega_l^{(m)}, \tag{15}$$

只要 m 充分大．

假定 β_m 上全部具有上述性质的子弧是 $\tilde{\delta}_{l_1}^{(m)}, \cdots, \tilde{\delta}_{l_q}^{(m)}$．这时，对于充分大的 m 有

$$\int_{\beta_m} |\varphi(z)|^{\frac{1}{2}} |dz| \geqslant \sum_{j=1}^{q} \int_{\tilde{\delta}_{l_j}^{(m)}} |\varphi(z)|^{\frac{1}{2}} |dz| \geqslant \frac{1}{8}\eta \sum_{j=1}^{q} \omega_{l_j}^{(m)}.$$

因为对任意一点 $\tilde{\theta} \in \sigma_1$，矢径 $\arg z = \tilde{\theta}$ 至少与 β_m 有一个交点，所以不难看出

$$\sum_{t=1}^{q} \omega_{l_t}^{(m)} \geqslant \operatorname{mes}(\sigma_1).$$

于是我们有

$$\int_{\beta_m} |\varphi(z)|^{\frac{1}{2}} |dz| \geqslant \frac{1}{8}\eta \operatorname{mes}(\sigma_1).$$

此式与(7)式矛盾．这一矛盾证明了在 $A^+ \neq \partial\Delta$ 的情况下，α^+ 不可能发散．

余下的事是要讨论 $A^+ = \partial\Delta$ 的情况．这是一种不可能发生的情况．因为我们在 E 中可以选取两点 e^{it_1} 与 e^{it_2}，使它们所对应的矢径 γ_1 与 γ_2 与 α^+ 有无穷多个交点．利用 γ_1 与 γ_2 的 φ 长度的有穷性和轨道弧的最短性，完全重复上面的步骤即导致矛盾．定理证毕．

满足条件(4)的函数类是相当广泛的．首先我们指出，若 φ 的 L^1 范数有穷，则 φ 满足条件(4)式．事实上，取任意一个 $\rho: 0 < \rho < 1$，并考虑

$$L_\rho(\theta)=\int_\rho^1|\varphi(re^{i\theta})|^{\frac{1}{2}}dr.$$

那么

$$\int_0^{2\pi}L_\rho(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\rho^1|\varphi(re^{i\theta})|^{\frac{1}{2}}dr$$
$$\leqslant\frac{1}{\rho}\iint\limits_{\rho<|z|<1}|\varphi(z)|^{\frac{1}{2}}dxdy. \tag{16}$$

再由 Schwarz 不等式，我们有

$$\left(\int_0^{2\pi}L_\rho(\theta)d\theta\right)^2\leqslant\pi\frac{1-\rho^2}{\rho^2}\iint\limits_{\rho<|z|<1}|\varphi(z)|dxdy<\infty.$$

由此可见，对于几乎所有的 $\theta\in[0,\ 2\pi]$，$L_\rho(\theta)<\infty$. 因此，

$$\int_0^1|\varphi(re^{i\theta})|^{\frac{1}{2}}dr<\infty,\ \text{a. a. }\theta\in[0,\ 2\pi].$$

这就是说对于范数有穷的函数而言，集合 E 可以取成一个几乎布满单位圆周的集合.

从上述讨论中我们还可以看出，不必要求 L^1 范数有穷，而只要求 $L^{\frac{1}{2}}$ 范数有穷就足够了(见(16)式). 我们有下述的推论

推论 1. 若 $\varphi(z)$ 在 $\Delta=\{z\,||z|<1\}$ 内全纯，且

$$\iint\limits_{|z|<1}|\varphi(z)|^{\frac{1}{2}}dxdy<\infty,$$

则二次微分 φdz^2 的每一条非临界轨道射线都收敛.

其次，我们指出任何一个 $H^p(\Delta)$ 类函数 φ 都对几乎所有的边界点有矢径极限，因而

$$\int_0^1|\varphi(re^{i\theta})|^{\frac{1}{2}}dr<\infty,\ \text{a. a. }\theta\in[0,\ 2\pi].$$

更一般地说，若 φ 可以表为 f/g 的形式，其中 $f\in H^p(\Delta)$，$g\in H^q(\Delta)$，$0<p\leqslant\infty$，$0<q\leqslant\infty$，则 f，g 对几乎所有的矢径有矢径极限. 注意到 g 的矢径极限 $g(e^{i\theta})$ 不可能在任何一段圆弧上几乎处处为零，不难看出在任意给定的一段圆弧上至少存在一点 $e^{i\theta}$，使得 $\varphi(z)$ 在该点有矢径极限. 换句话说，单位圆周上有矢径极限的点集合是稠密的. 这样我们又有下列推论.

推论 2. 若 φ 是 Δ 内的全纯函数，且可以表示成 $\varphi=f/g$，其中 $f\in H^p(\Delta)$，$0<p\leqslant\infty$，$g\in H^q(\Delta)$，$0<q\leqslant\infty$，则二次微分 φdz^2 的每一条非临界轨道射线都收敛.

当然，我们还可以列举出许多其它满足条件(4)式的函数类. 但是，从上面的两个推论中，我们足以看到这种函数类的广泛性.

三、长度不等式

Strebel 在文献[4]中对于 L^1 范数有穷的二次微分证明了下述的命题：任何一条非临界轨道都是它在边界上的两个端点的最短连线. 他把这一命题称为长度不等式. 这一命题在拟共形映射的极值问题的研究中是十分基本的. 熟知的 Reich-Strebel 主要不等式(见文献[3]) 正是以此为基础.

在这一节中，我们要把上述的长度不等式推广到更广泛的函数类上. 在着手这种推广之前，首先要弄清是否每条非临界轨道都在边界上有两个不同的端点. 设 α^+ 与 α^- 是轨道 α 的

方向相反的两条射线. 所谓轨道 α 在边界上有两个不同端点是指 α^+ 与 α^- 分别收敛于不同的边界点. 我们的问题是，在怎样的条件下每一条非临界轨道 α 的两条射线 α^+ 与 α^- 一定收敛于不同的边界点. 下面我们将看到，这种条件恰好也是长度不等式成立的条件.

定理 2. 设 φ 是单位圆 Δ 内的全纯函数. 若单位圆周 $\partial\Delta$ 上存在一个稠密子集 E 使得积分

$$\int_0^1 |\varphi(re^{i\theta})|^{\frac{1}{2}}dr, \quad \forall e^{i\theta}\in E,$$

在集合 E 上一致收敛，则二次微分 φdz^2 的每一条非临界轨道 α 都有两个不同的边界端点.

证. 用反证法. 设有一条非临界轨道 α，它的两条射线 α^+ 与 α^- 收敛于同一边界点 $\zeta\in\partial\Delta$.

设 ε 是任意给定的正数. 根据定理假定，存在一个正数 $r_0<1$，使得

$$\int_r^1 |\varphi(\rho e^{i\theta})|^{\frac{1}{2}}d\rho<\varepsilon,$$

$$\forall r\in(r_0,1),\ \forall e^{i\theta}\in E. \tag{17}$$

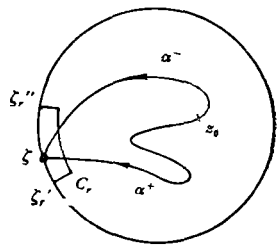


图 1

对于任意取定的 $r\in(r_0,1)$，我们可以在点 ζ 的两侧各取 E 中一点 $\zeta_r'=e^{i\theta_r'}$ 与 $\zeta_r''=e^{i\theta_r''}$，它们选取得充分接近，以使得

$$\left|\int_{\theta_r'}^{\theta_r''}|\varphi(re^{i\theta})|^{\frac{1}{2}}rd\theta\right|<\varepsilon. \tag{18}$$

我们之所以能作到这一点是基于 E 的稠密性.

现在我们用 C_r 表示连结 ζ_r' 与 ζ_r'' 点的弧，它由这两个点所对应的矢径弧及圆周 $|z|=r$ 上的弧所组成. (17)与(18)式告诉我们，C_r 的 φ 长度

$$l_\varphi(C_r)<3\varepsilon,\ \forall r\in(r_0,1). \tag{19}$$

设 C_r 与 α^+ 和 α^- 相交于 z_r^+ 与 z_r^-. 记 α 上界于 z_r^+ 与 z_r^- 的弧为 α_r. 记 C_r 上界于 z_r^+ 与 z_r^- 点的弧为 β_r. 那么 α_r 的 φ 长度将不超过 β_r 的 φ 长度，即 $l_\varphi(\alpha_r)\leqslant l_\varphi(\beta_r)$. 注意到 $\beta_r\subset C_r$ 及(19)式我们立即有

$$l_\varphi(\alpha_r)<3\varepsilon,\ \forall r\in(r_0,1). \tag{20}$$

令 $r\to1$，这时 $\zeta_r'\to\zeta$，$\zeta_r''\to\zeta$. 于是由(20)式有

$$l_\varphi(\alpha)<3\varepsilon.$$

ε 的任意性蕴含着 $l_\varphi(\alpha)=0$. 此为不可能. 这一矛盾证明了定理.

定理 3. 在定理 2 的条件下，二次微分 φdz^2 的每一条非临界轨道都是它的两个端点之间的最短连线.

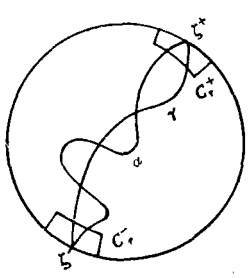


图 2

证. 设 α 是任意一条非临界轨道. 根据定理 2，它有两个不同的端点 ζ^+ 与 ζ^-. 又设 γ 是 Δ 内任意一条连结 ζ^+ 与 ζ^- 的可求长弧. 象在定理 2 的证明一样，我们分别在 ζ^+ 与 ζ^- 的附近作 C_r^+ 与 C_r^-，使得 $l_\varphi(C_r^+)$ 与 $l_\varphi(C_r^-)$ 小于给定的正数 ε，只要 $r\in(r_0,1)$，r_0 是某个小于 1 的正数.

我们记 α 与 C_r^+ 和 C_r^- 的交点分别为 z_r^+ 与 z_r^-，界于这两点之间轨道弧记为 α_r. 我们又将 γ 与 C_r^+ 和 C_r^- 的交点分别记为

w_r^+ 与 w_r^-，界于这两点之间的 γ 子弧记为 γ_r。再将以 z_r^+ 与 w_r^+ 为端点的 C_r^+ 的子弧记为 δ_r^+，而以 z_r^- 与 w_r^- 为端点的 C_r^- 的子弧记为 δ_r^-。这时由于 α_r 是 z_r^+ 与 z_r^- 之间的最短连线，所以

$$\begin{aligned} l_\varphi(\alpha_r) &\leqslant l_\varphi(\gamma_r) + l_\varphi(\delta_r^+) + l_\varphi(\delta_r^-) \\ &\leqslant l_\varphi(\gamma_r) + l_\varphi(C_r^+) + l_\varphi(C_r^-) \\ &< l_\varphi(\gamma_r) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

只要 $r \in (r_0, 1)$。令 $r \to 1$，即得

$$l_\varphi(\alpha) \leqslant l_\varphi(\gamma) + 2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性即证明了定理.

现在我们把这两个定理更一般化. 设 φ 是 Δ 内的全纯函数，ζ 是 $\partial\Delta$ 上的任意一点. 若对于 ζ 的任意一个邻域 $U_\rho = \{z \mid |z-\zeta| < \rho\}$，都存在一条弧 τ_ρ，使得 $\tau_\rho \subset U_\rho \cap \Delta$，$\tau_\rho$ 的两个端点都在 $\partial\Delta$ 上，分别在 ζ 的两侧，并且

$$\lim_{\rho \to 0} l_\varphi(\tau_\rho) = 0,$$

则称点 ζ 是关于 φ 的正则边界点.

很容易看出，只要我们用 τ_ρ 代替定理 2 的证明中的 C_r，即可以重复定理 2 的证明，而证得下列命题：任何一个二次微分 φdz^2 的非临界轨道 α，其两条射线 α^+ 与 α^- 不可能同时收敛于一个正则边界点. 同样，类似于定理 3 的证明，我们可以证得，如果非临界轨道有两个不同的端点，并且这两个端点都是正则边界点，那么这条轨道必定是其端点间的最短连线. 因此，如果每个边界点都是正则的，那么定理 2 与定理 3 的结论成立.

定理 4. 设 φ 是单位圆 Δ 内的全纯函数，并且单位圆周上每一点都是 φ 的正则点. 则二次微分 φdz^2 的每条非临界轨道都有两个不同的端点，并且该轨道本身是其端点间的最短连线.

应该指出，在定理 2 与定理 3 的证明中事实上都用到轨道射线的收敛性，而这一点是由定理 1 所保证. 在现在定理 4 的条件下，我们无法直接应用定理 1，但是每条非临界轨道射线依然是收敛的. 这一点的证明本质上与定理 1 相同. 事实上，若轨道射线 α^+ 发散，则可以在它的极限集 A^+ 中任选一点 ζ. 利用 ζ 的正则性，我们可以找到一条弧 τ_ρ，使得 τ_ρ 的两个端点也在 A^+ 中. 不失一般性可以假定 τ_ρ 是 Jordan 弧. 很显然，α^+ 与 τ_ρ 相交无穷多次. 用 τ_ρ 代替定理 1 的证明中的两条矢径 γ_1 与 γ_2，用 τ_ρ 与 $\partial\Delta$ 所围的区域代替定理 1 证明中的扇形 D，重复以前的基本步骤即导出矛盾，从而证明了我们所要的结论.

现在我们说明在 L^1 空间中范数有穷的函数使得边界点都是正则的.

设 φ 在 Δ 内全纯，且 $\varphi \in L^1(\Delta)$. 在 $\partial\Delta$ 上任取一点 ζ. 记 Γ_ρ 是圆周 $|z-\zeta| = \rho$ 在 Δ 内的弧. 那么 Γ_ρ 的 φ 长度

$$l_\varphi(\Gamma_\rho) = \int_{\Gamma_\rho} |\varphi(z)|^{\frac{1}{2}} |dz| = \int_{\Gamma_\rho} |\varphi(\zeta + \rho e^{i\theta})|^{\frac{1}{2}} \rho d\theta.$$

应用 Schwarz 不等式，我们有

$$l_\varphi^2(\Gamma_\rho) \leqslant \pi \int_{\Gamma_\rho} |\varphi(\zeta + \rho e^{i\theta})| \rho^2 d\theta,$$

$$\int_0^{\rho_0} \frac{l_\varphi^2(\Gamma_\rho)}{\rho} d\rho \leqslant \pi \iint_{\Delta \cap \{|z-\zeta| < \rho_0\}} |\varphi(z)| dxdy < \infty.$$

这表明存在一个序列 $\{\rho_n\}$，$\rho_n \to 0 (n \to \infty)$，且使得 $l_\varphi(\Gamma_{\rho_n}) \to 0 (n \to \infty)$. 由此可见，$\zeta$ 点是正则的.

使得边界点处处正则的函数，还可以举出比 L^1 更广泛一点的例子. 若 Δ 内的全纯函数 φ 可以表成 $\varphi(z) = f(z) \cdot g(z)$，其中 $f \in L^1(\Delta)$，而 g 满足不等式

$$|g(z)| \leqslant M \prod_{j=1}^{m} (1 + c_j |\log^{p_j} |z - \zeta_j||),$$

其中 M，c_j，$p_j (\leqslant \frac{1}{2})$ 均为正常数，$\zeta_j \in \partial\Delta$，$j = 1, \cdots, m$，则 $\partial\Delta$ 上的每一点都是 φ 的正则点.

证明完全类似于上面，在此略去.

四、一个反例

在第二节中我们对于相当广泛的函数类证明了每条非临界轨道射线的收敛性. 似乎有理由猜想每个全纯二次微分至少有一条非临界收敛. 但是下面的反例表明这个猜想不成立.

这里我们将借助于文献[6]的一个函数. 为了下面讨论的需要，现将这个函数的定义重述如下：设 $\{r_n\}$ 是一个单调序列，$n = 0, 1, \cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 1$.

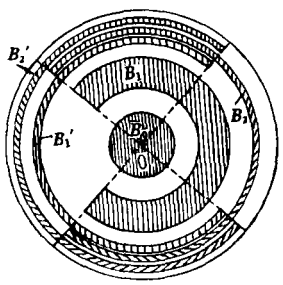


图 3

我们定义一个区域序列：

$$B_0 = \{z \mid |z| < r_0\},\ B_1 = \{z \mid r_1 < |z| < r_2,\ |\arg z| < 3\pi/4\},$$

$$B_1' = \{z \mid r_3 < |z| < r_4,\ |\arg z| > \pi/4\}, \cdots$$

$$B_n = \{z \mid r_{4n-3} < |z| < r_{4n-2}\},\ |\arg z| < 3\pi/4\},$$

$$B_n' = \{z \mid r_{4n-1} < |z| < r_{4n},\ |\arg z| > \pi/4\}, \cdots.$$

定义一个多项式序列 $\{p_n(z)\}$，$n = 0, 1, \cdots$，满足下列条件：

$$p_0(z) \equiv 0;$$

$$|p_{2n-1}(z) - p_{2n-2}(z)| < \frac{1}{2^{2n-1}},\ \text{当}\ |z| < r_{8n-8};$$

$$|p_{2n-1}(z) - 1| < \frac{1}{2^{2n}},\ \text{当}\ z \in B_{2n-1} \cup B_{2n-1}';$$

$$|p_{2n}(z) - p_{2n-1}(z)| < \frac{1}{2^{2n}},\ \text{当}\ |z| < r_{8n-4};$$

$$|p_{2n}(z) - 0| < \frac{1}{2^{2n}},\quad z \in B_{2n} \cup B_{2n}'.$$

显然，这样的序列在单位圆中内闭一致收敛. 设其极限函数为 $F(z)$.

我们令 $\varphi = -[F'(z)]^3$，并考虑二次微分 φdz^2. 这个二次微分的任何一条非临界轨道射线都不收敛.

我们用反证法. 假定轨道射线 α^+ 收敛于边界一点 $\zeta \in \partial\Delta$，则 α^+ 必定穿越无穷多个区域 $(B_{2n} \cup B_{2n}')$ 与 $(B_{2n-1} \cup B_{2n-1}')$. 设被 α^+ 穿越的有

$$(B_{2m_k}\cup B'_{2m_k}),\ m_1<m_2<\cdots<m_k<\cdots,$$
$$(B_{2n_k-1}\cup B'_{2n_k-1}),\ n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots.$$

那么当 $z\in(B_{2m_k}\cup B'_{2m_k})$ 时，

$$\begin{aligned}|F(z)-0|&\leqslant|F(z)-p_{2m_k}(z)|+|p_{2m_k}(z)|\\&\leqslant\sum_{j=2m_k}^{\infty}|p_{j+1}(z)-p_j(z)|+|p_{2m_k}(z)|\\&\leqslant\sum_{j=2m_k}^{\infty}\frac{1}{2^{j+1}}+\frac{1}{2^{2m_k}}=\frac{1}{2^{2m_k-1}}.\end{aligned}$$

同理，当 $z\in(B_{2n_k-1}\cup B'_{2n_k-1})$ 时，

$$|F(z)-1|\leqslant\frac{1}{2^{2n_k-1}}.$$

这就是说，当 z 沿着 ω^+ 前进时，$F(z)$ 既可以任意接近于 0，又可以任意接近于 1.

然而，α^+ 是轨道射线. 所以沿着 α^+ 有 $\varphi dz^2>0$，也即 $-(F'dz)^2>0$ 或写成 $[diF]^2>0$. 这意味着当 $z\in\alpha^+$ 时，$iF(z)$ 取值总在一条水平直线上，也即 $\mathrm{Im}[iF(z)]=\mathrm{const.}$，或写成 $\mathrm{Re}\,F(z)=\mathrm{const.}$ 这与 $F(z)$ 在 α^+ 上可以任意接近于 0 与 1 矛盾. 由此推出 α^+不可能收敛.

最后，我们指出对于这个二次微分而言，每个边界点都不是正则的.

参　考　文　献

[1] Teichmüller, O., Extremale Quasikonforme Abbildungen und Quadratische Differentiale, *Preuss Akad.*, **22**(1939), 3—197.

[2] ————, Bestimmung der Extremalen Quasikonforme Abbildungen bei Geschlassenen Orientatierten Riemannschen Flächen, *Preuss Akad.*, **4**(1943), 3—42.

[3] Reich, E. and Strebel, K., *Extremal Quasiconformal Mappngs with Give Boundary Values, in Contributions to Analysis,* Academic Press, 1974, 375—391.

[4] Strebel, K., On the Geometry of the Metric induced by a Quadratic Differential, I and II, *Bulletin de la Societe des Sciences et des Lettres de lódż,* **25**(11975), 2: 1—4 and **25**(1975), 3: 1—5.

[5] Duren, Peter L., *Theory of H^p Spaces,* Academic Press, New York, 1970.

[6] Маркушевич, А. И., *Теория аналичшических функций*, Москва, 1956.