中 国 科 学 (A 辑)
第23卷 第 11 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1993 年 11 月

各向异性双材料界面裂纹的分叉*

王 自 强
(LNM,中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘 要

本文对各向异性弹性双材料界面裂纹的分叉问题进行了系统的分析. 建立了位错密度分布函数的奇性积分方程. 提出了分枝裂纹应力强度因子及能量释放率的显式表达. 这些表达式中含有与界面平行的应力分量 σ_0 的贡献.

文中还着重阐明了水平应力分量 σ_0 对分枝裂纹能量释放率的重要影响. 这种影响可以明显改变裂纹扩展方向.

关键词 各向异性、界面裂纹、分叉、水平应力、能量释放率

各向异性材料界面裂纹问题作为界面断裂力学的一个重要组成部分, 引起了很多学者的兴趣[1-11], 特别应该提到的是文献[12]的工作,出色表征了各向异性弹性材料间界面裂纹顶端奇性场的数学结构.

He 和 Hutchinson[13] 以及 He 等人[14]首先解决了各向同性弹性双材料间界面裂纹的分叉问题. Miller 和 Stock[15], Wang 等人[16]对各向异性弹性双材料间的界面裂纹分叉问题进行了研究. 本文是 Wang 等人[16]工作的继续,进一步阐明平面内与界面平行的应力分量对裂纹分叉的影响. 建立了分枝裂纹顶端应力强度因子及能量释放率显式表示.

1 基 本 公 式

位移、应力分量及作用在弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 上的合力[12,16]:

$$\begin{cases} u_i = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} A_{ij}\phi_j(z_j), \\ f_i = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} L_{ij}\phi_j(z_j)\Big|_A^B, \\ \sigma_{2i} = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} L_{ij}\phi_j'(z_j). \end{cases} \tag{1.1}$$

位错与界面裂纹的交互作用已由文献[12]给出(设想如图 1 所示), 一个垂直于 x,y 平面

1992-08-24 收稿, 1993-03-09 收修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目.

的位错线位于材料2的 (x_0,y_0) 点上. 有

$$\boldsymbol{\phi}(z)=\boldsymbol{\phi}_0(z)+\boldsymbol{c}^{(2)}\bar{\boldsymbol{\phi}}_0(z)+\boldsymbol{L}_2^{-1}\bar{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}(z),\quad z\in\Omega^-, \tag{1.2}$$

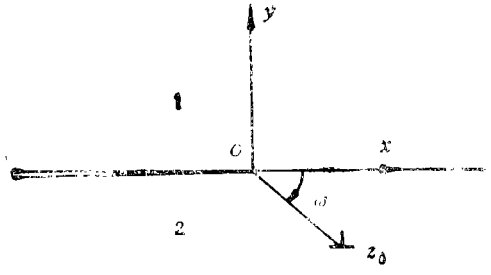

图1 裂纹与位错交互作用

式中 $\boldsymbol{C}^{(2)}=\boldsymbol{L}_2^{-1}\bar{\boldsymbol{H}}^{-1}(\boldsymbol{B}_2-\bar{\boldsymbol{B}}_1)\bar{\boldsymbol{L}}_2$,

$\boldsymbol{\phi}_0(z)=[\phi_{01}(z),\phi_{02}(z),\phi_{03}(z)]^{\mathrm{T}}$

$\phi_{0j}(z)=d_jLn(z-S_j)$, $S_j=x_0+\mu_jy_0$,

$\boldsymbol{d}=[d_1,d_2,d_3]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{L}_2^{-1}(\boldsymbol{B}_2+\bar{\boldsymbol{B}}_2)^{-1}\boldsymbol{b}/2\pi$,

$\boldsymbol{b}$ 是 Burger 矢量、Ω^- 表示下半平面.

$\boldsymbol{h}(z)=h_1(z)\boldsymbol{W}+h_2(z)\bar{\boldsymbol{W}}+h_3(z)\boldsymbol{W}_3$,

矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{L},\boldsymbol{H}$ 及向量 $\boldsymbol{W},\bar{\boldsymbol{W}},\boldsymbol{W}_3$ 的定义见文献[12, 16]。 $\boldsymbol{L}_2$ 表示材料2的 $\boldsymbol{L}$ 矩阵, 其余类推。

对于图1所示的半无限长裂纹, Wang 等人[16]得到

$$h_i(z)=-\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{b}/2\pi,\quad i=1,2,3, \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(z,S;\gamma_i)\boldsymbol{C}+\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(z,\bar{S};\gamma_i)\boldsymbol{C}](1-\beta_i)/2,\quad i=1,2,3, \tag{1.4}$$

式中, $\beta_1=\beta$, $\beta_2=-\beta$, $\beta_3=0$,

$$\gamma_1=\frac{1}{2}-i\varepsilon,\quad \gamma_2=\frac{1}{2}+i\varepsilon,\quad \gamma_3=\frac{1}{2},$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}=\bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_2+\bar{\boldsymbol{B}}_2)\boldsymbol{L}_2/\Delta_1,\quad \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}=e^{-2\pi\varepsilon}\bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_2+\bar{\boldsymbol{B}}_2)\bar{\boldsymbol{L}}_2/\Delta_1,\\ \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}=\bar{\boldsymbol{P}}_1^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W}_3^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_2+\bar{\boldsymbol{B}}_2)\boldsymbol{L}_2/\Delta_3,\quad \boldsymbol{Q}_3^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W}_3^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_2+\bar{\boldsymbol{B}}_2)\bar{\boldsymbol{L}}_2/\Delta_3,\end{cases} \tag{1.5}$$

$$\Delta_1=\bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{W},\quad \Delta_3=\boldsymbol{W}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{W}_3,$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)},$$

$$\boldsymbol{D}(z,s,\gamma)=\mathrm{diag}\left\{\frac{\left[1-\left(\frac{z}{S_1}\right)^{-\gamma}\right]}{(z-S_1)},\ \frac{\left[1-\left(\frac{z}{S_2}\right)^{-\gamma}\right]}{(z-S_2)},\ \frac{\left[1-\left(\frac{z}{S_3}\right)^{-\gamma}\right]}{(z-S_3)}\right\}. \tag{1.6}$$

引入方阵

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{L}_2^{-1}\bar{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}, \tag{1.7}$$

$$\mathscr{R}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}+\bar{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}}, \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{L}_2^{-1}(\boldsymbol{B}_2+\bar{\boldsymbol{B}}_2)^{-1}, \tag{1.9}$$

则有

$$\phi_i'(z)=V_{ik}^{(0)}(z,s)b_k/2\pi+V_{ik}(z,s)b_k/2\pi, \tag{1.10}$$

$$V_{ik}^{(0)}(z,s)=\frac{C_{ik}}{(z-S_j)},\quad j\text{ 不求和}, \tag{1.11}$$

$$V_{ik}(z,s)=\sum_{m=1}^{3}\frac{C_{jm}^{(2)}\bar{C}_{mk}}{(z-\bar{S}_m)}-\sum_{m=1}^{3}T_{jm}\mathscr{R}_{mk}(z,S), \tag{1.12}$$

考察图2所示的分枝裂纹,有

$$z=te^{-i\omega},\quad z_j=t\cdot\omega_j,$$

$$\omega_i = \cos\omega - \mu_i \sin\omega.$$

作用在分枝裂纹上的面力向量为

$$p_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{i1}\sin\omega + \sigma_{i2}\cos\omega = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} L_{ij}\omega_j \phi_j'(z_j),$$

注意到分枝裂纹是在材料 2 的一侧，有

$$L_2 D_\omega \varphi_{1\mathrm{total}}'(x) + \bar{L}_2 D_\omega \overline{\varphi_{1\mathrm{total}}'(z)} = 0, \tag{1.13}$$

式中

$$D_\omega = \mathrm{diag}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$$

$$\varphi_{1\mathrm{total}}' = \varphi^{(0)}(z) + \varphi^{(d)}(z), \tag{1.14}$$

向量函数 $\varphi^{(0)}(z)$ 对应于出现分枝裂纹之前的复势向量函数。而 $\varphi^{(d)}(z)$ 表示分枝裂纹线段上的连续分布位错所对应的复向量函数。有

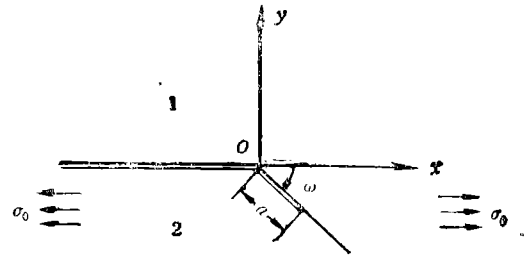

图 2　界面裂纹的分叉

$$\phi_i^{(d)}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^a \sum_{j=1}^{3} \{V_{ij}^{(0)}(z,s)b_j(s) + V_{ij}(z,s)b_j(s)\}\mathrm{d}s, \tag{1.15}$$

式中 $s = |s|$，a 是分枝裂纹长度。

将(1.15)式代入(1.13)式，得

$$\mathrm{Re}\int_0^a [U_{ij}^{(0)}(z,s) + U_{ij}(z,s)]b_j(s)\mathrm{d}s = -\pi p_i^{(0)}, \quad z = te^{-i\omega}, \tag{1.16}$$

其中 $p_i^{(0)}$ 为与 $\varphi^{(0)}(z)$ 对应的面力向量。式中

$$\begin{cases} U_{ij}^{(0)}(z,s) = \sum_{j=1}^{3} (L_{ij}\omega_j)_2 V_{ij}^{(0)}(z_j,s), \\ U_{ij}(z,s) = \sum_{j=1}^{3} (L_{ij}\omega_j)_2 V_{ij}(z_j,s). \end{cases} \tag{1.17}$$

方程(1.16)即是关于位错密度分布函数 $b(s)$ 的控制方程。这是一个耦合的奇性积分方程。方程(1.16)可改写为

$$\mathrm{Re}\left\{\int_0^a \frac{M_{ik}b_k(\tau)\mathrm{d}\tau}{(\tau - t)} + 2\int_0^a K_{ik}(\tau,t)b_k(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \pi p_i^{(0)}, \quad 0 < t < a, \tag{1.18}$$

式中 $\tau = |s| = s$，$s = te^{-i\omega}$，

$$M = (B_2 + \bar{B}_2)^{-1}, \tag{1.19}$$

$$2K_{ik}(\tau,t) = \sum_{j=1}^{3} (L_{ij}\omega_j)_2 \left\{\sum_{m=1}^{3} \frac{C_{jm}\bar{C}_{mk}}{(\bar{\omega}_m\tau - \omega_j t)} + \sum_{m=1}^{3} T_{jm}R_{mk}(z_j,s)\right\}, \quad z = te^{-i\omega}. \tag{1.20}$$

2　分枝裂纹的应力强度因子和能量释放率

首先来分析 $p_i^{(0)}$。在出现分枝裂纹之前，裂纹顶端区域的应力场可表示为

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\{\mathrm{Re}(Kr^{i\varepsilon})\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta) + \mathrm{Im}(Kr^{i\varepsilon})\tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}(\theta) + K_3\tilde{\sigma}_{ij}^{(3)}(\theta)\} + \sigma_0\delta_{i1}\delta_{j1}, \tag{2.1}$$

σ_0 表征非奇性的水平方向应力分量 $\sigma_{11} = \sigma_{0x}$　水平方向的应力分量越过界面时，会产生

间断. 我们感兴趣的是作用在材料 2 的水平方向应力分量 $\sigma_{11}=\sigma_0$.

与奇性场对应的向量函数 $\boldsymbol{\phi}^{(0)}(z)$ 可表示为[12]

$$\boldsymbol{\phi}^{(0)}(z)=\boldsymbol{L}_2^{-1}\bar{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}^{(0)}(z),\quad z\in\Omega^-, \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}^{(0)}(z)&=\frac{e^{\pi\varepsilon}Kz^{i\varepsilon}\boldsymbol{W}+e^{-\pi\varepsilon}\bar{K}z^{-i\varepsilon}\bar{\boldsymbol{W}}}{2\sqrt{2\pi z}\cosh\pi\varepsilon}+\frac{K_3\boldsymbol{W}_3}{2\sqrt{2\pi z}}\\&=h_1^{(0)}(z)\boldsymbol{W}+h_2^{(0)}(z)\bar{\boldsymbol{W}}+h_3^{(0)}(z)W_3,\end{aligned} \tag{2.3}$$

由此推得(加上 σ_0 的贡献)

$$p_i^{(0)}=2\cdot\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{3}(L_{ij}\omega_j)_2T_{jl}^*h_l^{(0)}(z_j)\right\}+\delta_{1i}\sigma_0\sin\omega, \tag{2.4}$$

式中

$$\boldsymbol{T}^*=\boldsymbol{T}\cdot[\boldsymbol{W},\bar{\boldsymbol{W}},\boldsymbol{W}_3], \tag{2.5}$$

$$\begin{cases}h_1^{(0)}(z)=e^{\pi\varepsilon}Kz^{i\varepsilon}/2\sqrt{2\pi z}\cosh\pi\varepsilon,\\h_2^{(0)}(z)=e^{-\pi\varepsilon}\bar{K}z^{-i\varepsilon}/2\sqrt{2\pi z}\cosh\pi\varepsilon,\\h_3^{(0)}(z)=K_3/2\sqrt{2\pi z},\end{cases} \tag{2.6}$$

限于分析平面内问题.

参照 He 等人[14]及 Wang 等人[16]的工作,分枝裂纹顶端的应力强度因子可表示为

$$K_1^{kink}+iK_{II}^{kink}=cKa^{i\varepsilon}+\bar{d}\bar{K}a^{-i\varepsilon}+B\sigma_0\sqrt{a}, \tag{2.7}$$

式中 c, d, B 是复系数, 它们是分枝角 ω 及各向异性材料对弹性常数的函数. 而与主裂纹应力强度因子 K、分枝裂纹长度 a 及水平方向应力 σ_0 无关. 主裂纹沿界面扩展的能量释放率:

$$G_i=(K_1^2+K_2^2)/E_*, \tag{2.8}$$

式中

$$\frac{1}{E_*}=\bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}+\bar{\boldsymbol{H}})\boldsymbol{W}/4\cosh^2\pi\varepsilon, \tag{2.9}$$

分枝裂纹能量释放率为

$$G^{kink}=k_*^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_*+\bar{\boldsymbol{B}}_*)k_*/4, \tag{2.10}$$

式中

$$\boldsymbol{k}_*=[K_{II}^{kink},\ K_I^{kink}]^{\mathrm{T}}, \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{B}_*=\boldsymbol{R}_*\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_*^{\mathrm{T}} \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{R}_*=\begin{bmatrix}\cos\omega & -\sin\omega\\ \sin\omega & \cos\omega\end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

将(2.6)式代入(2.10)式,导得

$$G^{kink}=\frac{1}{2}\cdot\{B_{22}(e_{11}K_I^*+e_{12}K_2^*+B_r\sigma_0\sqrt{a})^2+B_{11}(e_{21}K_I^*+e_{22}K_2^*+B_\theta\sigma_0\sqrt{a})^2\}, \tag{2.14}$$

式中 B_{ij} 是材料 2 的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵 ($\boldsymbol{B}_2$) 的元素[1],

1) 为了简明起见,在建立(3.13)和(3.14)式时,假定 $\mathrm{Re}B_{12}=0$.

$$\begin{cases} e_{11} = \cos\omega c_{11} - \sin\omega c_{21}, \\ e_{12} = \cos\omega c_{12} - \sin\omega c_{22}, \\ e_{21} = \sin\omega c_{11} + \cos\omega c_{21}, \\ e_{22} = \sin\omega c_{12} + \cos\omega c_{22}, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} B_r = \cos\omega \cdot B_1 - \sin\omega B_2, \\ B_\theta = \sin\omega B_1 + \cos\omega B_2. \end{cases} \tag{2.16}$$

$$K_1^* = \mathrm{Re}(Ka^{i\varepsilon}),\quad K_2^* = \mathrm{Im}(Ka^{i\varepsilon}). \tag{2.17}$$

主裂纹的应力强度因子 K，一般说来可表示为 $K = |K|e^{i\psi}L^{-i\varepsilon}$，则有

$$\phi_* = \phi + \varepsilon \ln \frac{a}{L},$$

$$K_1^* = |K|\cos\phi_*,\quad K_2^* = |K|\sin\phi_*, \tag{2.18}$$

将(2.18)式代入(2.14)式，并除以 G_i 便得到

$$\frac{G^{\mathrm{kink}}}{G_i} = f^{(0)} + \eta f^{(1)} + \eta^2 f^{(2)}, \tag{2.19}$$

其中

$$f^{(0)} = \frac{E_*}{2}\{B_{22}(e_{11}\cos\phi_* + e_{12}\sin\phi_*)^2 + B_{11}(e_{21}\cos\phi_* + e_{22}\sin\phi_*)^2\}, \tag{2.20}$$

$$f^{(1)} = E_*\{B_{22}(e_{11}\cos\phi_* + e_{12}\sin\phi_*)B_r + B_{11}(e_{21}\cos\phi_* + e_{22}\sin\phi_*)B_\theta\}, \tag{2.21}$$

$$f^{(2)} = \frac{E_*}{2}\{B_{22}B_r^2 + B_{11}B_\theta^2\}, \tag{2.22}$$

$$\eta = \sigma_0\sqrt{a}/|K| = \sigma_0\sqrt{a}/\sqrt{E_*G_i}. \tag{2.23}$$

无量纲参数 η 是由 He 等人[14]在分析各向同性双材料界面裂纹分叉时引进的。它表征了水平方向应力分量 σ_0 及分枝裂纹长度 a 的相对大小。

函数 $f^{(i)}$ 是不依赖于主裂纹应力强度因子的幅值 $|K|$ 及参数 η，但依赖于相位角 ϕ_*，分枝角 ω 及系数 C_{ij}, B_i。

3 计 算 结 果

设想材料 1 与材料 2 是两种不同的正反各向异性材料，它们的主轴方向分别与 x, y, z 轴平行。x 轴是两种材料界面，主裂纹位于负实轴。矩阵 H 的元素为[12]

$$\begin{cases} H_{11} = [2n\lambda^{1/4}\sqrt{s_{11}s_{22}}]_1 + [2n\lambda^{1/4}\sqrt{s_{11}s_{22}}]_2, \\ H_{22} = [2n\lambda^{-1/4}\sqrt{s_{11}s_{22}}]_1 + [2n\lambda^{-1/4}\sqrt{s_{11}s_{22}}]_2, \\ H_{12} = i\{[\sqrt{s_{11}s_{22}} + s_{12}]_1 - [\sqrt{s_{11}s_{22}} + s_{12}]_2\}, \\ \beta = iH_{12}/\sqrt{H_{11}H_{22}}, \end{cases} \tag{3.1}$$

这里 $[\,]_1$ 表示材料 1 的有关量，$[\,]_2$ 表示材料 2 的有关量。s_{ij} 是弹性柔度张量。λ, n 是无量纲参数：

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{s_{11}}{s_{22}} = \dfrac{E_2}{E_1},\quad n = \sqrt{1+\rho}, \\ \rho = (2s_{12} + s_{66})/2\sqrt{s_{11}s_{22}}. \end{cases} \tag{3.2}$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2n\lambda^{1/4}\sqrt{s_{11}s_{22}}, & i(\sqrt{s_{11}s_{22}}+s_{12}) \\ -i(\sqrt{s_{11}s_{22}}+s_{12}), & 2n\lambda^{-1/4}\sqrt{s_{11}s_{22}} \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

特征向量 $\boldsymbol{W}$ 是

$$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}\left[-i\sqrt{\frac{H_{22}}{H_{11}}},1\right]^{\mathrm{T}}. \tag{3.4}$$

下面针对一组典型的数据进行计算。两种材料的弹性常数取为 $\lambda_1=1.0$，$\rho_1=-0.19$，$\lambda_2=0.12$，$\rho_2=6.4$。系数 c_{ij} 对6种不同的 α,β 组合已经由 Wang 等人[16]给出。

图3给出 $\alpha=\beta=0$ 时，系数 B_1,B_2 与分枝角 ω 之间的关系曲线。图4表示了系数 $f^{(i)}$ 与分枝角 ω 之间的函数关系 ($\alpha=\beta=0$，$\psi=45°$)。

当 $\alpha=\beta=0$，$\psi=45°$，水平应力 σ_0 对能量释放率比值 $G^{\mathrm{kink}}/G_{\mathrm{i}}$ 的影响，可以从图5得以清楚的说明，图上的 $G_{\mathrm{i}}=G^{\mathrm{kink}}$。随着 η 的增加 $G^{\mathrm{kink}}/G_{\mathrm{i}}$ 比值不断增加。当 $\eta=0.5$

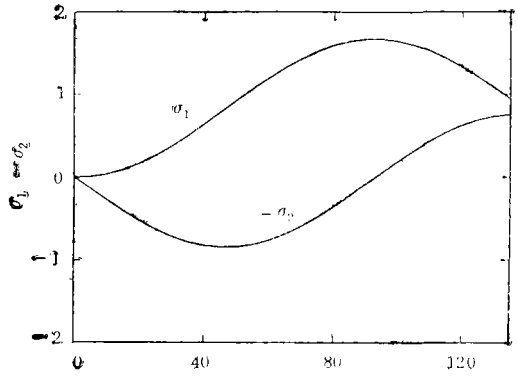

图3. 系数 F_1 和 E_2 与分枝角 ω 关系曲线。

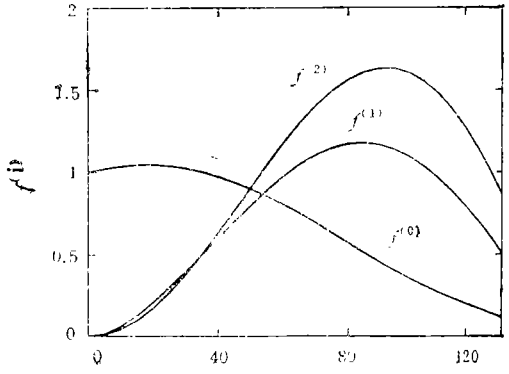

图4 系数 $f^{(i)}$ 与分枝角 ω 的函数关系

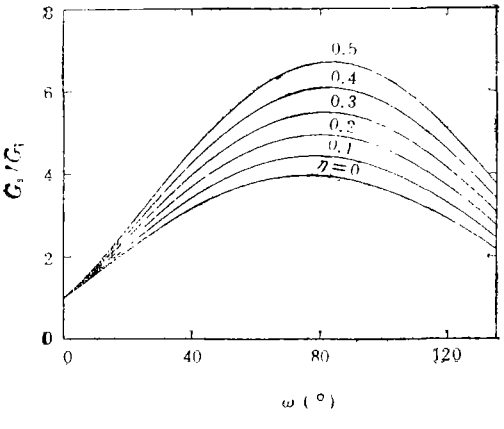

图5 能量释放率比值与分枝角 ω 的关系曲线。

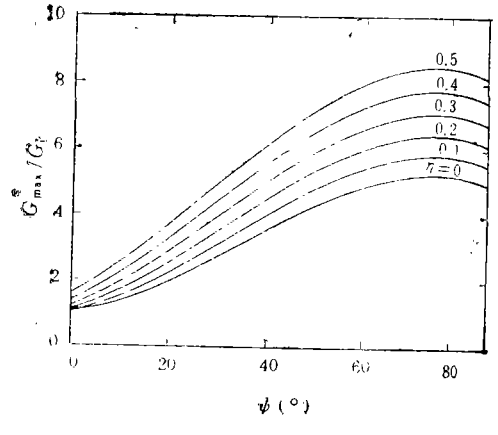

图6 最大能量释放率比值与载荷相位角 ψ 之间的关系

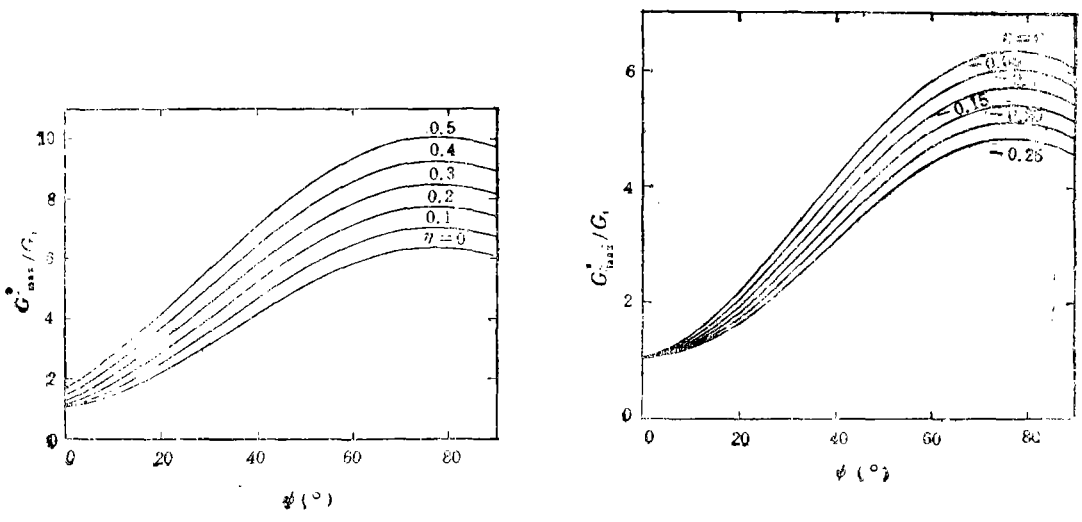

图 7. 参数 η 对最大能量释放率比值的影响($\alpha=0.5, \beta=0$)

时，能量释放率的比值可以增加 80% 左右. 这足以说明水平应力分量的重大影响. 反之水平方向的压应力可以大大降低能量释放率比值.

从图 5 上可以看出，存在着一个择优的 ω_c 角，沿着这个分枝角 ω_c，能量释放率 G^{kink} 达到最大值 G^{kink}_{max}.

比值 G^{kink}_{max}/G_i 作为 ψ 角的函数见图 6($\alpha=\beta=0$).

在图 7 上，我们可以考察参数 α 的影响.

4 结论与讨论

本文对各向异性弹性双材料的界面裂纹分叉问题进行了详尽的分析，将分枝裂纹看作是连续分布的位错. 建立了位错密度分布函数的奇性积分方程. 对于正交各向异性双材料界面裂纹及双晶倾侧晶界界面裂纹，提出了分枝裂纹顶端应力强度因子及能量释放率的显示表达式，这些表达式中含有水平应力分量 σ_0 的贡献.

本文建立的奇性积分方程，适用于任意的各向异性双材料，所提出的显式表达式，可直接用于层板复合材料及双晶材料.

界面裂纹可以沿着界面向前扩展，也可以偏离界面，分叉扩展到脆性基底材料中去. 这依赖于两种机制的竞争.

一般地说，界面断裂韧性足够高，那么裂纹将会分叉到脆性基底中去. 反之界面很脆，裂纹将沿着界面扩展. 用公式来表示，将有：

当
$$\Gamma_s/\Gamma_i < G^{kink}_{max}/G_i, \tag{4.1}$$
那么主裂纹会分叉到基底材料中去；

当
$$\Gamma_s/\Gamma_i > G^{kink}_{max}/G_i, \tag{4.2}$$
那么主裂纹会沿着界面扩展. 这里 Γ_i, Γ_s 分别是界面断裂韧性与基底材料断裂韧性.

严格地说，判别式(5.1)，(5.2)只适用于各向同性弹性双材料界面裂纹，或脆性基底材料断裂韧性 Γ_i 不依赖裂纹扩展方向的情况。

对各向异性基底材料，其断裂韧性 Γ_i 依赖于扩展方向，此时，裂纹分叉的条件应改为：

$$\Gamma_i(\omega) \leqslant \Gamma_i(\phi) G^{\text{kink}}(\omega, \phi)/G_i. \tag{4.3}$$

本文分析，提供了能量释放率比值 $G^{\text{kink}}(\omega, \phi)/G_i$ 的显式表达式，也就是(3.19)式，至于 $\Gamma_i(\phi)$ 及 $\Gamma_i(\omega)$ 需要通过实验测定。

参 考 文 献

[1] Gotoh, M., *Int. J. Fructure*, 1967, **3**: 253—265.
[2] Clements, D. L., *Int. J. Eng. Science*, 1971, 9: 257—265.
[3] Stroh, A. N., *Phil. Magazine*, 1958, **7**: 625—646.
[4] Wills, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, 1971, **19**: 353—368.
[5] Ting, T. C. T., *Int. J. Solids and Structures*, 1986, 22: 965—983.
[6] Wang, S. S., Choi, I., *J. Appl. Mech.*, 1983, **50**: 169—178.
[7] Bassani, J. L., Qu, J., *J. Mech. Phys. Solids*, 1989, **37**: 434—453.
[8] Qu, J., Bassani, J. L., *J. Mech. Phys. Solids*, 1989, **37**: 417—433.
[9] Tewary, V. K., Wagoner, R. H., Hirth, J. P., *J. Mater. Res.*, 1989, **4**: 113—136.
[10] Wu, K. C., *J. Appl. Mech.*, 1990, **57**: 882—886.
[11] Wu, K. C., Huang, S. J., *J. Appl. Mech.*, 1990, **57**: 894—900.
[12] Suo, Z., *Proc. R. Soc. Lond.*, 1990, **427**: 331—358.
[13] He, M. Y., Hutchinson, J. W., *J. Appl. Mech.*, 1989, **56**: 270—278.
[14] He, M. Y., Bartlett, A., Evans, A. G. *et al.*, *J. Am. Ceramic Soc.*, 1991, **74**(4): 767—771.
[15] Miller, G. R., Stock, W. L., *J. Appl. Mech.*, 1989, 56: 844—849.
[16] Wang, T. C., Shih, C. F., Suo, Z., *Int. J. Solids Structures*, 1992, **29**: 327—344.