中 国 科 学 (A 辑)
第23卷 第4期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1993年4月

若干平面图的完备色数*

张忠辅
(兰州铁道学院基础部,兰州 730070)

王建方
(中国科学院应用数学研究所,北京 100080)

王维凡
(辽宁大学数学系,沈阳 110036)

王流星
(黑龙江水利专科学校,哈尔滨 150086)

摘 要

设G是无割点平面图，$\chi_c(G)$为G的点边面完备色数，$p=|V(G)|$. 本文证明了如G为$\Delta(G)\geq 7$的外平面图，或G为$p\geq 9$且$\Delta(G)\geq p-2$，或G为$\Delta(G)\geq 14$的极大平面图，则

$$\chi_c(G)=\Delta(G)+1.$$

关键词 外平面图、高度平面图、极大平面图、完备色数

1 引 言

具有重要实际价值和理论意义的图染色问题，是图论的主要研究内容之一. 平面图的染色是图论的起源之一,也是图染色理论的重要研究内容. 图染色的基本问题是,确定其相应染色法的色数.

本文所说的图$G(V,E,F)$均为简单平面图,且用$V(G),E(G),F(G)$分别表示G的点,边、面集合，在不发生混淆时就记为V，E和F. 对$f_1,f_2\in F$，当且仅当f_1与f_2有公共边时,称f_1与f_2为相邻. 面的边界上的点和边,称为与该面相关联. $\Delta(G)$，p分别表示G的最大度和G的阶数.

定义 1.1 对平面图$G(V,E,F)$，使得$V\cup E\cup F$中相邻和相关联的元素均染为不同色的方法,称为G的正常完备染色法,简称完备染色法；若能用k种色使$V\cup E\cup F$中相邻和相关联的元素均染为不同色,则称图G为k-完备染色图,而相应的染色法为k-完备染色法.

对任意有限平面图G，显然存在k-完备染色法.

定义 1.2 平面图G的所有k-完备染色法中，$\chi_c(G)=\min\{k\}$称为G的完备色数.

由定义,可立得$\chi_c(G)\geq\Delta(G)+1$. 对$p\geq 6$的轮图W_p和扇图F_p，有

$$\chi_c(W_p)=\chi_c(F_p)=p,$$

这说明$\chi_c(G)$的下界是不可改进的.

猜想 1.1[1] 对任何平面图G，有$\chi_c(G)\leq\Delta(G)+4$.

1992-01-21 收稿，1992-11-05 收修改稿.
* 铁道部、甘肃省自然科学基金资助项目.

例如4阶完全图 K_4, $\chi_c(K_4)=7$. 这说明猜想的界是可达的.

由定义可知, 平面图的完备染色比其点、边、面、点边、点面、边面染色复杂、困难. 如点(边、面、全)色数,对G的子图H, 有

$$\chi(H)\leqslant\chi(G),$$

但是 $\chi_c(H)$ 就有可能大于 $\chi_c(G)$. 如图 $p\geqslant 6$,

$$p=\chi_c(W_p)<\chi_c(K_{1,p-1})=p+1.$$

已证[1],对 $\Delta(G)\leqslant 3$ 猜想 1.1 为真.

图的染色与图的连通性、有无割点关系不大,所以本文总假定G是无割点的连通平面图.

本文研究外平面图、$\Delta(G)\geqslant p-2$ ($p\geqslant 9$) 以及极大平面图的完备色数,文中的术语、记号参见文献[2].

2 外平面图的完备色数

对 $\Delta(G)\geqslant 3$ 的无割点外平面图 G, 有[3]

$$\chi_T(G)=\Delta(G)+1.$$

而面色数至多为3, 所以此时猜想 1.1 成立. 其中 $\chi_T(G)$ 表示G的全色数.

引理 2.1[3] 无割点的外平面图 G, 至少有两个2度点.

引理 2.2[3] $\Delta(G)\geqslant 4$ 的无割点外平面图 G, 至少有下列情况之一:

(i) 两个2度点相邻;

(ii) 2度点和3度点相邻;

(iii) 两个2度点共邻于一个4度点.

引理 2.3 $\Delta(G)\geqslant 7$ 的无割点外平面图 G, 若引理 2.2 的 (i)(ii) 不成立,则存在两个2度点共邻于一个4度点外,这两个2度点至多一个与最大度点相邻.

证 不妨设G为两个2度点共邻于一个4度点、另两邻点均为最大度点时,两最大度点也相邻的图;否则去掉此两个2度点、连两最大度点后即为不改变原图性质的这样图.

从两个2度点共邻于一个4度点开始, 若2度点的另两个邻点中有小于最大度的点, 则结论已成立. 否则,设 u_3^0, u_3^1 为此相邻的两个最大度点, 且 u_3^1 是按顺(或逆)时针方向 u_3^0 的第三个邻点. 当 u_3^2 按原序是 u_3^1 的第三个邻点且 $d(u_3^2)<\Delta$ 时, 结论已成立;否则,…, 如此下去,由于G是有限图,到 u_3^m 为止,根据 u_3^m 不会超过 u_3^{m-1} 的按序第四个邻点,从而,

$$u_3^m\neq u_3^0,u_3^1,\cdots,u_3^{m-1},$$

其中

$$d(u_3^i)=\Delta,\ i=1,2,\cdots,m-1;\ d(u_3^m)<\Delta.$$

即结论成立.

值得指出的是,对 $\Delta(G)=6$, 总可以构造出引理 2.2(i)(ii) 不出现, 而 (iii) 出现两个2度点共邻于一个4度点外,另两个邻点的度都是6. 容易证明:

定理 2.1[4] 对 $4\leqslant\Delta(G)\leqslant 6$ 的无割点外平面图 G, 有

$$\chi_c(G)\leqslant 8.$$

定理 2.2 对 $\Delta(G)\geqslant 7$ 的无割点外平面图 G, 有

$$\chi_c(G)=\Delta(G)+1.$$

证　仅对 $\Delta(G)=7$ 加以证明，$\Delta(G)\geqslant 8$ 时与 $\Delta(G)=7$ 的证明完全相同.

对点数 p 使用数学归纳法.

$p=8$ 时，G 是扇 F_8，所以结论成立.

设 $p-1(p>9)$ 时结论成立，现推 p 时结论也成立. 由引理 2.2 及 2.3，分三种情况加以证明.

情况 1　有两个 2 度点相邻. 这时将两个 2 度点合并成一个点，去掉 2 度点间的边的图为 G^*，$|V(G^*)|=p-1$，$\Delta(G^*)=\Delta(G)=7$. 由假设，G^* 存在 8-完备染色法 σ^*，从 σ^* 极易得到 G 的 8-完备染色法 σ，从而结论成立.

情况 2　一个 2 度点与一个 3 度点相邻. 设 $d(u)=2$，$d(v)=3$，$ux, uv, vw_1, vw_2\in E(G)$，$x\neq v$，$w_1\neq w_2$.

子情况 2.1　若 $vx\in E(G)$，即 $x=w_1$（或 w_2），考虑图 $G^*=G-u$.

子情况 2.2　若 $vx\notin E(G)$. 考虑图 $G^*=G-u+\{vx\}$.

对以上两种子情况，均有 $|V(G^*)|=p-1$，情况 2.1 的 $6\leqslant\Delta(G^*)\leqslant 7$，情况 2.2 的 $\Delta(G^*)=7$. 由假设或定理 2.4，它们均存在 8-完备染色法 σ^*，由 σ^* 易得 G 的 8-完备染色法 σ，所以情况 2 时结论成立.

情况 3　两个 2 度点共邻于一个 4 度点. 由引理 2.3，设 $d(u)=2$，$d(v)=4$，$d(w)\leqslant 6$，$uv, uw\in E(G)$.

子情况 3.1　若 $vw\in E(G)$. 考虑图 $G^*=G-u$.

对此，$|V(G^*)|=p-1$，$\Delta(G^*)=\Delta(G)=7$. 由假设，G^* 存在 8-完备染色法 σ^*，其色集合为 B. 记 uvw 的内部面为 f，G 中与 f 相邻的内部面为 f^*，G 与 G^* 的外部面分别为 f_0，f_0^*. 用 x_σ 表示点 x 在 σ 染法下，x 点及其关联边所染色的集合，显然 σ 是完备染法时，

$$|x_\sigma|=d(x)+1.$$

子情况 3.1.1　若 $\sigma^*(f_0^*)\in w_\sigma^*$. 在 σ^* 的基础上，构造 G 的 8-完备染色法 σ：

$$\sigma(uw)\in B\backslash w_\sigma^*,\ \sigma(f_0)=\sigma^*(f_0^*),\sigma(uv)\in B\backslash(v_\sigma^*\cup\{\sigma(uw),\sigma(f_0)\}),$$

$$\sigma(u)=\sigma^*(vw),\ \sigma(f)\in B\backslash\{\sigma(u),\ \sigma^*(v),\ \sigma^*(w),\ \sigma(uv),\ \sigma(uw),\ \sigma^*(f^*),\sigma(f_0)\}.$$

注意到 $|B|=8$，知上面染色是可行的. G 的其它元素染色与 G^* 的 σ^* 染法一致，所以 σ 是 G 的 8-完备染色法，故 p 时结论成立.

子情况 3.1.2　若 $\sigma^*(f_0^*)\notin w_\sigma^*$. 在 G^* 的 σ^* 下，构造 G 的 8-完备染色法 σ：

$$\sigma(uw)\in B\backslash(w_\sigma^*\cup\{\sigma^*(f_0^*)\},\ \sigma(u)=\sigma^*(vw),$$

$$\sigma(f_0)=\sigma^*(f_0^*),\ \sigma(uv)\in B\backslash(v_\sigma^*\cup\{\sigma(uw),\sigma(f_0)\}),$$

$$\sigma(f)\in B\backslash\{\sigma(u),\sigma^*(v),\sigma^*(w),\sigma(uv),\sigma(uw),\sigma^*(f^*),\sigma(f_0)\}.$$

G 的其它元素染色与 G^* 的 σ^* 染法一致. 显然 σ 是 G 的 8-完备染色法，故 p 时结论成立.

子情况 3.2　若 $vw\notin E(G)$. 考虑图 $G^*=G-u+\{vw\}$.

显然，$|V(G^*)|=p-1$，$\Delta(G^*)=7$. 由假设 G^* 存在 8-完备染色法 σ^*. 在 σ^* 下构造 G 的 8-完备染色法 σ：

$$\sigma(uw)=\sigma^*(vw),\ \sigma(f)=\sigma^*(f^*),\ \sigma(f_0)=\sigma^*(f_0^*),$$

$$\sigma(ux)\in B\backslash(v_\sigma^*\cup\{\sigma(f),\sigma(f_0)\}),$$

$$\sigma(u)\in B\backslash\{\sigma^*(v),\sigma^*(w),\sigma(uv),\sigma(vw),\sigma(f),\sigma(f_0)\}.$$

G的其它元素染色与 G^* 的 σ^* 染法一致. 其中 f 为 G 中边界上有边 uv 及 uw 的内部面,f^*为 G^* 中边界上有边 vw 的内部面. 显然 σ 为 G的 8-完备染色法,故 p 时结论成立.

综合以上情况, p 时结论成立,从而

$$\chi_c(G)=8\ (\Delta(G)=7\text{ 时}).$$

把 7 换成 $\Delta(G)(\geqslant 7)$, 完全同于 $\Delta(G)=7$, 可证结论成立.

3 高度平面图的完备色数

称 $\Delta(G)=p-i$ 的无割点平面图为 p_i 类图. p_1,p_2 类图称为高度图.

引理 3.1 若 G 为 $p\geqslant 3$ 的 p_1 类图,则下列至少有一成立:

(i) $\delta(G)=2$;

(ii) $\delta(G)=3$, 且存在 $d(u)=3$ 使面 uvx, uvy 为两三角形面. 其中 $\delta(G)$ 为G的最小度, $d(v)=p-1$, x, y 为异于 v 且与 u 相邻的两顶点.

此引理易证,用穷染法还可证下面两引理:

引理 3.2 对 p_1 类图 G, $p=6$ 时 $6\leqslant\chi_c(G)\leqslant 7$, 且 $\chi_c(G)=6$ 当且仅当G中不含子图 K_4; $p=7$ 时 $\chi_c(G)=7$.

引理 3.3 对 $p=9$ 的 p_2 类图 G, 有 $\chi_c(G)=8$.

引理 3.4 对 $p\geqslant 9$ 的 p_2 类图 G, 有

$$|\{v|d(v)=p-2\}|\leqslant 2.$$

证 否则G将含 $K_{3,3}$.

下面两引理也是容易证明的.

引理 3.5 对 $p\geqslant 3$ 的 p_1 类图 G, 若含有两个最大度点 w_1, w_2, 则

(i) 任意 $x\in V(G)\backslash\{w_1,w_2\}$, 有 $2\leqslant d(x)\leqslant 4$;

(ii) 任意 $f\in F(G)$, 有 $b(f)=C_3$ 或 $b(f)=C_4$, 且 $b(f)$ 中至多含有两个 $V(G)\backslash\{w_1,w_2\}$ 中的点. 其中 $b(f)$ 表示面 f 的边界.

引理 3.6 对 $p\geqslant 10$ 的 p_2 类图 G, 含有两个相邻的最大度点 w_1, w_2, 设 $x_i\in N(w_i)$ $(i=1,2)$, 则

(1) 当 $x_1=x_2=x$ 时, $d(x)=2$, 且 x 的邻点度不超过 5;

(2) 当 $x_1\neq x_2$ 时,记 $N_{12}=(N(w_1)\cap N(w_2))\backslash\{w_1,w_2\}$, 则$G$有下列情形之一成立:

(i) 存在度为 2 的点 $u\in N_{12}$, 使 uw_1w_2 为 G的三角形面;

(ii) 存在度为 3 的点 $u\in N_{12}$, 使 $G[N(u)]=K_4$, 且 $G[N(u)]$ 的每一个内面不含G的其它点边;

(iii) 存在三点 $u_1,u_2,u_3\in N_{12}$, 使 $d(u_3)\leqslant 4, d(u_1)\leqslant 5, d(u_2)\leqslant 6$, 且四边形 $u_1w_1u_2w_2$ 内部仅含有 u_3 及其关联的边.

引理 3.7 对 $p\geqslant 9$ 的 p_2 类图 G, 仅含有唯一最大度点 w, $x\notin N(w)$, 则有下列结论之一成立:

(i) 存在度为 2 的点 $u\in N(w)$, 使得当 $uy\in E(G)$ 且 $y\neq x,w$ 时, uyw 为G的三角形面;

(ii) 存在度为 3 的点 $u\in N(w)$，使 $G[N(u)]$ 内部不含 G 的其它点边；

(iii) 存在三点 $u_1,u_2,u_3\in N(w)\cap N(x)$，使四边形 u_1wu_2x 内部仅含 u_3 及其关联边，且 $d(u_3)\leqslant 4$，u_1,u_2 至少有一点的度不超过 4.

此引理证明是容易的，详证略去.

定理 3.1 对 $P\geqslant 7$ 的 p_1 类图 G，有 $\chi_c(G)=p$.

证 对 P 使用数学归纳法并利用引理 3.1，3.2，3.5，即可证明结论成立.

p_2 类图繁于 p_1 类图，且由于度为 $p-2$，就比 p_1 类的染色难得多.

定理 3.2 对 $P\geqslant 9$ 的 p_2 类图 G，有 $\chi_c(G)=p-1$.

证 由引理 3.3 及 3.4，对 P 使用数学归纳法，在 $p-1(\geqslant 9)$ 成立下，推 P 时也成立，使用引理 3.6，3.7 分三种情况加以证明：

情况 1 G 仅含一个最大度点；

情况 2 G 含两个不相邻的最大度点；

情况 3 G 含有相邻的最大度点 w_1，w_2.

下面仅对情况 3 加以证明. 设 $x_i\in V(G)\backslash N(w_i)$ $(i=1,2)$，由引理 3.6，再分两种情况：

情况 3.1 若 $x_1=x_2=x$，且 $d(x)=2$，此时容易证明 P 时结论成立.

情况 3.2 若 $x_1\neq x_2$.

情况 3.2.1 存在 $d(u)=2$，$u\in N_{12}$，使 uw_1w_2 为 G 的三角形面. 此时极易证得 P 时结论成立.

情况 3.2.2 存在度为 3 的顶点 $u\in N_{12}$，使 $G[N(u)]=K_4$，且 $G[N(u)]$ 的每一内面不含 G 的其它点边.

此时注意到 $uw_i\in E(G)$ $(i=1,2)$，再设 $uy\in E(G)$，$y\in N_{12}$，则 $3\leqslant d(y)\leqslant 6$. 令 $G_0=G-u$，G_0 为 p_2 类图易从 G_0 的 $(p-2)$-完备染色法得 G 的 $(p-1)$-完备染色法，所以 P 时结论成立.

情况 3.2.3 存在三点 $u_1,u_2,u_3\in N_{12}$，使 $d(u_3)\leqslant 4$，$d(u_1)\leqslant 6$，$d(u_2)\leqslant 5$，且四边形 $u_1w_1u_2w_2$ 内部仅含有 u_3 及其关联边.

考虑 $G_0=G-u_3$. 易见 G_0 为 p_2 类图，由归纳假设，G_0 有 $(p-2)$-完备染色法 σ_0. 设 C_0 为 σ_0 染法的色集，$\beta\notin C_0$，$C=C_0\cup\{\beta\}$. 下面在 σ_0 的基础上构造 G 的 $(p-1)$-完备染色法 σ.

情况 3.2.3.1 若 $d(u_3)=4$. 此时有 $u_1u_3,u_2u_3,u_3w_1,u_3w_2\in E(G)$.

情况 3.2.3.1.1 若 $d(u_1)\geqslant 4$（同理可证 $d(u_2)\geqslant 4$）. 记 G_0 中被边 $w_1u_1,w_2u_1,w_2u_2,u_2w_1$ 隔离且异于四边形 $u_1w_1u_2w_2$ 的面分别为 f_1,f_2,f_3,f_4. 显然 $f_i(i=1,2,3,4)$ 也是 G 的面. 易见 $w_2\in b(f_1)$ 与 $w_1\in b(f_2)$ 不能同时成立. 不妨设 $w_2\notin b(f_1)$，令

$$\sigma(u_3w_2)=\sigma_0(w_2),\ \sigma(w_1u_3)=\sigma(w_2)=\sigma(f_1)=\beta,$$

$$\sigma(u_1u_3)\in C\backslash(u_{1\sigma_0}\cup\{\beta,\sigma(u_3w_2)\}),$$

$$\sigma(u_2u_3)\in C\backslash(u_{2\sigma_0}\cup\{\beta,\sigma(u_3w_2),\sigma(u_1u_3)\}),$$

$$\sigma(u_3)\in C\backslash\{\sigma_0(u_1),\sigma_0(u_2),\sigma_0(w_1),\beta,\sigma(u_1u_3),\sigma(u_3w_2),\sigma(u_2u_3)\},$$

$$\sigma(u_1u_3w_2)\in C\backslash(B_\sigma(u_1u_3w_2)\cup\{\sigma_0(f_2)\}),$$

$$\sigma(u_2u_3w_2)\in C\setminus(B_\sigma(u_2u_3w_2)\cup\{\sigma_0(f_3),\sigma(u_1u_3w_2)\}),$$
$$\sigma(u_2u_3w_1)\in C\setminus(B_\sigma(u_2u_3w_1)\cup\{\sigma_0(f_4),\sigma(u_2u_3w_2)\}),$$
$$\sigma(u_1u_3w_1)\in C\setminus(B_\sigma(u_1u_3w_1)\cup\{\sigma(u_1w_3w_2),\sigma(u_2w_3w_1)\}),$$

G中其它元素染色与σ_0同,其中$B_\sigma(f)$表示在σ染法下f边界上的染色集合. 易见σ是G的$(p-1)$-完备染色法,从而$\chi_c(G)=p-1$, 即p时结论成立.

情况 3.2.3.1.2 若 $d(u_1)=d(u_2)=3$. 此时易从G_0的σ_0得G的$(p-1)$-完备染色法σ,从而p时结论成立.

情况 3.2.3.2 若 $d(u_3)=3$. 此时分别对 $d(u_1)\geq 4$, $d(u_1)=3$, 加以讨论,即可从G_0的σ_0得G的$(p-1)$-完备染色法σ, 从而p时结论成立.

情况 3.2.3.3 若 $d(u_3)=2$. 此时再分别对 $d(u_1)\geq 3$ (同理可证 $d(u_2)\geq 3$) 及 $d(u_1)=d(u_2)=2$ 加以讨论,极易从G_0的σ_0得G的$(p-1)$-完备染色法, 从而p时结论成立.

综合以上各种情况,知p时结论成立. 由归纳原理知,结论成立.

4 极大平面图的完备色数

极大平面图集记为$\mathscr{T}$, $\chi_T(G)$为G的全色数.

引理 4.1[5] 对平面图G, 有

(i) 当 $\Delta(G)\geq 14$ 时, $\chi_T(G)=\Delta(G)+1$;

(ii) 当 $9\leq\Delta(G)\leq 13$ 时, $\chi_T(G)\leq\Delta(G)+2$;

(iii) 当 $6\leq\Delta(G)\leq 8$ 时, $\chi_T(G)\leq\Delta(G)+3$.

定理 4.2 对 $G\in\mathscr{T}$, 有

(i) 当 $\Delta(G)\geq 6$ 时, $\chi_c(G)=\chi_T(G)$;

(ii) 当 $4\leq\Delta(G)\leq 5$ 时, $\chi_c(G)\leq\Delta(G)+4$;

(iii) 当 $\Delta(G)=3$ 时, $\chi_c(G)=7$;

(iv) 当 $\Delta(G)=2$ 时, $\chi_c(G)=5$.

证 (iii),(iv)是平凡的. 对于(i),可先用$\chi_T(G)$种色对G的点、边正常染色后,注意到G的每一面恰与9个元素相邻和相关联, 故结论成立. 对于(ii), 可根据$\delta(G)$定出G而证得[1]:

猜想 对 $\Delta(G)\geq 9$ 的无割点平面图G, 有

$$\chi_c(G)=\chi_T(G).$$

致谢 本文曾与新加坡大学 Yap, H. P. 教授进行了有益的讨论,特致谢意.

参 考 文 献

[1] Kronk, H., Mitchem, J., *Discrete Math.*, 1973, 5: 253—260.
[2] Bondy, J. A., Murty, U. S. R., *Graph Theory with Application*, Macmillan Press Ltd, 1976.
[3] Zhang Zhongfu, Zhang Jianxun, Wang Jianfang, *Scintia Sinica*, Series A, 1988, **31**(12): 1434—1441.
[4] 王维凡、张忠辅,兰州铁道学院学报,1992,3: 27—34.
[5] Borodin, O. V., *J. of Reine Angew Math.*, 1989, 394: 180—185.

1) 许宝刚,极大平面图及其同胚图的完备着色.