中 国 科 学
1986 年 12 月　　A 辑　　第 12 期

孤立无力场磁拱的自洽模型

胡文瑞　李建国
（中国科学院力学研究所，北京）

摘　要

聚集强磁场的磁通量管是太阳表面磁场的基本位形．本文讨论了孤立磁通量管在太阳大气中的平衡位形．从数学上看，即使对于线性无力场模型，磁势的方程是线性的，但边界条件是非线性的，而且边界位置也需要由物理条件确定．对于孤立的无力场磁拱，在较大标高近似时，我们求出了均匀圆弧拱和非均匀拱模型的分析解．结果表明，对于不同的环向磁场，非线性问题可能无解，可能有解；非线性问题解的个数最多可以有四个，有时是两个．本文具体求出了胖拱近似和瘦拱近似下的分析解，从而揭示出磁拱结构的一般性质．

一、前　言

我们对太阳磁场的认识，从概念上发生了很大的变化．近十多年的观测不断揭示，太阳大气中的磁通量绝大部分都集中于一些孤立的磁通量管中．光球观测表明，活动区的磁通量有90％以上聚集在单个磁通量管的磁结中[1]，而宁静区中聚集在孤立磁力线管中的磁通量所占比例更高[2,3]．这些磁力线管直径数百公里，其中的磁场强度约 0.1—0.15 T．随着空间观测的进展，远紫外和X射线的太阳像发现，磁弧和磁拱也是色球和日冕活动区中的基本结构形式[4-6]．根据其呈像特征，它们可分为过渡区磁弧和磁拱以及日冕弧和拱．

实验室中的磁场往往都是弥散的．在受控聚变装置中，为产生约束的磁场而历尽艰辛．研究太阳磁弧和磁拱的产生和约束条件，不仅是太阳物理的一个新问题，也可能对一般磁通量管的理解有所促进．大多数太阳物理的理论限于分析一维的孤立磁通量管（例如，见 Parker 专著[7]及有关的文献）．另外一种途径是用连续磁场模型来近似描述（例如，见文献[8]）．显然，实际的磁孤和磁拱至少是二维的，而且其位形受到磁通量管外部压力分布的显著影响．因此，发展二维的自洽模型就是研究磁孤和磁拱理论的重要问题．

在本文中，我们讨论一个孤立的磁通量拱．由于日冕中的压力标高很大以及热传导率也比较高，在不太大的日冕拱周围可以看成是等温的．这时，太阳的分层大气压力随高度的变化较小．孤立磁通量管内的磁场相对地较强，因而，可以用无力场模型来描述．而在磁通量管外，磁场相对较弱，压力梯度与重力平衡．在磁力线管的边界上，要求内部的磁压与外部的热力学压力平衡．建立完整的自洽孤立磁通量拱模型显然是相当困难的．我们将采用摄动展开

本文 1985 年 5 月 18 日收到．

的方法，分析对均匀模型的一个小非均匀偏离.

二、模型和假设

磁通量管浮出太阳表面以后，磁通量往往聚集在管中. 对于双极的结构，将呈磁弧的位形. 当磁弧大体不随时间变化时，它在太阳大气中保持平衡. 对于无力场的磁弧和磁拱，其内部的磁压起主导作用. 而在磁弧和磁拱的外边，气体的热力学压力为主. 在磁弧或磁拱的边界，应满足总压守恒条件，磁场强度发生间断. 所以，磁弧或磁拱的位形是太阳大气中的弧立磁结构模型.

无作用力磁场可以表示为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \alpha_1 \boldsymbol{B}, \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{2.2}$$

其中 α_1 为无力因子. 我们讨论线性无力场，这时 α_1 为常数. 磁弧的纵向尺度相对较长，在柱坐标系 (r, θ, z) 中，可以假设 $\partial/\partial z = 0$. 这样，磁拱结构可以用二维模型描述. 引进磁势函数 ψ，由 (2.2) 式可导出

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad B_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{2.3}$$

将 (2.3) 式代入 (2.1) 式. 对线性无力场，可得到

$$B_z = \alpha_1 \psi \tag{2.4}$$

和

$$\mathscr{L}(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \psi = 0. \tag{2.5}$$

这样，方程 (2.4) 和 (2.5) 就是磁拱内部所满足的关系式.

在磁拱外部的太阳大气中，满足静力学平衡关系

$$\nabla p = -\rho \boldsymbol{g}, \tag{2.6}$$

$\boldsymbol{g}$ 是太阳重力加速度. 若将重力方向取为 $-\boldsymbol{e}_\zeta$，则 (2.6) 式可导出

$$p(\zeta) = p_0(\zeta_0)\exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{g\,d\zeta}{\mathscr{R}T}\right], \tag{2.7}$$

其中 $\mathscr{R}$ 为气体常数，T 为太阳大气温度. 太阳日冕中，大气温度变化不大，可以取为常数. 这时，(2.7) 式可简化为

$$p(\zeta) = p_0(\zeta_0)\exp\left(-\frac{\zeta - \zeta_0}{h}\right), \tag{2.8}$$

其中的标高

$$h = \frac{\mathscr{R}T}{g}. \tag{2.9}$$

(2.8) 式就是磁拱外太阳大气中的静力学关系.

在磁拱的边界面 Γ_1 和 Γ_2 上，应该满足总压连续条件，即

$$\frac{1}{8\pi}(|\nabla\psi|^2 + \alpha_1^2\psi^2) = p(r,\theta). \tag{2.10}$$

二维的磁拱模型就由方程 (2.4)，(2.5)，(2.8) 以及边界条件 (2.10) 描述.

利用 ζ 与 (r,θ) 之间的关系,太阳大气的静力平衡条件 (2.8) 式可以写成

$$p(r,\theta)=p_0\exp\left(-\frac{r\sin\theta}{h}\right), \tag{2.11}$$

其中 $p_0=p(\zeta_0)$ 为常数. 这样,太阳大气的压力部分就是已知的. 问题就归结为在给定边界条件下求解方程 (2.5). 由于边界条件 (2.10) 式是非线性的,所以,自洽磁拱模型的数学问题也是非线性的,而且这类非线性问题的解还不唯一. 这就是求解自洽模型的困难所在.

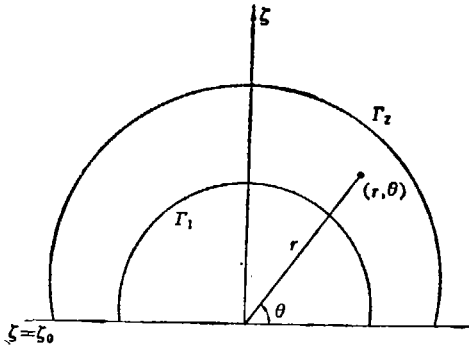

图 1 磁拱静力学平衡位形的示意图

引进无量纲量

$$R=\frac{r}{r_0},\quad H=\frac{h}{r_0},$$

$$P=\frac{p}{p_0},$$

$$\Psi=\frac{\phi}{r_0\sqrt{8\pi p_0}},$$

$$\alpha=\alpha_1 r_0, \tag{2.12}$$

其中 r_0 为问题的典型尺度,则磁拱的数学描述可以写为

$$\mathscr{L}(\Psi)=\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}+\alpha^2\Psi=0, \tag{2.13}$$

$$\Psi(R,0)=\Psi_0(R),\quad R_1\leqslant R\leqslant R_2, \tag{2.14}$$

$$\Psi(R,\pi)=\Psi_\pi(R),\quad R_3\leqslant R\leqslant R_4, \tag{2.15}$$

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right)^2+\alpha^2\Psi^2\right]_{\Gamma_i}=[\exp(-R\sin\theta/H)]_{\Gamma_i}\quad(i=1,2), \tag{2.16}$$

其中,磁通量守恒要求

$$\int_{R_1}^{R_2}\Psi_0(R)dR=\int_{R_3}^{R_4}\Psi_\pi(R)dR.$$

而且磁拱边界还需满足条件

$$\Psi(R,\theta)|_{\Gamma_i}=\Psi_i\ (\text{常数}),\quad i=1,2, \tag{2.17}$$

即磁拱边界为磁面. 不影响问题的实质而做简化,如果我们讨论对称模型,则条件 (2.15) 式可以改写成

$$\frac{\partial\Psi(R,\pi/2)}{\partial\theta}=0. \tag{2.18}$$

上述问题是一类自由边界问题,即边界 Γ_1 和 Γ_2 并非已知,而是要由条件 (2.16) 和 (2.17) 控制. 在某种意义上,这种边值类似于非线性水波的情形.

三、大标高近似

如果取日冕温度 $T_0\simeq 2\times10^6$ K,日冕拱的典型尺度 $r_0=10^9$ cm,则无量纲标高

$$H\simeq 6\gg 1.$$

在此情形下,自由边条件可近似地写为

$$\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right)^2\right]_{r_i}=1-\alpha^2\Psi_i^2 \qquad (i=1,2), \tag{3.1}$$

其中 Ψ_i 由纵向磁场的边界值确定. 总压守恒条件要求 $1-\alpha^2\Psi_i^2>0$.

我们先讨论一维问题，这时

$$\Psi(R,\theta)=\Psi_0(R). \tag{3.2}$$

在这种简单的情况下，条件 (2.14), (2.15), (2.17) 和 (2.18) 式皆满足，方程和边界条件可化简为非线性问题：

$$\frac{d^2\Psi_0}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d\Psi_0}{dR}+\alpha^2\Psi_0=0, \tag{3.3}$$

$$\left[\frac{d\Psi_0(R_i)}{dR}\right]^2+[\alpha\Psi_0(R_i)]^2=1 \qquad (i=1,2), \tag{3.4}$$

边界条件是非线性的. 线性方程 (3.3) 的通解为

$$\Psi_0(R)=a_1J_0(\alpha R)+a_2Y_0(\alpha R). \tag{3.5}$$

将解式 (3.5) 代入非线性边界条件 (3.4)，对于 $i=1$ 和 2，我们得到 a_1 和 a_2 满足的两个代数方程

$$[a_1J_1(\alpha R_1)+a_2Y_1(\alpha R_1)]^2+[a_1J_0(\alpha R_1)+a_2Y_0(\alpha R_1)]^2=\frac{1}{\alpha^2}, \tag{3.6}$$

$$[a_1J_1(\alpha R_2)+a_2Y_1(\alpha R_2]^2+[a_1J_0(\alpha R_2)+a_2Y_0(\alpha R_2)]=\frac{1}{\alpha^2}. \tag{3.7}$$

消去 (3.6) 和 (3.7) 式中的 a_1a_2 项，就导出联系 a_1^2 和 a_2^2 的方程

$$a_2^2=\frac{(A_1D-A_3)a_1^2+\frac{1}{\alpha^2}(1-D)}{A_4-A_2D}. \tag{3.8}$$

其中

$$\begin{aligned}
&A_1=J_0^2(\alpha R_1)+J_1^2(\alpha R_1),\quad A_2=Y_0^2(\alpha R_1)+Y_1^2(\alpha R_1),\quad A_3=J_0^2(\alpha R_2)+J_1^2(\alpha R_2),\\
&A_4=Y_0^2(\alpha R_2)+Y_1^2(\alpha R_2),\\
&A_5=\frac{A_1D-A_3}{A_4-A_2D},\quad A_6=\frac{1-D}{\alpha^2(A_4-A_2D)},\\
&D_1=J_0(\alpha R_1)Y_0(\alpha R_1)+J_1(\alpha R_1)Y_1(\alpha R_1),\\
&D_2=J_0(\alpha R_2)Y_0(\alpha R_2)+J_1(\alpha R_2)Y_1(\alpha R_2),\\
&D=\frac{D_2}{D_1}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

利用这些系数关系，(3.8) 式可缩写成

$$a_2^2=A_5a_1^2+A_6. \tag{3.10}$$

将 (3.10) 式代入 (3.6) 式，我们就得到 a_1 的方程为

$$\begin{aligned}
&[(A_1+A_2A_5)^2-4D_1^2A_5]a_1^4+\left[2(A_1+A_2A_5)\left(A_2A_6-\frac{1}{\alpha^2}\right)-4D_1^2A_6\right]a_1^2\\
&+\left(A_2A_6-\frac{1}{\alpha^2}\right)^2=0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

方程 (3.11) 可得出 a_1 的四个根

$$a_1 = \pm \left\{ \frac{A_8 \pm \sqrt{A_8^2 - A_7\left(A_2A_6 - \frac{1}{\alpha^2}\right)^2}}{A_7} \right\}^{1/2}, \tag{3.12}$$

其中记

$$A_7 = (A_1 + A_2A_5)^2 - 4D_1^2A_5,$$
$$A_8 = (A_1 + A_2A_5)\left(A_2A_6 - \frac{1}{\alpha^2}\right) - 4D_1^2A_6. \tag{3.13}$$

将每一个 a_1 的根代入 (3.8) 式,可得到两个 a_2 的解,它们大小相等,但差一符号. 这样,我们就得到八对 a_1 和 a_2 的解,但其中的四对仅与另四对相差一符号;它们表示磁场的方向恰好相反,而大小相同. 若不计方向的差别,约束磁拱可以有四种不同的位形.

将解 (3.5) 式代入 (2.3) 和 (2.4) 式,磁场分布就可表示为:

$$B_r = 0, \tag{3.14}$$
$$B_\theta = \alpha[a_1J_1(\alpha R) + a_2Y_1(\alpha R)], \tag{3.15}$$
$$B_z = \alpha[a_1J_0(\alpha R) + a_2Y_0(\alpha R)]. \tag{3.16}$$

应该指出,上述解式 (3.5) 在 $\alpha = 0$ 时不再成立. 这时,方程 (3.3) 和边界条件 (3.4) 化为

$$\frac{d^2\Psi_0(R)}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d\Psi_0(R)}{dR} = 0, \tag{3.17}$$
$$\frac{d\Psi_0(R_i)}{dR} = \pm 1 \qquad (i = 1, 2). \tag{3.18}$$

不难得到方程 (3.17) 的通解为:

$$\Psi_0(R) = a_1 + a_2\ln R. \tag{3.19}$$

容易看出,通解 (3.19) 式不可能同时满足 (3.18) 式所要求的两个边界条件. 这表明,势场位形的自由边界条件不可能是圆弧形.

四、非均匀磁拱

上节所讨论的均匀磁拱只是很特殊的情况. 在大多数情况下,磁拱的截面以及内部的磁场分布都是非均匀的,应该由 (R, θ) 两个自变量来描述. 从物理观点看,即使对于较大的标高 H,太阳大气中的压力也是随 (R, θ) 而变化的,这就需要调节磁拱的形状和内部磁场的位形. 相应地,磁场分布也会偏离均匀磁拱的状态.

我们取小参数

$$\varepsilon = \frac{1}{H} \ll 1, \tag{4.1}$$

磁势函数可以表示为

$$\Psi(R, \theta) = \Psi_0(R) + \varepsilon\Psi^{(1)}(R, \theta), \tag{4.2}$$

磁拱外的太阳大气压力则为:

$$P(R, \theta) = 1 - \varepsilon R\sin\theta. \tag{4.3}$$

这时，磁拱的内外边界亦偏离圆弧而变为

$$R = R_i + \varepsilon S_i(\theta) \qquad (i = 1, 2). \tag{4.4}$$

由 $\Psi_1(R, \theta)$ 的分布可以了解非均匀磁拱的性质.

先讨论非线性边值条件 (2.16) 式. 利用 (4.2)—(4.4) 式，该条件可以表示为:

$$\left[\frac{d\Psi_0(R_i)}{dR}\right]^2 + \alpha^2\Psi_i^2 + 2\varepsilon\left\{\frac{d\Psi_0(R_i)}{dR}\left[\frac{d^2\Psi_0(R_i)}{dR^2}S_i(\theta) + \frac{\partial\Psi^{(1)}(R_i, \theta)}{\partial R}\right] + \alpha^2\Psi_i\Psi^{(1)}(R_i, \theta)\right\}$$
$$= 1 - \varepsilon R_i \sin\theta + O(\varepsilon^2) \qquad (i = 1, 2). \tag{4.5}$$

利用均匀解条件 (3.8) 和 (3.9) 式，边界条件 (2.17) 式要求

$$\Psi^{(1)}(R_i, \theta) = -\frac{d\Psi_0(R_i)}{dR}S_i(\theta) \qquad (i = 1, 2). \tag{4.6}$$

进一步考虑到 (3.4) 和 (4.6) 式，边界条件 (4.5) 式给出

$$\frac{\partial\Psi^{(1)}(R_i, \theta)}{\partial R} = -\frac{d^2\Psi_0(R_i)}{dR^2}S_i(\theta) - \frac{R_i}{2\dfrac{d\Psi_0(R_i)}{dR}}\sin\theta \qquad (i = 1, 2). \tag{4.7}$$

将上述关系代入方程 (2.13)，并利用边界条件 (2.14) 和 (2.18) 式，我们得到

$$\mathscr{L}[\Psi^{(1)}(R, \theta)] = 0, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial\Psi^{(1)}(R, \pi/2)}{\partial\theta} = 0, \tag{4.9}$$

$$\Psi^{(1)}(R, 0) = 0. \tag{4.10}$$

这样，非均匀解问题就化为求解方程 (4.8) 和边界条件 (4.9)，(4.10) 和 (4.7) 式. 要指出的是，边界条件 (4.7) 式是给在 $R = R_i$ 上，而不是给在待定边界 $R = R_i + \varepsilon S_i(\theta)$ 上. 非零边条件 (4.7) 式中包含两个待定函数 $S_i(\theta)$，它们由 (4.6) 式列出的两个条件确定.

根据条件 (4.9) 和 (4.10) 式，非均匀解 $\Psi^{(1)}(R, \theta)$ 可以表示为:

$$\Psi^{(1)}(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(R)\sin[(2n + 1)\theta]. \tag{4.11}$$

由方程 (4.8)，不难得到通解

$$A_n(R) = a_{1n}J_{2n+1}(\alpha R) + a_{2n}Y_{2n+1}(\alpha R). \tag{4.12}$$

由此导出非均匀解为:

$$\Psi^{(1)}(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}[a_{1n}J_{2n+1}(\alpha R) + a_{2n}Y_{2n+1}(\alpha R)]\sin[(2n + 1)\theta]. \tag{4.13}$$

将 (4.4) 式中的函数 $S_i(\theta)$ 展开为:

$$S_i(\theta) = \sum s_{in}\sin[(2n + 1)\theta], \tag{4.14}$$

其中 s_{in} 为待定系数. 这样，边条件 (4.6) 式可导出两个条件

$$J_{2n+1}(\alpha R_1)a_{1n} + Y_{2n+1}(\alpha R_1)a_{2n} = \alpha[a_1J_1(\alpha R_1) + a_2Y_1(\alpha R_1)]s_{1n}, \tag{4.15}$$

$$J_{2n+1}(\alpha R_2)a_{1n} + Y_{2n+1}(\alpha R_2)a_{2n} = \alpha[a_1J_1(\alpha R_2) + a_2Y_2(\alpha R_2)]s_{2n}. \tag{4.16}$$

关系式 (4.15) 和 (4.16) 给出待定系数 a_{in} 与 s_{in} 之间的联系，它们是

$$a_{1n} = f_{1n}s_{1n} + f_{2n}s_{2n}, \tag{4.17}$$

$$a_{2n} = f_{3n}s_{1n} + f_{4n}s_{2n}, \tag{4.18}$$

其中的系数

$$f_{1n}=\frac{\alpha}{f_n}[a_1J_1(\alpha R_1)+a_2Y_1(\alpha R_1)]Y_{2n+1}(\alpha R_2),$$

$$f_{2n}=-\frac{\alpha}{f_n}[a_1J_1(\alpha R_2)+a_2Y_1(\alpha R_2)]Y_{2n+1}(\alpha R_1),$$

$$f_{3n}=-\frac{\alpha}{f_n}[a_1J_1(\alpha R_1)+a_2Y_1(\alpha R_1)]J_{2n+1}(\alpha R_2),$$

$$f_{4n}=\frac{\alpha}{f_n}[a_1J_1(\alpha R_2)+a_2Y_1(\alpha R_2)]J_{2n+1}(\alpha R_1),$$

$$f_n=J_{2n+1}(\alpha R_1)Y_{2n+1}(\alpha R_2)-J_{2n+1}(\alpha R_2)Y_{2n+1}(\alpha R_1). \tag{4.19}$$

再由边界条件 (4.7) 式，经过适当的运算，就可导出确定系数 s_{in} 的方程:

$$\{[J_{2n}(\alpha R_i)-J_{2n+2}(\alpha R_i)]f_{1n}+[Y_{2n}(\alpha R_i)-Y_{2n+2}(\alpha R_i)]f_{3n}\}s_{1n}$$
$$+\{[J_{2n}(\alpha R_i)-J_{2n+2}(\alpha R_i)]f_{2n}+[Y_{2n}(\alpha R_i)-Y_{2n+2}(\alpha R_i)]f_{4n}\}s_{2n}$$
$$+\alpha[a_1J_2(\alpha R_i)+aY_2(\alpha R_i)-\Psi_i]s_{in}=\frac{R_i\delta_{0n}}{\alpha^2[a_1J_1(\alpha R_i)+a_2Y_1(\alpha R_i)]}\qquad(i=1,2), \tag{4.20}$$

其中 $\delta_{0n}=1$，若 $n=0$；$\delta_{0n}=0$，若 $n\geqslant 1$. 由这两个关系立即导出

$$s_{in}=0,\ \text{若}\ n\geqslant 1\qquad(i=1,2), \tag{4.21}$$

而非零系数 s_{10} 和 s_{20} 的方程就简化为

$$\{f_{10}[J_0(\alpha R_i)-J_2(\alpha R_i)]+f_{30}[Y_0(\alpha R_i)-Y_2(\alpha R_i)]\}s_{10}$$
$$+\{f_{20}[J_0(\alpha R_i)-J_2(\alpha R_i)]+f_{40}[Y_0(\alpha R_i)-Y_2(\alpha R_i)]\}s_{20}$$
$$+\alpha[a_1J_2(\alpha R_i)+a_2Y_2(\alpha R_i)-\Psi_i]s_{i0}=\frac{R_i}{\alpha^2[a_1J_1(\alpha R_i)+a_2Y_1(\alpha R_i)}\qquad(i=1,2). \tag{4.22}$$

由此定出 s_{10} 和 s_{20} 为:

$$s_{10}=\frac{d_5d_4-d_6d_2}{d_1d_4-d_2d_3}, \tag{4.23}$$

$$s_{20}=\frac{d_1d_6-d_3d_5}{d_1d_4-d_2d_3}, \tag{4.24}$$

其中

$$d_1=[J_0(\alpha R_1)-J_2(\alpha R_1)]f_{10}+[Y_0(\alpha R_1)-Y_2(\alpha R_1)]f_{30}+\alpha[a_1J_1(\alpha R_1)$$
$$+a_2Y_1(\alpha R_1)-\Psi_1],$$
$$d_2=[J_0(\alpha R_1)-J_2(\alpha R_1)]f_{20}+[Y_0(\alpha R_1)-Y_2(\alpha R_1)]f_{40},$$
$$d_3=[J_0(\alpha R_2)-J_2(\alpha R_2)]f_{10}+[Y_0(\alpha R_2)-Y_2(\alpha R_2)]f_{30},$$
$$d_4=[J_0(\alpha R_2)-J_2(\alpha R_2)]f_{20}+[Y_0(\alpha R_2)-Y_2(\alpha R_2)]f_{40}+\alpha[a_1J_2(\alpha R_2)$$
$$+a_2Y_1(\alpha R_2)-\Psi_2],$$
$$d_5=\frac{R_1}{\alpha^2[a_1J_1(\alpha R_1)+a_2Y_1(\alpha R_1)]},$$
$$d_6=\frac{R_2}{\alpha^2[a_1J_1(\alpha R_2)+a_2Y_1(\alpha R_2)]}. \tag{4.25}$$

这样，非均匀解就表示为：

$$\Psi^{(1)}(R,\theta) = [(f_{10}s_{10} + f_{20}s_{20})J_1(\alpha R) + (f_{30}s_{10} + f_{40}s_{20})Y_1(\alpha R)]\sin\theta. \tag{4.26}$$

应该指出的是，由 (4.2) 式所定义的磁势函数 $\Psi(R,\theta)$ 其定义域为：

$$R_1 + \varepsilon s_1 \leqslant R \leqslant R_2 + \varepsilon s_2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{4.27}$$

因此，不仅非均匀磁势 $\Psi^{(1)}(R,\theta)$，而且均匀磁势 $\Psi_0(R)$，都应该有相同的定义域 (4.27) 式. 前一节所得到的均匀解是定义在区域

$$R_1 \leqslant R \leqslant R_2 \tag{4.28}$$

之中. 这就需要将函数 $\Psi_0(R)$ 从区域 (4.28) 式延拓到区域 (4.27) 中. 对于线性问题，显然是不难做到的.

五、渐近情况

为了更好地理解弧立磁拱的性质，我们讨论两种渐近情况，这时的解可以分析给出.

1. 胖拱近似

当拱的宽度 $R_2 - R_1$ 远大于内径 R_1 时，就是胖拱. 具体地，我们假设

$$(\alpha R_1)^2 \ll (\alpha R_2)^2 = O(1). \tag{5.1}$$

这时，小宗量 αR_1 的 Bessel 函数可以近似地用其渐近展开的主要项表示，诸如

$$J_0(\alpha R_1) = 1 - \frac{(\alpha R_1)^2}{4} + \cdots, \quad J_1(\alpha R_1) = \frac{(\alpha R_1)}{2} + \cdots,$$

$$Y_0(\alpha R_1) = \frac{2}{\pi}(\ln \alpha R_1 - 0.11593) + \cdots,$$

等等. 根据 (3.9) 和 (3.13) 式就可以求出系数 A_i 和 D_i，进而得到

$$a_1 \simeq \pm \frac{1}{\alpha\sqrt{A_3}}, \tag{5.2}$$

再由 (3.10) 式可导出

$$a_2 \simeq \pm \frac{\pi a}{2}(\alpha R_1), \tag{5.3}$$

其中 a 为量级为 1 的系数，其定义为

$$a = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{4}{\pi}\frac{\ln \alpha R_1 - 0.61593}{D_2} - \left(1 + \frac{1}{A_3}\right)\right]^{1/2}. \tag{5.4}$$

由解式 (3.5) 就得到

$$\Psi_0(R) = \pm\left[\frac{1}{\alpha}\frac{J_0(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_2) + J_1^2(\alpha R_2)}} \pm \frac{\pi a}{2}(\alpha R_1)Y_0(\alpha R)\right]. \tag{5.5}$$

不难看出，解式 (5.5) 右端第二项只在 $R = R_1$ 附近才有贡献. 在 $R = R_2$ 附近，解式 (5.5) 可近似地写成

$$\Psi_0(R) \simeq \pm \frac{1}{\alpha}\frac{J_0(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_2) + J_1^2(\alpha R_2)}}. \tag{5.6}$$

这个解就是 $R_1 \to 0$ 时的解，我们将在另文中仔细分析[9].

进一步，可类似地分析二维解 (4.26) 式. 在胖拱近似条件下，由 (4.19) 式求出 f_{kn}，由 (4.25) 式求出 d_k，再由 (4.23) 和 (4.24) 式定出 s_{10} 和 s_{20}. 利用这些结果，经过一些运算可导

出

$$\Psi^{(1)}(R,\theta)=\frac{R_2}{S}\left[\frac{J_1(\alpha R)}{(\alpha R_1)}+\pi Y_1(\alpha R)\right]\sin\theta, \tag{5.7}$$

其中的系数 S 为

$$S=\pi\alpha^2 a J_1(\alpha R_2)Y_1(\alpha R_2)\left[\frac{J_0(\alpha R_2)-J_2(\alpha R_2)}{J_1(\alpha R_2)}+\frac{1}{2}\frac{Y_0(\alpha R_2)-Y_2(\alpha R_2)}{Y_1(\alpha R_2)}\right]. \tag{5.8}$$

解式 (5.7) 表明，$Y_1(\alpha R)$ 项的贡献主要在 $R=R_1$ 附近；当 $R\gg R_1$ 时，$J_1(\alpha R)$项的贡献为主.

如果我们主要关心 $R\gg R_1$ 区域中的解，利用 (5.6) 和 (5.8) 式，解式 (4.2) 可表示为

$$\Psi(R,\theta)=\pm\frac{1}{\alpha}\frac{J_0(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_2)+J_1^2(\alpha R_2)}}+\frac{\varepsilon R_2}{\alpha R_1 S}J_1(\alpha R)\sin\theta. \tag{5.9}$$

相应的磁场分布为

$$\begin{aligned}
B_r&=\left(\frac{\varepsilon R_2}{\alpha R_1 S}\right)\frac{J_1(\alpha R)}{R}\cos\theta,\\
B_\theta&=\mp\frac{J_1(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_2)+J_1^2(\alpha R_2)}}+\varepsilon\frac{R_2}{2R_1 S}[J_0(\alpha R)-J_2(\alpha R)]\sin\theta,\\
B_z&=\pm\frac{J_0(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_2)+J_1^2(\alpha R_2)}}+\varepsilon\frac{R_2}{R_1 S}J_1(\alpha R)\sin\theta,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

利用磁场分布 (5.10) 式，由磁力线方程

$$\frac{dR}{B_r}=\frac{Rd\theta}{B_\theta}=\frac{dz/r_0}{B_z}, \tag{5.11}$$

可导出磁力线的轨迹. 例如，由 (5.11) 式的前一等式得到积分关系

$$R=R_0-\varepsilon\frac{R_2}{\alpha R_1 S}\sqrt{J_0^2(\alpha R_2)+J_1^2(\alpha R_2)}\sin\theta. \tag{5.12}$$

这表明，在平面 $z=$常数中，磁力线不再是半圆线，而是在半圆之外 ($\varepsilon/s<0$) 或半圆之内 ($\varepsilon/s>0$). 这个结果与假设 (4.4) 式一致.

2. 瘦拱近似

当 $R_2-R_1\ll R_1$ 时，就得到瘦拱近似. 这时，我们不妨记

$$R_1=R_2-\Delta,\quad \Delta\ll 1. \tag{5.13}$$

先考虑均匀解 (3.5) 式，它应满足两个边界条件 (3.4) 式，分别对应于 $R=R_1$ 和 R_2. 将 (5.13) 式代入 $R=R_1$ 的边条件 (3.4) 式，不难导出

$$\left[\frac{d\Psi_0(R_2)}{dR}\right]^2+[\alpha\Psi(R_2)]^2-2\Delta\frac{d\Psi_0(R_2)}{dR}\left[\frac{d^2\Psi_0(R_2)}{dR^2}+\alpha^2\Psi_0(R_2)\right]+O(\Delta^2)=1. \tag{5.14}$$

利用 $R=R_2$ 的边值条件，

$$\left[\frac{d\Psi_0(R_2)}{dR}\right]^2+\alpha^2\Psi_0^2(R_2)=1. \tag{5.15}$$

(5.14) 式即导出

$$\frac{d\Psi_0(R_2)}{dR}\left[\frac{d^2\Psi_0(R_2)}{dR^2}+\alpha^2\Psi_0(R_2)\right]=0. \tag{5.16}$$

不难证明，对于解式 (3.5)，由 (5.16) 式导出的两个关系式

$$\frac{d\Psi_0(R_2)}{dR} = 0 \tag{5.17}$$

和

$$\frac{d^2\Psi_0(R_2)}{dR^2} + \alpha^2\Psi_0(R_2) = 0 \tag{5.18}$$

是等价的. 这样,由边界条件(5.15)和(5.17)式就求出系数 a_1 和 a_2, 相应的解 (3.5) 可表为:

$$\Psi_0(R) = \pm \frac{1}{\alpha} \frac{Y_1(\alpha R_2)J_0(\alpha R) - J_1(\alpha R_2)Y_0(\alpha R)}{J_0(\alpha R_2)Y_1(\alpha R_2) - J_1(\alpha R_2)Y_0(\alpha R_2)}. \tag{5.19}$$

再进一步分析非均匀解 (4.13). 如果限于考虑等压大气的情况,利用关系 (5.13) 式作展开,则两个边界条件 (4.7) 式化为

$$\Psi^{(1)}(R_2, \theta) = 0, \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial\Psi^{(1)}(R_2,\theta)}{\partial R} = -\frac{d^2\Psi_0(R_2)}{dR^2} s_1(\theta). \tag{5.21}$$

由此可求出系数 a_{1n} 和 a_{2n}, 并将解 (4.13) 式表示为

$$\Psi^{(1)}(R,\theta) = \pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_{2n+1}(\alpha R_2)J_{2n+1}(\alpha R) - J_{2n+1}(\alpha R_2)Y_{2n+1}(\alpha R)}{J_{2n+1}(\alpha R_2)Y_{2n+2}(\alpha R_2) - Y_{2n+1}(\alpha R_2)J_{2n+2}(\alpha R_2)} s_{1n} \sin[(2n+1)\theta]. \tag{5.22}$$

类似地,我们可以讨论瘦拱的许多特性.

从电动力学的概念可知, 一个瘦环在真空介质中通电流后,要受径向 Lorentz 力而运动, 难于维持平衡. 对于瘦拱也应有类似的情况. 条件 (5.17) 式表明, 瘦拱的电流基本上是沿着 z 轴方向,环向的磁通量甚少.

六、小　结

约束磁场的概念在天体物理中经常采用,它不仅受到观测的支持,而且避免了无界无力场模型引进的许多数学上的不确定性.

约束磁通量问题的一个主要特点是, 其数学描述为非线性自由边值问题. 这类问题的求解是比较复杂的. 本文分析了一类特定的磁拱位形,即对均匀磁拱的弱非均匀偏离,并且具体地讨论了胖拱和瘦拱两种近似情况.

磁拱位形延伸于 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 的空间. 类似的方法, 若将定义空间开拓到 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, 则可用于日珥的无力场模型. 这种日珥模型是约束于太阳大气之中.

一般而言,要完整地求解一般的非线性自由边界问题, 需要采用数值计算的方法来求解. 相应的结果将在另文中讨论.

参　考　文　献

[1] Beckers, J. M., Schorter, E. H., *Solar Phys.*, **4**(1968), 142, 165.

[2] Howard, R., Stenflo, J. O., *ibid.*, **22**(1972), 402.

[3] Frazier, E. N., Stenflo, J. O., *ibid.*, **27**(1972), 330.

[4] Cheng, C. C., *Astrophys. J.*, **238**(1980), 743.

[5] Sheeley, N. R., *Solar Phys.*, **66**(1980), 79.

[6] Cheng, C. C. et al., *ibid.*, **66**(1980), 259.

[7] Parker, E. N., *Cosmical Magnetic Field*, ch. 6, 7, Clarendon Press, 1979.

[8] 胡文瑞, 空间科学学报, **1**(1981), 93.

[9] 李建国、胡文瑞,天文学报,**27**(1986),3: 254.