中 国 科 学
1983 年 1 月　　A 辑　　第 1 期

正规族与微分多项式

杨　乐
（中国科学院数学研究所，北京）

摘　要

设 n, k 为二正整数，且 $n \geq k+4$；a 为一有穷非零复数．又设 $\mathscr{F}$ 为域 D 内的一族亚纯函数，$\alpha_j(z)(j=1, 2, \cdots, k-1)$ 于 D 内全纯．若对于任意 $f(z) \in \mathscr{F}$，$f^{(k)}(z)+\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j(z)f^{(j)}(z)-af(z)^n$ 在 D 内不取一个有穷值（或有一重级 $\geq \left[\frac{n}{n-(k+3)}\right]+1$ 的重值），$f(z)$ 有一个有穷非零的 $k+1$ 级重值，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规．

一、引　言

在亚纯函数正规族理论中，寻求新的正规定则是一个重要问题．Montel 和 Miranda 曾引进所论函数的导数，建立了下述定则．

(A) 设 $\mathscr{F}$ 为域 D 中的亚纯函数族．若对于每个 $f(z) \in \mathscr{F}$ 有 $f(z) \neq 0, \infty$，$f^{(k)}(z) \neq 1$，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规．

稍后，Valiron 与庄圻泰[1]用 $f(z)$ 的一次微分多项式代替定则 (A) 中的 $f^{(k)}(z)$，证明了相应的结果．Drasin[2] 与顾永兴[3]继续了这方面的研究．

另一方面，Hayman[4] 证明了

(B) 设 $f(z)$ 于开平面超越亚纯，$n \geq 5$，$a \neq 0, \infty$，则 $f'(z)-af(z)^n$ 取所有有穷复数无穷多次．

根据 Bloch[5] 法则与 (B)，他进而猜想下述命题[6]成立．

(C) 设 $\mathscr{F}$ 为 D 内的亚纯函数族，$n \geq 5$，a，b 为二有穷复数且 $a \neq 0$．若对于每个 $f(z) \in \mathscr{F}$，$f'(z)-af(z)^n \neq b$，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规．

本文考虑较为一般形式的微分多项式 $f^{(k)}(z)+\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i(z)f^{(i)}(z)-af(z)^n (n \geq k+4)$ 的取值与正规族之间的联系，主要结果已如摘要所述．当 $k=1$ 时，若对于每个 $f(z) \in \mathscr{F}$ 附加有一个完全重值的条件，则 Hayman 的猜想 (C) 获得了证实．

二、两个引理

为了获得正规定则，我们先要建立相应的基本不等式．

引理 1. 设 n, k 为二正整数，且 $n \geq k+4$；a, b 为二有穷复数，$a \neq 0$．又设在 $|z|<R$

本文 1981 年 10 月 9 日收到．

$(0 < R \leqslant \infty)$ 内，$f(z)$ 亚纯，$\alpha_j(z)(j = 1, 2, \cdots, k-1)$ 全纯．若记

$$f_k(z) = f^{(k)}(z) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j(z) f^{(j)}(z), \tag{2.1}$$

$$\phi(z) = \frac{f_k(z) - b}{a(f(z)+1)^n}, \tag{2.2}$$

且 $\phi(0) \neq 0, \infty$，则

$$\{n - (k+1)\}T(r,f) \leqslant T(r,\phi) - N_0(r) + m\left(r, \frac{f_k}{f+1}\right) + \log\frac{1}{|\phi(0)|} + \log^+\frac{1}{|a|} + \log^+|b| + (n+2)\log 2, \tag{2.3}$$

其中 $N_0(r)$ 为相应于 $n_0(r)$ 的密指量，而 $n_0(r)$ 为 $|z| \leqslant r$ 内 $f_k(z) - b$ 的零点且非 $f(z)+1$ 的零点的数目，按照它在 $f_k(z) - b$ 内的重级计算．

证．由(2.2)式易于看出，当 $\phi(z)$ 的零点由 $f(z)$ 的极点生成时，则其重级不低于 $n - (k+1)$．$f_k(z) - b$ 的零点且非 $f(z)+1$ 的零点，亦必生成 $\phi(z)$ 的零点．于是

$$N\left(r, \frac{1}{\phi}\right) \geqslant \{n - (k+1)\}N(r, f) + N_0(r). \tag{2.4}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} n \cdot m(r, f) &\leqslant n\{m(r, f+1) + \log 2\} \\ &= m(r, (f+1)^n) + n\log 2 \\ &\leqslant m\left(r, \frac{1}{\phi}\right) + m(r, f_k - b) + \log^+\frac{1}{|a|} + n\log 2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

然而

$$m\left(r, \frac{1}{\phi}\right) = T(r, \phi) - N\left(r, \frac{1}{\phi}\right) + \log\frac{1}{|\phi(0)|},$$

$$\begin{aligned} m(r, f_k - b) &\leqslant m(r, f_k) + \log^+|b| + \log 2 \\ &\leqslant m(r, f+1) + m\left(r, \frac{f_k}{f+1}\right) + \log^+|b| + \log 2 \\ &\leqslant m(r, f) + m\left(r, \frac{f_k}{f+1}\right) + \log^+|b| + 2\log 2. \end{aligned}$$

将以上两式代入(2.5)式，再与(2.4)式联合，即得(2.3)式．

引理 2. 在引理 1 的条件与记号下，并设 $\phi(0) \neq 1$，$\phi'(0) \neq 0$，则

$$\{n - (k+3)\}T(r, f) < \bar{N}\left(r, \frac{1}{\phi - 1}\right) + S(r, f, \phi), \tag{2.6}$$

其中

$$\begin{aligned} S(r, f, \phi) = {} & m\left(r, \frac{f_k}{f+1}\right) + m\left(r, \frac{\phi'}{\phi}\right) + m\left(r, \frac{\phi'}{\phi - 1}\right) \\ & + \frac{1}{n}\log\frac{1}{|f_k(0) - b|} + \frac{1}{n}\log|\phi(0)| + \log\left|\frac{\phi(0) - 1}{\phi'(0)}\right| \\ & + \log^+\frac{1}{|a|} + 2\log^+|b| + (n+2)\log 2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

证. 类似于 Hayman[4] 的记号与讨论，以 $n_1(r)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 内既是 $f_k(z)-b$ 的零点，同时又是 $f(z)+1$ 的零点与 $\phi(z)$ 的极点的数目，按照它们在 $f_k(z)-b$ 内的零点重级计算次数；以 $n_2(r)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 内既是 $f_k(z)-b$ 的零点同时又是 $f(z)+1$ 的零点与 $\phi(z)$ 的零点的数目，也按照它们在 $f_k(z)-b$ 内的零点重级计算. 相应的密指量分别记为 $N_1(r)$ 与 $N_2(r)$.

在上述记号下有

$$n\bar{N}(r,\ \phi)\leqslant N(r,\ \phi)+N_1(r). \tag{2.8}$$

事实上，若 z_0 为 $f(z)+1$ 的零点且非 $f_k(z)-b$ 的零点，则 z_0 必为 $\phi(z)$ 的极点，且重级 $\geqslant n$. 若 z_0 为 $f_k(z)-b$ 的 l 级零点，且同时是 $f(z)+1$ 的 p 级零点与 $\phi(z)$ 的极点，则 z_0 在 $\bar{n}(r,\ \phi)$ 中计算 1 次，在 $n(r,\ \phi)$ 中计算 $pn-l$ 次，在 $n_1(r)$ 中计算 l 次. 除去上述两种情况，$\phi(z)$ 没有其他极点. 于是(2.8)式成立.

关于 $\phi(z)$ 的零点，我们有

$$\{n-(k+1)\}\bar{N}\left(r,\ \frac{1}{\phi}\right)\leqslant N\left(r,\ \frac{1}{\phi}\right)+\{n-(k+2)\}N_0(r)+\frac{n-(k+1)}{n}N_2(r). \tag{2.9}$$

事实上，若 z_0 为 $f(z)$ 的极点，则它是 $\phi(z)$ 的零点，重级不低于 $n-(k+1)$. 若 z_0 为 $f_k(z)-b$ 的零点，而不是 $f(z)+1$ 的零点，则它在 $n\left(r,\ \frac{1}{\phi}\right)$ 内至少计算 1 次，在 $n_0(r)$ 中也至少计算 1 次. 若 z_0 为 $f_k(z)-b$ 的零点，同时又是 $f(z)+1$ 的零点与 $\phi(z)$ 的零点，则 $f_k(z)-b$ 必以 z_0 为重级大于 n 的零点. 除去上述三种情况，$\phi(z)$ 没有其他零点. 于是(2.9)式成立.

应用 Nevanlinna 第二基本定理于 $\phi(z)$ 和 0，1，∞ 三个复数，

$$T(r,\ \phi)\leqslant\bar{N}(r,\ \phi)+\bar{N}\left(r,\ \frac{1}{\phi}\right)+\bar{N}\left(r,\ \frac{1}{\phi-1}\right)+S(r,\ \phi), \tag{2.10}$$

其中

$$S(r,\ \phi)=m\left(r,\ \frac{\phi'}{\phi}\right)+m\left(r,\ \frac{\phi'}{\phi-1}\right)+\log\left|\frac{\phi(0)(\phi(0)-1)}{\phi'(0)}\right|+\log 2. \tag{2.11}$$

将(2.8)，(2.9)式代入(2.10)式，有

$$\left\{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n-(k+1)}\right\}T(r,\ \phi)\leqslant\bar{N}\left(r,\ \frac{1}{\phi-1}\right)+\left\{1-\frac{1}{n-(k+1)}\right\}N_0(r)+\frac{1}{n}\{N_1(r)+N_2(r)\}+\frac{1}{n-(k+1)}\log\frac{1}{|\phi(0)|}+S(r,\ \phi).$$

再将(2.3)式代入上式得

$$\{n-(k+1)\}\left\{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n-(k+1)}\right\}T(r,f)\leqslant\bar{N}\left(r,\ \frac{1}{\phi-1}\right)+\frac{1}{n}\{N_0(r)+N_1(r)+N_2(r)\}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\log\frac{1}{|\phi(0)|}+\log^+\frac{1}{|a|}+\log^+|b|+n\log 2+S(r,\ \phi). \tag{2.12}$$

注意

$$N_0(r)+N_1(r)+N_2(r)\leqslant N\left(r,\ \frac{1}{f_k-b}\right)$$

$$\leqslant T(r,f_k)+\log^+|b|+\log 2+\log\frac{1}{|f_k(0)-b|}$$

$$\leqslant (k+1)T(r,f)+m\left(r,\ \frac{f_k}{f+1}\right)+\log^+|b|+2\log 2+\log\frac{1}{|f_k(0)-b|}.$$

将此估计式代入(2.12)式,整理后即得(2.6)与(2.7)式.

三、界 圈 引 理

在本节里,我们要将引理 2 中的余项作妥善的处理. 为此,先叙述两个已知结果.

引理 3. (熊庆来[8]). 设 $f(z)$ 在 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内亚纯, k 为一正整数. 若 $f(0)\neq 0,\ \infty$, 则对于 $0<r<\rho<R$, 有

$$m\left(r,\ \frac{f^{(k)}}{f}\right)<C\left\{1+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}\right.$$

$$\left.+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+T(\rho,\ f)\right\},\tag{3.1}$$

其中 C 为仅依赖于 k 的正常数.

引理 4[9,24-25]. 设 $U(r)$ 在 $[R_1,\ R_2](0<R_1<R_2<\infty)$ 内非负,非减; $a,\ b$ 为二正数适合 $b>(a+2)^2$. 若对于任意的 $r,\ \rho,\ R_1<r<\rho<R_2$ 都有

$$U(r)<a\left\{\log^+U(\rho)+\log\frac{\rho}{\rho-r}\right\}+b,$$

则有

$$U(r)<2a\log\frac{R_2}{R_2-r}+2b.$$

现在我们证明

引理 5. 设 $n,\ k$ 为二正整数, 且 $n\geqslant k+4$; $a,\ b$ 为二有穷复数,且 $a\neq 0$. 又设在 $|z|\leqslant R(0<R<\infty)$ 上 $f(z)$ 亚纯, $\alpha_j(z)(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$ 全纯, $f_k(z)$ 与 $\phi(z)$ 由 (2.1) 与 (2.2) 式给出. 若 $f_k(z)-a(f(z)+1)^n\neq b,\ f(0)\neq -1,\ \infty;\ f_k(0)\neq b;$ $f_k'(0)(f(0)+1)-nf'(0)(f_k(0)-b)\neq 0$, 则当 $0<r<R$ 时有

$$T(r,\ f)<C^*\left\{1+B+\log\frac{R}{R-r}\right\},\tag{3.2}$$

其中 C^* 为仅依赖于 n 和 k 的正常数,而

$$B=\log^+R+\log^+\frac{1}{R}+\sum_{j=1}^{k-1}m(R,\alpha_j)+\log^+|f(0)|+\log^+|f^{(k)}(0)|$$

$$+\log^+\frac{1}{|f(0)+1|}+\log^+\frac{1}{|f_k(0)-b|}$$

$$+\log^+\frac{1}{|f_k'(0)(f(0)+1)-nf'(0)(f_k(0)-b)|}+\log^+|a|$$

$$+\log^+\frac{1}{|a|}+\log^+|b|. \tag{3.3}$$

证. 在引理的假设下容易看出，$\phi(0)\neq 0, 1, \infty$；$\phi'(0)\neq 0$，于是可以应用引理 2. 以下对由(2.7)式所确定的余项进行估计.

由 $\phi(z)$ 的表达式(2.2)有

$$\frac{\phi'}{\phi}=\frac{f_k'}{f_k-b}-n\frac{f'}{f+1},$$

$$\frac{\phi'}{\phi-1}=\frac{f_k'-na(f+1)^{n-1}f'}{f_k-b-a(f+1)^n}-n\frac{f'}{f+1}.$$

对于任意一对正数 r, ρ；$0<r<\rho<R$，取 $\rho'=\frac{r+\rho}{2}$，则由 Nevanlinna 引理[7]（或上述引理 3）有

$$m\left(r,\frac{\phi'}{\phi}\right)<C\left\{1+\log^+\rho'+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho'-r}+\log^+\log^+\frac{1}{|f_k(0)-b|}\right.$$
$$\left.+\log^+T(\rho', f_k-b)+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)+1|}+\log^+T(\rho', f+1)\right\}, \tag{3.4}$$

$$m\left(r,\frac{\phi'}{\phi-1}\right)<C\left\{1+\log^+\rho'+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho'-r}\right.$$
$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f_k(0)-b-a(f(0)+1)^n|}+\log^+T(\rho', f_k-b-a(f+1)^n)$$
$$\left.+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)+1|}+\log^+T(\rho', f+1)\right\}. \tag{3.5}$$

（在本节里，C 表示常数，可能依赖 k 和 n，在不同处出现时可能为不同数值.）

从(3.4)与(3.5)式中都将出现项 $\log^+T(\rho', f_k)$. 由

$$m(\rho', f_k)\leqslant m(\rho', f+1)+m\left(\rho', \frac{f_k}{f+1}\right)$$
$$\leqslant m(\rho', f)+\log 2+m\left(\rho', \frac{f_k}{f+1}\right)$$

与

$$N(\rho', f_k)\leqslant (k+1)N(\rho', f),$$

有

$$T(\rho', f_k)\leqslant (k+1)T(\rho', f)+m\left(\rho', \frac{f_k}{f+1}\right)+\log 2.$$

于是

$$\log^+T(\rho', f_k)\leqslant \log^+T(\rho', f)+m\left(\rho', \frac{f_k}{f+1}\right)+\log 3(k+1). \tag{3.6}$$

又

$$m\left(\rho', \frac{f_k}{f+1}\right)\leqslant \sum_{j=1}^{k}m\left(\rho', \frac{f^{(j)}}{f+1}\right)+\sum_{j=1}^{k-1}m(\rho', a_j)+\log k$$
$$<\sum_{j=1}^{k-1}m(R, a_j)+C\left\{1+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{\rho'}\right.$$

$$+\log^+\frac{1}{\rho-\rho'}+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)+1|}+\log^+T(\rho,f)\Big\}. \tag{3.7}$$

将(3.4)—(3.7)式代入(2.6)与(2.7)式,并计及 ρ' 的选取,当 $\frac{R}{2}<r<\rho<R$ 时,得

$$\begin{aligned}T(r,f)<C\Big\{&1+\log^+R+\log^+\frac{1}{R}+\sum_{j=1}^{k-1}m(R,\alpha_j)+\log^+|a|\\&+\log^+\frac{1}{|a|}+\log^+|b|+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+T(\rho,f)\Big\}\\&+\frac{1}{n}\log|\phi(0)|+\log\left|\frac{\phi(0)-1}{\phi'(0)}\right|+\frac{1}{n}\log\frac{1}{|f_k(0)-b|}\\&+C\Big\{\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)+1|}+\log^+\log^+\frac{1}{|f_k(0)-b|}\\&+\log^+\log^+\frac{1}{|f_k(0)-b-a(f(0)+1)^n|}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

但是当 $\beta>0$, $0<x<\infty$ 时,有

$$\beta\log x+C\log^+\log^+\frac{1}{x}<\beta\log^+x+C,$$

因此

$$\begin{aligned}&\log|\phi(0)-1|+C\log^+\log^+\frac{1}{|f_k(0)-b-a(f(0)+1)^n|}\\&\leqslant\log|\phi(0)-1|+C\log^+\log^+\frac{1}{|\phi(0)-1|}+C\log^+\log^+\frac{1}{|a(f(0)+1)^n|}\\&<\log^+|\phi(0)|+C\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)+1|}+\log^+\frac{1}{|a|}+C.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\log\frac{1}{|\phi'(0)|}&=\log\left|\frac{a(f(0)+1)^{n+1}}{f_k'(0)(f(0)+1)-nf'(0)(f_k(0)-b)}\right|\\&\leqslant\log^+|a|+C\log^+|f(0)|+C+\log^+\frac{1}{|f_k'(0)(f(0)+1)-nf'(0)(f_k(0)-b)|}\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{n}\right)\log^+|\phi(0)|+\frac{1}{n}\log\frac{1}{|f_k(0)-b|}+C\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)+1|}\\&+C\log^+\log^+\frac{1}{|f_k(0)-b|}<C\Big\{\log^+|f_k(0)|+\log^+\frac{1}{|f(0)+1|}\\&+\log^+\frac{1}{|f_k(0)-b|}+\log^+\frac{1}{|a|}+\log^+|b|+1\Big\},\\&\log^+\frac{1}{\rho-r}\leqslant\log^+\frac{\rho}{\rho-r}+\log^+\frac{2}{R}\quad\left(\frac{R}{2}<r<\rho<R\right),\end{aligned}$$

于是(3.8)式化为

$$T(r,f)<C_1(1+B)+C_2\left\{\log\frac{\rho}{\rho-r}+\log^+T(\rho,f)\right\},$$

其中 B 由 (3.3) 式给出. 增大 C_1，使适合 $C_1 > (C_2+2)^2$，我们可以应用引理 4，当 $\frac{R}{2} < r < R$ 时，有

$$T(r,f) < 2C_1\left\{1 + B + \log\frac{R}{R-r}\right\}.$$

当 $0 < r \leqslant \frac{R}{2}$ 时，有

$$T(r,f) \leqslant T\left(\frac{R}{2},f\right) < 2C_1\{1+B+\log 2\} < 4C_1\left\{1+B+\log\frac{R}{R-r}\right\}.$$

若取 $C^* = 4C_1$，则(3.2)式对于任意 r，$0 < r < R$，成立.

四、原始值的消去

在消去原始值之前，我们要作一点准备.

引理 6. 设 k，n 为二正整数，且 $n \geqslant k+4$；b' 为一实数，且 $b' \geqslant 1$；$f(z)$，$a_j(z)(j=1,2,\cdots,k-1)$ 在线段 $\overline{z_1z_2}$ 的邻域内全纯，$f_k(z)$ 由(2.1)式确定. 又设存在正数 A，使得

$$A > 2, \quad \max_{\substack{z\in\overline{z_1z_2}\\ 1\leqslant j\leqslant k-1}} |a_j(z)| < A, \tag{4.1}$$

$$|z_1 - z_2| < \frac{1}{4nb'A}. \tag{4.2}$$

若

$$\max_{z\in\overline{z_1z_2}} |f_k'(z)| \leqslant 2nb', \quad \sum_{j=0}^{k} |f^{(j)}(z_2)| + |f_k(z_2)| \leqslant \frac{1}{4}, \tag{4.3}$$

则

$$|f_k(z_1)| < \frac{1}{2}, \ |f'(z_1)| < \frac{1}{2}, \ |f(z_1)| < \frac{1}{2}.$$

证. 对 $\overline{z_2z_1}$ 上的任意点 z 有

$$|f_k(z) - f_k(z_2)| \leqslant \left(\max_{t\in\overline{zz_2}} |f_k'(t)|\right)|z_1 - z_2| < \frac{1}{2A}. \tag{4.4}$$

于是 $|f_k(z)| < \frac{1}{2A} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. 当 $k=1$ 时，即 $|f'(z)| < \frac{1}{2}$. 从而

$$|f(z_1)| \leqslant |f(z_2)| + \left(\max_{t\in\overline{z_2z_1}} |f'(t)|\right)|z_1 - z_2| < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4nb'A} < \frac{1}{2}.$$

当 $k \geqslant 2$ 时，由(4.4)，(4.3)，(2.1)，(4.1)式有

$$|f^{(k)}(z)| < \frac{1}{4} + \frac{1}{2A} + A\sum_{j=1}^{k-1} |f^{(j)}(z)|.$$

记 $M_j = \max_{z\in\overline{z_2z_1}} |f^{(j)}(z)| (j=0,1,2,\cdots,k)$，则

$$M_{k-1} \leqslant |f^{(k-1)}(z_2)| + M_k|z_1 - z_2| \leqslant |f^{(k-1)}(z_2)| + \frac{1}{4nb'A}\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2A} + A\sum_{j=1}^{k-1} M_j\right\}.$$

从而

$$\left(1 - \frac{1}{4nb'}\right)M_{k-1} \leqslant |f^{(k-1)}(z_2)| + \frac{1}{4nb'A}\left\{\frac{1}{2} + A\sum_{j=1}^{k-2} M_j\right\}.$$

类似地，

$$M_{k-2} \leqslant |f^{(k-2)}(z_2)| + M_{k-1}|z_1 - z_2|$$

$$\leqslant |f^{(k-2)}(z_2)| + \frac{\frac{1}{4nb'A}}{1 - \frac{1}{4nb'}}\left\{|f^{(k-1)}(z_2)| + \frac{1}{4nb'A}\left(\frac{1}{2} + A\sum_{j=1}^{k-2} M_j\right)\right\}$$

$$\leqslant \sum_{j=k-2}^{k-1} |f^{(j)}(z_2)| + \frac{1}{4nb'A}\left\{\frac{1}{2} + A\sum_{j=1}^{k-2} M_j\right\}.$$

如此类推，可证

$$\left(1 - \frac{1}{4nb'}\right)M_1 \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} |f^{(j)}(z_2)| + \frac{1}{4nb'A}\cdot\frac{1}{2}.$$

于是 $|f'(z_1)| \leqslant M_1 < \frac{1}{2}$，并且

$$|f(z_1)| \leqslant M_0 \leqslant |f(z_2)| + M_1|z_1 - z_2| < \frac{1}{2}.$$

现在我们证明本节的主要引理.

引理 7. 设 k，n 为二正整数，且 $n \geqslant k+4$；a，b 为二有穷复数，且 $a \neq 0$. 又设在 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 亚纯，$\alpha_j(z)(j=1, 2, \cdots, k-1)$ 全纯，$f_k(z)$ 由 (2.1) 式确定. 若在 $|z|<1$ 内，$f_k(z) - a(f(z)+1)^n \neq b$，$f(z)$ 的零点均具有重级 $\geqslant k+1$，则在 $|z| < \frac{1}{16nb'Ae^D}$ 内或者一致有 $|f(z)| > e^{-C(1+D+\log n+\log b'+\log A)}$，或者一致有 $|f(z)| < e^{3D}$. 其中 C 为仅依赖于 k 的常数，

$$A = \max\{3, \max_{\substack{|z|\leqslant\frac{1}{2}\\ 1\leqslant j\leqslant k-1}} |\alpha_j(z)|\}, \tag{4.5}$$

$$b' = \max(1, |b|), \tag{4.6}$$

$$D = C^*\left\{1 + \log^+|a| + \log^+\frac{1}{|a|} + \log^+|b| + (k-1)A + 6\log 2\right\}. \tag{4.7}$$

这里 C^* 为仅依赖于 k，n 的正数，由引理 5 确定

证. 在 $|z| < \frac{1}{16nb'Ae^D}$ 内存在点 z' 与 z''，使得 $|f(z')| \geqslant 1$ 与 $|f(z'')| \leqslant 1$. 如果它们之一不存在，则引理结论已经成立. 于是由连续性，存在点 z_1 有

$$|f(z_1)| = 1, \quad |z_1| < \frac{1}{16nb'Ae^D}. \tag{4.8}$$

我们区分两种情况.

A) 在 $|z|<\frac{1}{4nb'Ae^D}$ 内一致地有

$$\sum_{j=0}^{k}|f^{(j)}(z)|+|f_k(z)|\geqslant\frac{1}{4}. \tag{4.9}$$

于是

$$\frac{1}{|f|}\leqslant 4\left\{\sum_{j=0}^{k}\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|+\left|\frac{f_k}{f}\right|\right\}\leqslant 8\left\{\sum_{j=0}^{k}\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|+\sum_{j=1}^{k-1}|a_j|\right\}.$$

若以 $m\left(r,z_1,\frac{1}{f}\right)$ 与 $T\left(r,z_1,\frac{1}{f}\right)$ 表示 $m\left(r,\frac{1}{f(z+z_1)}\right)$ 与 $T\left(r,\frac{1}{f(z+z_1)}\right)$，则

$$m\left(r,z_1,\frac{1}{f}\right)\leqslant\sum_{j=0}^{k}m\left(r,z_1,\frac{f^{(j)}}{f}\right)+\sum_{j=1}^{k-1}m(r,z_1,a_j)+\log 16k$$
$$\left(0<r<\frac{3}{16nb'Ae^D}\right).$$

由于 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的零点具有重级$\geqslant k+1$ 以及(4.9)式，在 $|z-z_1|<\frac{3}{16nb'Ae^D}$ 内 $f(z)$ 不可能有零点. 因此可以应用引理 3 而有

$$T\left(r,z_1,\frac{1}{f}\right)<C\left\{1+\log(16nb'Ae^D)+\log\frac{1}{\rho-r}+\log^+T(\rho,z_1,f)\right\}$$
$$\left(\frac{1}{16nb'Ae^D}<r<\rho<\frac{3}{16nb'Ae^D}\right).$$

注意到 $\log\frac{1}{\rho-r}\leqslant\log\frac{\rho}{\rho-r}+\log(16nb'Ae^D)$ 与 $T(\rho,z_1,f)=T\left(\rho,z_1,\frac{1}{f}\right)$，可以应用引理 4，而得

$$T\left(r,z_1,\frac{1}{f}\right)<C\left\{1+\log(16nb'Ae^D)+\log\frac{\frac{3}{16nb'Ae^D}}{\frac{3}{16nb'Ae^D}-r}\right\}$$
$$\left(\frac{1}{16nb'Ae^D}<r<\frac{3}{16nb'Ae^D}\right).$$

因此

$$T\left(\frac{5}{32nb'Ae^D},z_1,\frac{1}{f}\right)<C\{1+D+\log n+\log b'+\log A\}.$$

从而

$$\log M\left(\frac{1}{16nb'Ae^D},\frac{1}{f}\right)\leqslant\log M\left(\frac{1}{8nb'Ae^D},z_1,\frac{1}{f}\right)$$
$$\leqslant 9T\left(\frac{5}{32nb'Ae^D},z_1,\frac{1}{f}\right)<C\{1+D+\log n+\log b'+\log A\}.$$

B) 存在点 z_2 使得

$$\sum_{j=0}^{k}|f^{(j)}(z_2)|+|f_k(z_2)|<\frac{1}{4},\ |z_2|<\frac{1}{4nb'Ae^D}. \tag{4.10}$$

我们断言在 $\overline{z_2z_1}$ 上存在点 z_0，使得[1]

$$|f_k^{\#}(z_0)| \geqslant 2nb', \quad |f_k(z_0)| < \frac{1}{2}, \quad |f^{\#}(z_0)| < \frac{1}{2}, \quad |f(z_0)| < \frac{1}{2}. \tag{4.11}$$

事实上，若 $|f_k^{\#}(z_2)| \geqslant 2nb'$，则点 z_2 即可取为 z_0. 若 $|f_k^{\#}(z_2)| < 2nb'$. 设在 $\overline{z_2z_1}$ 上一致地有 $|f_k^{\#}(z)| < 2nb'$，则在 $\overline{z_2z_1}$ 的邻域内 $f(z)$ 全纯，并且由 (4.5),(4.6),(4.10) 式可知，引理 6 的诸条件均得以满足，于是 $|f(z_1)| < \frac{1}{2}$，这与 (4.8) 式矛盾. 从而在 $\overline{z_2z_1}$ 上存在点 z_3，使得 $|f_k^{\#}(z_3)| = 2nb'$，且在 $\overline{z_2z_3}$ 内一致地有 $|f_k^{\#}(z)| < 2nb'$. 显然，$|z_2 - z_3| \leqslant |z_2 - z_1| < \frac{1}{4nb'A}$，根据引理 6 有 $|f_k(z_3)| < \frac{1}{2}$，$|f^{\#}(z_3)| < \frac{1}{2}$，$|f(z_3)| < \frac{1}{2}$. 于是点 z_3 可取为 z_0.

在 $|z - z_0| < \frac{3}{4}$ 内应用引理5，由(4.11)式与

$$|f_k^{\#}(z_0)(f(z_0) + 1) - nf^{\#}(z_0)(f_k(z_0) - b)| \geqslant 2nb' \cdot \frac{1}{2} - n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + |b|\right) \geqslant \frac{n}{4} b'$$

有

$$T\left(\frac{1}{2}, z_0, f\right) < C^*\left\{1 + (k-1)A + \log^+|a| + \log^+\frac{1}{|a|} + \log^+|b| + 6\log 2\right\}.$$

如果点 P 是 $f(z)$ 的一个极点，则

$$\log\frac{\frac{1}{2}}{|p - z_0|} \leqslant T\left(\frac{1}{2}, z_0, f\right) < D,$$

即 $|p - z_0| > \frac{1}{2e^D}$. 因此，在 $|z - z_0| < \frac{1}{2e^D}$ 内 $f(z)$ 全纯. 从而

$$\log M\left(\frac{1}{16nb'Ae^D}, f\right) \leqslant \log M\left(\frac{1}{2nb'Ae^D}, z_0, f\right)$$
$$\leqslant 3T\left(\frac{1}{nb'Ae^D}, z_0, f\right) < 3D.$$

五、主要结果及讨论

现在我们容易从引理 7 导出本文的主要结果.

定理 1. 设 n，k 为二正整数，且 $n \geqslant k + 4$；a，b，c 为三个有穷复数，且 a，c 不等于 0. 又设 $\mathscr{F}$ 为域 D 内的一族亚纯函数，$\alpha_j(z)(j = 1, 2, \cdots, k-1)$ 在 D 内全纯. 若在 D 内有

$$f^{(k)}(z) + \sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j(z)f^{(j)}(z) - af(z)^n \neq b, \tag{5.1}$$

$f(z) - c$ 的零点均具有重级 $\geqslant k + 1$，

则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

---

1) 具有性质 (4.11) 的点 z_0 的存在，是引理 7 证明的关键[10].

证. 对于每个 $f(z)\in\mathscr{F}$，令 $g(z)=\dfrac{f(z)}{c}-1$，则 $g(z)$ 适合下述条件

$$g^{(k)}(z)+\sum_{j=1}^{k-1}a_j(z)g^{(j)}(z)-a_1(g(z)+1)^n\neq b_1,$$

$$g(z)\text{ 的零点均具有重级}\geqslant k+1,$$

其中 $a_1=ac^{n-1}$，$b_1=\dfrac{b}{c}$.

应用引理 7 易知，$\mathscr{G}=\{g(z)\}$ 在 D 内每点正规. 于是 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

特别地，若在定理 1 中取 $k=1$，$n\geqslant 5$，定理变为 $\mathscr{F}$ 中每个亚纯函数 $f(z)$ 适合条件：

$$f'(z)-af(z)^n\neq b,$$

$$f(z)-c\text{ 的零点均有重级}\geqslant 2,\tag{5.2}$$

则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规. 这样就在附加条件(5.2)下证实了 Hayman 猜测(见引言中的 (C)).

条件(5.2)仅用在引理 7 证明中的情况 A). 所以如果下述命题能被证明，则 Hayman 猜测即可彻底解决.

命题 1. 设 $\mathscr{F}$ 为 $|z|<1$ 内的一族亚纯函数；a，b 为二有穷复数，$a\neq 0$；$n\geqslant 5$. 若在 $|z|<1$ 内恒有

$$f'(z)-af(z)^n\neq b,$$

$$|f(z)|+|f'(z)|>d>0,$$

则 $\mathscr{F}$ 在 $z=0$ 正规.

定理 1 中的条件(5.1)，微分多项式具有一个例外值可以减弱为它具有一个重值. 为此我们需要回忆有关记号[11].

设 $g(z)$ 为一亚纯函数，τ 为大于 1 的整数，$N_{(\tau-1)}(r,g)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 内 $g(z)$ 的重级小于 τ 的极点的密指量，$\bar{N}_{(\tau-1)}(r,g)$ 表示相应的精简密指量. 令

$$N_{(\tau}(r,g)=N(r,g)-N_{(\tau-1)}(r,g),$$

$$\bar{N}_{(\tau}(r,g)=\bar{N}(r,g)-\bar{N}_{(\tau-1)}(r,g).$$

可以看出

$$\bar{N}_{(\tau}(r,g)\leqslant\frac{1}{\tau}N_{(\tau}(r,g).$$

在(2.10)式中如果注意到

$$\begin{aligned}\bar{N}\left(r,\frac{1}{\phi-1}\right)&=\bar{N}_{(\tau-1)}\left(r,\frac{1}{\phi-1}\right)+\bar{N}_{(\tau}\left(r,\frac{1}{\phi-1}\right)\\&\leqslant\bar{N}_{(\tau-1)}\left(r,\frac{1}{\phi-1}\right)+\frac{1}{\tau}N_{(\tau}\left(r,\frac{1}{\phi-1}\right)\\&\leqslant\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\bar{N}_{(\tau-1)}\left(r,\frac{1}{\phi-1}\right)+\frac{1}{\tau}\left\{T(r,\phi)+\log\frac{1}{|\phi(0)|}\right\},\end{aligned}$$

则有

$$\left(1-\frac{1}{\tau}\right)T(r,\phi)<\bar{N}(r,\phi)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{\phi}\right)+\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\bar{N}_{(\tau-1)}\left(r,\frac{1}{\phi-1}\right)$$

$$+ S(r, \phi) + \frac{1}{\tau}\log\frac{1}{|\phi(0)-1|}. \tag{5.3}$$

代替(2.10)式而应用(5.3)式，则引理 2 中的(2.6)式具有形式

$$\left\{n-(k+3)-\frac{n}{\tau}\right\}T(r,f) < \left(1-\frac{1}{\tau}\right)\bar{N}_{r-1)}\left(r, \frac{1}{\phi-1}\right) + S_1(r, f, \phi), \tag{5.4}$$

其中 $S_1(r, f, \phi)$ 具有和(2.7)式类似的形式.

如同上述引理3—引理 7 的步骤，我们可以证明

定理 2. 设 n, k 为二正整数，且 $n \geqslant k+4$; a, b, c 为三个有穷复数，且 a, c 不等于 0. 又设 $\mathscr{F}$ 为域 D 内的一族亚纯函数，$\alpha_j(z)(j=1, 2, \cdots, k-1)$ 在 D 内全纯. 若在 D 内有

$$f^{(k)}(z) + \sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j(z)f^{(j)}(z) - af(z)^n - b \text{ 的零点都有重级}$$
$$\geqslant \left[\frac{n}{n-(k+3)}\right] + 1,$$
$$f(z) - c \text{ 的零点重级均} \geqslant k+1,$$

则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

例如

$$\begin{cases} f'(z) - af(z)^5 - b \text{ 的零点都有重级} \geqslant 6, \\ f(z) - c \text{ 的零点重级均} \geqslant 2; \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} f'(z) - af(z)^9 - b \text{ 的零点都有重级} \geqslant 2, \\ f(z) - c \text{ 的零点重级均} \geqslant 2, \end{cases}$$

则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

参 考 文 献

[1] Chuang, C. T., *Rend. Cir. Math. Palermo*, **62**(1938).
[2] Drasin, D., *Acta Math.*, **122**(1969), 231—263.
[3] 顾永兴，中国科学，1978, 4: 374—386.
[4] Hayman, W. K., *Ann. of Math.*, **70**(1959), 9—42.
[5] Zalcman, L., *Rocky Moutain J. Math.*, **12**(1982), 75—92.
[6] Hayman, W. K., *Research Problems in Function Theory*, London, 1967.
[7] Nevanlinna, R., *Analytic Functions*, Springer-Verlag, 1970.
[8] Hiong King-Lai, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **72**(1955), 165—197.
[9] Milloux, H., *Les Fonctions Méromorphes et leurs Derivées*, Actual. Sci. et Ind. No. 888, Paris, 1940.
[10] Yang Lo, *J. London Math. Soc.* (2), **25**(1982), 288—296.
[11] 杨乐，数学学报，**14**(1964), 428—437.