中国科学(A 辑)
第25卷 第6期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1995年6月

三层流体系统中孤立波的产生*

朱 勇

(上海大学;上海市应用数学和力学研究所,上海 200072)

摘要 采用约化摄动方法导出了三层流体系统中各界面所遵循的KdV方程,讨论了流体深度对孤立波产生的影响,将波分为快模式、中间模式和慢模式波后发现慢模式波的结果与已有的实验结果定性上一致. 此外,还发现自由面上可能存在下凹的孤立波,这有待于实验的验证.

关键词 孤立波 分层流体 KdV方程

孤立波特性的研究是一项引人注目的课题[1, 2]. 对于三层流体中孤立波的研究工作已有一些,如 Amen 和 Maxworthy[3], Maxworthy[4], Gilreath 和 Brandt[5] 的三层流体实验中都观察到了内孤立波的生成. 这项研究的应用背景涉及到物体在分层介质中运动所产生的效应,内波的破碎,波-波相互作用引起的流动以及底部地形上的潮汐流、瞬变流在分层流体中生成内波的机理,甚至涉及木星上大红斑的形成和晨阵风(morning glory)现象(见文献[6]). 本文从理论上讨论了三层流体系统中的孤立波. 我们从文献[7]所导得的三层流体系统推广的Boussinesq方程出发,采用约化摄动方法导得了各界面所遵循的KdV方程. 这些方程在退化情形即为单层及二层流体系统所对应的方程. 我们采用反演散射理论从所导得的KdV方程出发,讨论了流体深度对界面孤立波产生的影响,将波分为快模式、中间模式和慢模式波后发现慢模式界面孤立波与已有的实验结果[3~5]定性上一致,中间层流体厚度越小,将会激发出较多的孤立波. 此外,我们通过计算发现在自由面上可能存在下凹的孤立波,对于单层流体只有在考虑表面张力的情况下才可能存在下凹的孤立波,对于无表面张力三层流体自由表面上下凹孤立波的存在性有待于进一步的稳定性分析及实验验证.

1 基本方程

我们考虑三层不可溶混的常密度不可压缩无粘流体的两维无旋运动,上部具自由表面,下部为水平固壁(图1).

假定流体是静稳定分层的,即 $\rho_1>\rho_2>\rho_3$, 忽略流体各界面上的表面张力,设流体的密度比 σ_{ij} 及未扰动时的厚度比 r_{ij} 分别为

$$\sigma_{21}=\rho_2/\rho_1,\ \sigma_{31}=\rho_3/\rho_1,\ \sigma_{32}=\rho_3/\rho_2, \tag{1.1}$$

1994-05-12 收稿,1994-10-27 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目

$$r_{21}=H_2/H_1,\ r_{31}=H_3/H_1,\ r_{32}=H_3/H_2. \tag{1.2}$$

记 h_i ($i=1,\ 2,\ 3$) 为扰动后的第 i 层流体厚度，u_i ($i=1,\ 2,\ 3$) 为第 i 层内沿铅垂方向的平均水平速度．取底层流体厚度 H_1 为特征长度，$\sqrt{gH_1}$ 为特征速度，$\sqrt{H_1/g}$ 为特征时间，且无量纲量保留原来记号．令

$$h_1=1+\tilde{\zeta}_1,\ h_2=(1+\tilde{\zeta}_2)r_{21},\ h_3=(1+\tilde{\zeta}_3)r_{31}, \tag{1.3}$$

并引进小参数 $\varepsilon=A/H_1$，其中 A 为特征波幅，在 Boussinesq 浅水波假定下，可导得如下精确到 $O(\varepsilon^{5/2})$ 的三层流体推广的 Boussinesq 方程（推导过程可参见文献[7]）：

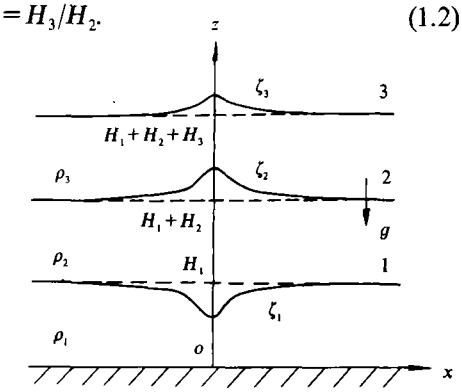


图 1　三层流体模型

$$\frac{\partial\tilde{\zeta}_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\zeta}_1u_1)=0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\tilde{\zeta}_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\zeta}_2u_2)=0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial\tilde{\zeta}_3}{\partial t}+\frac{\partial u_3}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\zeta}_3u_3)=0. \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{\zeta}_1}{\partial x}+\sigma_{21}r_{21}\frac{\partial\tilde{\zeta}_2}{\partial x}+\sigma_{31}r_{31}\frac{\partial\tilde{\zeta}_3}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u_1^2\right)-\left(\frac{1}{3}+\sigma_{21}r_{21}+\sigma_{31}r_{31}\right)\frac{\partial^3u_1}{\partial x^2\partial t}$$
$$-\left(r_{21}r_{31}\sigma_{31}+\frac{\sigma_{21}r_{21}^2}{2}\right)\frac{\partial^3u_2}{\partial x^2\partial t}-\frac{1}{2}\sigma_{31}r_{31}^2\frac{\partial^3u_3}{\partial x^2\partial t}=0, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{\zeta}_1}{\partial x}+r_{21}\frac{\partial\tilde{\zeta}_2}{\partial x}+\sigma_{21}r_{31}\frac{\partial\tilde{\zeta}_3}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u_2^2\right)-\left(\sigma_{32}r_{31}+\frac{1}{2}r_{21}\right)\frac{\partial^3u_1}{\partial x^2\partial t}$$
$$-\left(\frac{1}{3}r_{21}^2+\sigma_{32}r_{31}r_{21}\right)\frac{\partial^3u_2}{\partial x^2\partial t}-\frac{\sigma_{31}r_{31}^2}{2}\frac{\partial^3u_3}{\partial x^2\partial t}=0, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{\zeta}_1}{\partial x}+r_{21}\frac{\partial\tilde{\zeta}_2}{\partial x}+r_{31}\frac{\partial\tilde{\zeta}_3}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u_3^2\right)-\frac{r_{31}}{2}\frac{\partial^3u_1}{\partial x^2\partial t}$$
$$-\frac{r_{31}r_{21}}{2}\frac{\partial^3u_2}{\partial x^2\partial t}-\frac{1}{3}r_{31}^2\frac{\partial^3u_3}{\partial x^2\partial t}=0. \tag{1.9}$$

其首阶近似的特征方程为

$$C^6+A_1C^4+A_2C^2+A_3=0, \tag{1.10}$$

其中

$$A_1=-1-r_{21}-r_{31},$$

$$A_2=r_{21}(1-\sigma_{21})+r_{31}(1-\sigma_{31})+r_{21}r_{31}(1-\sigma_{32}),$$
$$A_3=r_{21}r_{31}(1-\sigma_{32})(\sigma_{21}-1).$$

令 $C_{1\pm}$, $C_{2\pm}$, $C_{3\pm}$ ($|C_1|>|C_2|>|C_3|$) 分别代表快模式、中间模式和慢模式波速. 在下面的讨论中我们仅考虑向右传播的波，向左传播的波可作类似的分析.

2 各界面所遵循的 KdV 方程

我们引进与线性波同速行进的坐标系，同时引进慢变量时间. 这样可望在经过一段时间后非线性与色散效应相平衡. 现作如下变换:

$$\xi=\varepsilon^{1/2}(x-Ct),\ \tau=\varepsilon^{3/2}t. \tag{2.1}$$

令列向量 U 为

$$U=(\tilde{\zeta}_1,\ \tilde{\zeta}_2,\ \tilde{\zeta}_3,\ u_1,\ u_2,\ u_3)^{\mathrm{T}}, \tag{2.2}$$

作展开

$$U=\varepsilon U^{(1)}+\varepsilon^2U^{(2)}+\cdots=\varepsilon(\tilde{\zeta}_1^{(1)},\ \tilde{\zeta}_2^{(1)},\ \tilde{\zeta}_3^{(1)},\ u_1^{(1)},\ u_2^{(1)},\ u_3^{(1)})^{\mathrm{T}}+\cdots. \tag{2.3}$$

在变换(2.1)式和展开式(2.3)下，基本方程组(1.4)～(1.9)化为含有各阶 ε 的方程. 取到 $O(\varepsilon^{3/2})$ 得到

$$M_0\frac{\partial U^{(1)}}{\partial\xi}=0, \tag{2.4}$$

其中

$$M_0=\begin{bmatrix} -C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -C & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 1\\ 1 & \sigma_{21}r_{21} & \sigma_{31}r_{31} & -C & 0 & 0\\ 1 & r_{21} & \sigma_{32}r_{31} & 0 & -C & 0\\ 1 & r_{21} & r_{31} & 0 & 0 & -C \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

(2.4)式有准简单波解

$$U^{(1)}=\tilde{\zeta}_1^{(1)}R, \tag{2.6}$$

其中 R 为右本征向量，满足 $M_0R=0$, 可求得

$$R=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\\ b_5\\ b_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\ (C^2+\sigma_{21}-1)/C^2\sigma_{21}\\ [C^2(C^2-1)-(C^2+\sigma_{21}-1)]r_{21}/C^2r_{31}\sigma_{31}\\ C\\ (C^2+\sigma_{21}-1)/C\sigma_{21}\\ [C^2(C^2-1)-(C^2+\sigma_{21}-1)]r_{21}/Cr_{31}\sigma_{31} \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

顺便求得左本征向量 L ($LM_0=0$):

$$L=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ [r_{21}(C^2-1)-\sigma_{21}r_{21}]/C^2 \\ [-r_{21}(C^2-1)+\sigma_{21}r_{21}+C^2(C^2-1)]/C^2 \\ 1/C \\ [r_{21}(C^2-1)-\sigma_{21}r_{21}]/C^3 \\ [-r_{21}(C^2-1)+\sigma_{21}r_{21}+C^2(C^2-1)]/C^3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{2.8}$$

取到 $O(\varepsilon^{5/2})$, 并利用 (2.6) 式, 可得如下方程:

$$M_0\frac{\partial U^{(2)}}{\partial\xi}+S_1\frac{\partial\tilde{\zeta}_1^{(1)}}{\partial\tau}+S_2\tilde{\zeta}_1^{(1)}\frac{\partial\tilde{\zeta}_1^{(1)}}{\partial\xi}+S_3\frac{\partial^3\tilde{\zeta}_1^{(1)}}{\partial\xi^3}=0, \tag{2.9}$$

其中　　$S_1=R$,

$S_2=(2b_1b_4,\ 2b_2b_5,\ 2b_3b_4,\ b_4^2,\ b_5^2,\ b_6^2)^{\mathrm{T}}$,

$S_3=(0,\ 0,\ 0,\ d_4,\ d_5,\ d_6)^{\mathrm{T}}$;

$$d_4=C\left[\left(\frac{1}{3}+\sigma_{21}r_{21}+\sigma_{31}r_{31}\right)b_4+\left(r_{21}r_{31}\sigma_{31}+\frac{1}{2}r_{21}^2\sigma_{31}\right)b_5+\frac{1}{2}\sigma_{31}r_{31}^2b_6\right],$$

$$d_5=C\left[\left(\sigma_{32}r_{31}+\frac{1}{2}r_{21}\right)b_4+\left(\frac{1}{3}r_{21}^2+\sigma_{32}r_{31}r_{21}\right)b_5+\frac{1}{2}\sigma_{32}r_{31}^2b_6\right],$$

$$d_6=C\left(\frac{1}{2}r_{31}b_4+\frac{1}{2}r_{31}r_{21}b_5+\frac{1}{2}r_{31}^2b_6\right).$$

用左本征向量 L 左乘 (2.9) 式, 可得到

$$\frac{\partial\tilde{\zeta}_1^{(1)}}{\partial\tau}+\frac{LS_2}{LS_1}\tilde{\zeta}_1^{(1)}\frac{\partial\tilde{\zeta}_1^{(1)}}{\partial\xi}+\frac{LS_3}{LS_1}\frac{\partial^3\tilde{\zeta}_1^{(1)}}{\partial\xi^3}=0, \tag{2.10}$$

其中

$$LS_1=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5b_5+a_6b_6,$$
$$LS_2=2a_1b_1b_4+2a_2b_2b_5+2a_3b_3b_6+a_4b_4^2+a_5b_5^2+a_6b_6^2,$$
$$LS_3=a_4d_4+a_5d_5+a_6d_6.$$

由 (1.3) 和 (2.6) 式, 可得界面一阶项 $\zeta_1^{(1)}$, $\zeta_2^{(1)}$, $\zeta_3^{(1)}$ 的表达式满足

$$\begin{aligned}&\zeta_1^{(1)}=\tilde{\zeta}_1^{(1)},\\ &\zeta_2^{(1)}=(1+r_{21}b_2)\tilde{\zeta}_1^{(1)},\\ &\zeta_3^{(1)}=(1+r_{21}b_2+r_{31}b_3)\tilde{\zeta}_1^{(1)}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

由此导得各界面所遵循的 KdV 方程:

$$\frac{\partial\zeta_1^{(1)}}{\partial\tau}+\alpha_1\zeta_1^{(1)}\frac{\partial\zeta_1^{(1)}}{\partial\xi}+\beta_1\frac{\partial^3\zeta_1^{(1)}}{\partial\xi^3}=0, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial\zeta_2^{(1)}}{\partial\tau}+\alpha_2\zeta_2^{(1)}\frac{\partial\zeta_2^{(1)}}{\partial\xi}+\beta_2\frac{\partial^3\zeta_2^{(1)}}{\partial\xi^3}=0, \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial\zeta_3^{(1)}}{\partial\tau}+\alpha_3\zeta_3^{(1)}\frac{\partial\zeta_3^{(1)}}{\partial\xi}+\beta_3\frac{\partial^3\zeta_3^{(1)}}{\partial\xi^3}=0, \tag{2.14}$$

其中

$$\begin{aligned}&\alpha_1=LS_2/LS_1,\\&\alpha_2=\alpha/(1+r_{21}b_2),\\&\alpha_3=\alpha/(1+r_{21}b_2+r_{31}b_3),\\&\beta_1=\beta_2=\beta_3=LS_3/LS_1.\end{aligned} \tag{2.15}$$

(2.12)～(2.14)式有孤立波解

$$\zeta_i^{(1)}=a\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{\alpha_i a}{12\beta_i}}\left(\xi-\frac{\alpha_i a}{3}\tau\right)\right]\qquad(i=1,\ 2,\ 3). \tag{2.16}$$

孤立波波速为

$$C_i^*=C+\frac{\alpha_i a}{3}\varepsilon\qquad(i=1,\ 2,\ 3). \tag{2.17}$$

当 $r_{21}=0$ 时，$\alpha_1=\alpha_2$. 此时，(2.12)，(2.13)式具有相同的表达式，(2.12)～(2.14)式退化成二层流体系统中自由面和界面所遵循的 KdV 方程，其结果与 Kakutani 和 Yamasaki[8] 所得方程相同. 因此二层流体和单层流体情形都可看作三层流体的特例.

3 流体深度对孤立波产生的影响

我们采用反演散射理论的一些结果，从已导得的 KdV 方程出发，讨论流体深度对孤立波产生的影响.

现作如下变换

$$\zeta_i^{(1)}=-\frac{6\beta_i}{\alpha_i}Q_i,\ \tau=\frac{1}{\beta_i}\tau_1\qquad(i=1,\ 2), \tag{3.1}$$

则(2.12)，(2.13)式可化成

$$\frac{\partial Q_i}{\partial\tau_1}-6Q_i\frac{\partial Q_i}{\partial\xi}+\frac{\partial^3Q_i}{\partial\xi^3}=0\qquad(i=1,\ 2). \tag{3.2}$$

作为 Maxworthy 等实验的近似模型，我们考虑初始扰动

$$\mathring{\zeta}_i^{(1)}\doteq(-1)^iA\mathrm{sech}^2B\xi\qquad(i=1,\ 2), \tag{3.3}$$

其中 $\mathring{\zeta}_1^{(1)}$ 和 $\mathring{\zeta}_2^{(1)}$ 分别为界面 I 和 II 上的初始扰动.

利用反演散射理论对 KdV 方程(3.2)的分析结果(Whitham[2])以及变换(3.1)式，知道：初始扰动会演化成波幅依大小排列的孤立波加上一色散振荡波列，其本征值及孤立波数分别为

$$k_n=\frac{B}{2}\left[\left(1-\frac{2A\alpha_i}{3B^2\beta_i}\right)^{1/2}-(2n-1)\right]\qquad(i=1,\ 2), \tag{3.4}$$

$$N=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2A\alpha_i}{3B^2\beta_i}\right)^{1/2}+1\right]\text{的整数部分}\qquad(i=1,\ 2). \tag{3.5}$$

对应于本征值 k_n 的孤立波

$$\zeta_i=\frac{6\beta_i}{\alpha_i}\,k_n^2\mathrm{sech}^2(k_nx-4k_n^3t+\mathrm{const})\qquad(i=1,\ 2).\tag{3.6}$$

但是，对于应该形成上凸孤立波的系统中给定下凹的初始扰动或者应该形成下凹的孤立波的系统中给定上凸的初始扰动，该系统无孤立波生成，初始扰动将演化成一波长逐渐变长、波幅逐渐减少的脉动波列(参见文献[1])．

取 $\sigma_{21}=\sigma_{32}=0.9$，$r_{31}=1$，$A=B=1$，我们计算了 r_{21} 在 0.1～2.0 变化范围内的情况，其结果示于图 2 和表 1 中．图 2 表明线性波速 C_1 和 C_3 随 r_{21} 的增加而增加，而波速 C_2 似乎没有什么变化．此外，还注意到 $C_1\gg1$，而 C_2，$C_3\ll1$，这主要是由于所取的三层流体密度差不大的缘故引起的．对于二层流体，线性波速表达式[8]的分析表明流体密度相差越小，两个波速的差别就越大．对于三层流体情况，由于问题的复杂性，虽没有像二层流体直接可从线性波速表达式解析地分析，但对于不同 σ_{21}，σ_{32} 的计算结果证实了这一点．表 1 表明对于快模式波在界面 I 上无孤立波形成，而在界面 II 上，仅有一个孤立波产生．对于中间模式波，在给定的初始条件下仅在界面 I 上有孤立波产生，当 $r_{21}=0.1\sim0.2$ 时产生两个孤立波，而当 $r_{21}=0.3\sim2.0$ 时只有一个孤立波生成．对于慢模式波，表 1 表明在界面 I 和 II 上都有孤立波产生，而且流体深度比 r_{21} 越小，所产生的孤立波数越多；当 r_{21} 大于 1.1 时(对应于中间层流体厚度大于底层流体厚度的情形)，仅产生一个孤立波．此外，在计算范围内我们可发现界面 I 和 II 上所产生的孤立波数非常接近或相等．

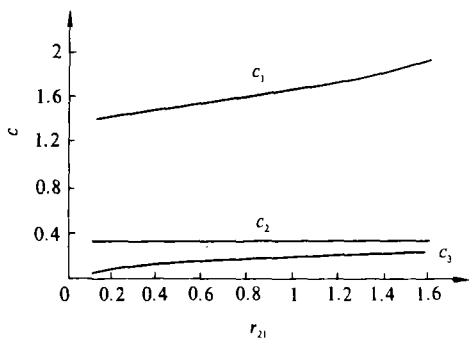


图 2　波速随 r_{21} 的变化

表 1　孤立波数随 r_{21} 的变化

	r_{21}	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
C_1	I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	II	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C_2	I	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	II	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C_3	I	26	13	8	6	5	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	II	25	12	8	6	4	4	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1

表 2 给出了当 $r_{21}=0.1\sim2.9$，$\sigma_{21}=\sigma_{32}=0.9$，$A=B=1$，$r_{31}=0.5$ 时，α_3/β_3，α_1/β_1 的取值符号．由于当 α_i/β_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ 取正值时，孤立波向上凸；而当 α_i/β_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ 取负值时，孤立波向下凹．表 2 表明在自由表面上，可以存在快模式、中间模式和慢模式的上凸孤立波，值得注意的是当 $r_{21}=0.1\sim1.7$ 时，对于慢模式波 $\alpha_3/\beta_3<0$．这说明对于三层流体在自由表面上可能会形成慢模式的下凹孤立波．这个新现象有待于实验的证实．

表2 α_3/β_3, α_1/β_1 符号随 r_{21} 的变化

	r_{21}	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9
C_1	α_1/β_1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	α_3/β_3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
C_2	α_1/β_1	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
	α_3/β_3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
C_3	α_1/β_1	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+
	α_3/β_3	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+

4 结论

将波分类为快模式、中间模式和慢模式波后，发现在界面上很难激发或者是不能激发快模式和中间模式的孤立波，而 Maxworthy[4] 观察到，不管初始扰动有多小，至少有一个孤立波要产生的，最多时 Maxworthy 观察到了 12 个孤立波. 此外，在 Amen 和 Maxworthy[3], Maxworthy[4], Gilreath 和 Brandt[5] 的实验中发现中间层流体厚度越小，所生成的孤立波数越多，且孤立波在两界面上成对产生. 这些实验结果与我们所获得的慢模式孤立波的结果定性是一致的. 此外，还发现了实验还未观察到的现象，即在三层流体的自由表面上有可能存在下凹的慢模式孤立波，这有待进一步的证实.

参 考 文 献

1 Ablowitz M J, Segur H. Soliton and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981

2 Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves. New York: John Wiely and Sons Inc, 1974

3 Amen R, Maxworthy T. The gravitational collapse of a mixed region into a linearly stratified fluid. J Fluid Mech, 1980, 96(1): 65～80

4 Maxworthy T. The formation of nonlinear internal waves from the gravitational collapse of mixed region in two and three dimensions. J Fluid Mech, 1980, 96(1): 47～64

5 Gilreath H E, Brandt A. Experiments on the generation of internal waves in a stratified flow. AIAA J, 1985, 23(5): 693～700

6 朱 勇. 分层流体中混合流体团运动生成内波的研究现状. 力学进展, 1993, 23(1): 34～41

7 朱 勇. 三层流体系统的非线性波演化方程. 水动力学研究与进展. 1995, 10(1): 1～9

8 Kakutani T, Yamasaki N. Solitary waves on a two layer fluid. J Phys Soc Japan, 1978, 45: 674～679