中 国 科 学

1991年4月 B 辑 第4期

经验正交函数在气候数值模拟中的应用*

张邦林 丑纪范

（兰州大学大气科学系，兰州 730000）

摘 要

本文给出了一个缩减大气环流模式自由度的新方法，理论基础是强迫耗散非线性系统的高维相空间将演化到一个低维的吸引子上．具体方法是对模式的一个现实作经验正交函数(EOF)分解，从而找出支撑吸引子的少数自由度，并以此为基底获得简化模型．用一个理论模型进行了数值模拟试验，试验证实了此方法的可行性和有效性．

关键词：气候模拟，数值计算方法，经验正交函数

早在50年代初，Колмогоров 就指出："一般说来，在为了考虑某一现象而采取的数学模型中，研究者的技巧在于寻找一个非常简单的位相空间 Ω（即系统的各种可能状态 ω 的集合），使得当我们把实际过程换成点 ω 在这个空间中的因果式的变迁过程时，仍能抓住实际过程的各个主要方面"[1]．

大气环流为一组偏微分方程所描述，系统具有无穷多个自由度，为了进行数值计算，必须进行离散化，用有限个参数（设为 n）来表征大气的状态，现在的大气全球模式，n 已达500000，需要用现代世界上最大的计算机，而且 n 的数目仍在继续增长．但是，值得注意的是，不论 n 多大，仍然是某种近似，在同等的近似程度下，如何选取合适的参数来描述系统的状态，使 n 最大可能地减小，这样不仅节省计算量，还降低了对计算机的要求，使本来受机器能力限制而不能做的问题也变得可以计算，显然是值得探讨的工作．本文从理论和数值试验两个方面对此问题作了研究．

一、理 论 基 础

大气作为气候系统中的一个成员，是一个强迫耗散的非线性系统，郝柏林指出："由于耗散系统由高维相空间收缩到低维吸引子的演化，实际上是一个归并自由度的过程，耗散消耗掉大量小尺度的较快的运动模式，使决定系统长期行为的有效自由度数目减少，许多自由度在演化过程中成为'无关变量'，最终剩下支撑起吸引子的少数自由度．如果描述系统状态所选取的宏观变量集合中，恰好包括了 $t\to\infty$ 时起作用的自由度，那就会有一个比较成功的宏观描述"[2]．

本文1990年1月17日收到，1990年10月19日收到修改稿．

*国家教委高等学校博士点专项科研基金资助课题．

如所知[3—5]，大气动力-热力的偏微分方程组，可以写成 Hilbert 空间中的算子方程

$$B\frac{\partial\varphi}{\partial t}+N(\varphi)\varphi+P\varphi=\xi, \tag{1}$$

这里 B, P 为正定自伴算子，N 为反伴算子. 利用算子的特征可以证明整体吸收集及其中不变点集的存在性. 随着时间 t 的不断增长，系统将愈来愈靠近某个不变点集，该点集反映了系统的终态. 从物理上讲，也就是系统向外源的适应，在相当广泛的条件下，可以证明该点集是有限维的(与 Folas 和 Teman[6] 证明 Navier-Stokes 方程的吸引子是有限维的，Ghidaglia[7] 证明粘性不可压缩流动的各种方程的吸引子均具有有限维数的方法类似)；可以给出吸引子维数的估计(用类似于 Constanin 等[8] 估计非对流型湍流，Folas 等[9] 估计对流型方程的吸引子维数的方法). 任何数值模式的状态变量都是有限的(设为 n)，已经把问题由 H 空间转到了 R^n 空间了，转换中应保持算子的性质不变，即仍可以写为 R^n 空间的形如(1)式的算子方程. 可以证明在 R^n 中同样存在一个整体吸收的不变点集，且其测度为零. 有理由认为 R^n 中的不变点集与 H 空间的不变点集是相当的. 现设其维数为 p, $m=2p+1$，由 Whitney's 定理[10] 可知，此不变点集能嵌入一个 R^m 空间中，这里 $R^m\subset R^n$，一般 $m\ll n$，显然 R^n 中存在(并非唯一的)一组标准正交基 $e_i(i=1, 2, \cdots, n)$，其中 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 张成 R^m. 当系统状态用这种基的分量来表示时，向吸引子的趋近也就是 $e_{m+1}, e_{m+2}, \cdots, e_n$ 的分量趋近于零. 通过一个可逆的线性变换可将原方程组化为这个基底中的方程组，可以证明经过变换后方程的算子性质仍保持不变(见附录)，对渐近态而言，这方程组实际上只有 m 个，问题是如何找到这组标准正交基.

二、具 体 方 法

出发点是已经有了描述所研究现象的偏微分方程组，甚至已经从理论上估计出了此偏微分方程组的吸引子的维数(或其上界)如为 p, $m=2p+1$，问题是如何找到这 m 个参数，其所张成的 R^m 空间覆盖了吸引子，并找出支配这 m 个参数的 m 个常微分方程组来代替原偏微分方程组. 设取基函数 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 张成 R^n，令

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i Y_i. \tag{2}$$

将关于 φ 的偏微分方程用谱方法转化为关于 φ_i 的常微分方程组. 进行时间积分后得到模式的一个现实，设为 $[\varphi_i(t)]_n$，认定当时间充分长以后，现实进入吸引子状态. 于是 $[\varphi_i(t)]_n\in R^m$，只有 m 个自由度，因此 $\langle\varphi_i(t),\ \varphi_j(t)\rangle=M_{ij}$ 不全为零. 现在如设想 $\varphi=\sum_{K=1}^{n}B_k e_k$, $e_K=\sum_{i=1}^{n}R_k(i)Y_i$，则在吸引子状态，且当 $k>m$ 时，有 $B_k=0$. 而且自然地可要求：

$$\langle B_K(t),\ B_{k'}(t)\rangle=\delta_k^{k'}\lambda_k, \tag{3}$$

有

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}B_k e_k=\sum_{k=1}^{n}B_k\sum_{i=1}^{n}R_k(i)Y_i, \tag{4}$$

由(2)，(4)式得

$$\varphi_i(t)=\sum_{k=1}^{n}B_k R_k(i), \tag{5}$$

于是

$$\langle \varphi_i(t),\ \varphi_j(t)\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} B_K R_k(i),\ \sum_{k=1}^{n} B_K R_k(j)\rangle, \tag{6}$$

即

$$M_{ij} = \sum_k \lambda_k R_k(i) R_k(j). \tag{7}$$

如果 $R_k(i)$是正交归一化函数,(7)式即意味着:

$$ME = \lambda E, \tag{8}$$

这里

$$M = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{vmatrix}, \quad E_k = \begin{vmatrix} R_k(1) \\ R_k(2) \\ \vdots \\ R_k(n) \end{vmatrix}.$$

E的确定实际上就是气象上常用的经验正交函数分解方法,当吸引子能严格嵌入 R^m 空间时,理论上讲只有前 m个特征值不为零,即用前 m个 EOFs 就可以完全精确地分解场 $[\varphi_i(t)]$,当然在实际分解过程中,由于误差等的作用,λ_k 不会严格为零,根据 λ_k 的分布,用 Monto Carlo 方法剔除那些不能通过显著性检验的特征向量 e_{m+1}, e_{m+2}, ……, e_n[11],即认定它们的作用均为随机效应,因此就可以用统计方法选出 R^m 的正交基函数 $e_K(K=1, 2, \cdots, m)$.

在实际研究中,一旦正交基函数确定,我们就可以把 $[\varphi_i]$ 按 e_k 展开,代入偏微分方程组中,直接用 Galerkin 方法获得一个 m阶的常微分方程组.

三、简单数值试验:一个例证

1. 简单数值模式

考虑外部对系统的加热和系统能量的耗散效应,p坐标系中的准地转涡度和能量方程为

$$\frac{\partial \nabla^2\psi}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2\psi) + \beta\frac{\partial \psi}{\partial x} = f_0\frac{\partial \omega}{\partial p} + \mu\nabla^4\psi, \tag{9}$$

$$\frac{R^2}{c^2}\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{R^2}{c^2} J(\psi, T) - \frac{R\omega}{P} = \varepsilon, \tag{10}$$

对加热采用简单的参数化方案,并利用环流异常的正压性等基本假定,不难得到无量纲化的大气模式[1].

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 - \lambda^2)\psi + \rho J(\psi, \nabla^2\psi + \alpha h) + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \mu_1\nabla^4\psi + \mu_2\nabla^2\psi + \mu_3\psi + \mu_4 T_s. \tag{11}$$

式中 λ 为无量纲层结参数,ρ 为 Rossby 数,α 为与地形影响有关的参数,μ_1, μ_2, μ_3 和 μ_4 则是与非绝热参数化有关的参数,对 ψ, h, T_s 依球函数展开,截断波数为 13,则方程(11)转化为一个自由度为 112 的常微分方程系统,以 1h 为时间步长,按蛙跃格式作时间积分.

2. EOF 展开

在方程(11)中给定参数 $\lambda^2 = 25.0$, $\rho = 0.1$, $\alpha = 0.1$, $\mu_1 = 10^{-4}$, $\mu_2 = 10^{-5}$, $\mu_3 = 0.0$, $\mu_4 = 10^{-5}$, 地

1) 张邦林,兰州大学大气科学系博士论文.

形取实际北半球地形，海表温度取 2 波形，令初值为零，共积分了 4 年得到模式演变的一个现实．图 1 给出了 A_0^3 在 541 — 675 模式日间的演变；图 2 则是 A_0^2, B_1^2 对应时段内的二维时间演变．由图可见，演变是混沌的．

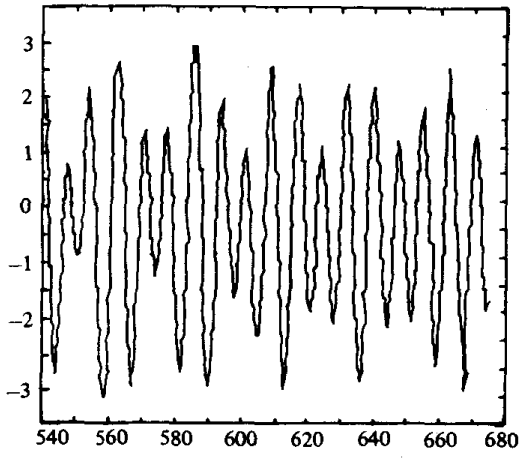


图 1　A_0^3 在 541 — 675 模式日间的演变

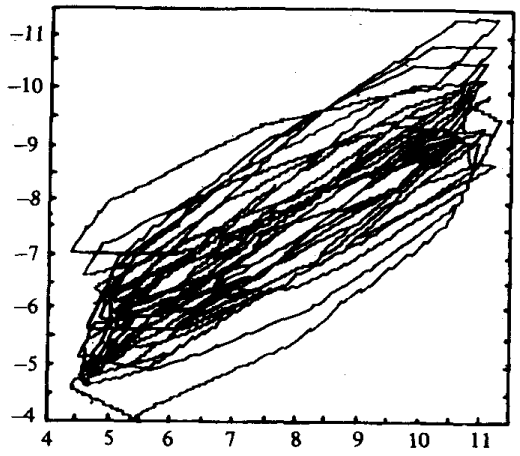


图 2　A_0^2, B_1^2 在 541 — 675 模式日间的二维演变

对模式资料取 135 个模式日为一组资料分段计算其互相关函数矩阵，发现在经过暂态过程之后，许多分量之间的相关系数通过了置信度为 0·05 的显著性检验，这说明各分量间的非独立性是很强的，即从对考虑长期行为而言还可以进一步用较少的自由度来刻划．对各组资料分别作 EOF 分解，表 1 和表 2 给出了各组资料算得的第一特征向量和第二特征向量的互相关系数的绝对值．由表 1 可见，第二组资料开始后的 6 组资料的 EOF 相关性很好，这表明 EOF 展开是稳定的，但第零组资料与其它各组的互相关性较差，则说明在这个时段内运动还在适应过程中，未进入混沌态的演变过程．作为例子，我们再具体研究第四组资料，EOF 展开前 10 个特征向量就解释了方差的 85·96%，根据特征值 λ_K 的分布，得通过置信度为 0·01 的显著性检验的最大允许 $m=30$，即认定 λ_{m+1}, …, λ_n 解释的分量均为随机效应，因此选定的正交基函数数目为 30·它解释了总方差高达99·76%，即原先是一个 112 维系统，可以用自由度为 30 的系统来进行研究而不失去其主要特征．图 3 中的曲线 a 给出了 EOF 展开前 30 个时间系数的互相关系数矩阵各元素绝对值的平均值随时间的分布，曲线 b 则是 112 个球谐系数对应的分布．由图可见，当时间超过 120 个模式日以后，曲线 b 的数值趋于定常，也即运动进入了混沌态；而 EOF 展开的数值远小于对应球谐系数的数值，则表明 EOF 展开可使独立性大大增加．

表1　各组资料EOF1 的互相关系数绝对值

	0	1	2	3	4	5	6
1	0·223						
2	0·225	0·948					
3	0·241	0·904	0·982				
4	0·229	0·888	0·974	0·998			
5	0·231	0·881	0·971	0·997	0·999		
6	0·224	0·881	0·970	0·995	0·999	0·999	
7	0·222	0·881	0·970	0·994	0·998	0·998	0·999

表 2　各组资料EOF2 的互相关系数绝对值

	0	1	2	3	4	5	6
1	0·040						
2	0·126	0·937					
3	0·161	0·895	0·989				
4	0·155	0·876	0·980	0·996			
5	0·158	0·863	0·973	0·991	0·998		
6	0·153	0·863	0·972	0·990	0·998	0·999	
7	0·154	0·865	0·972	0·990	0·997	0·997	1·000

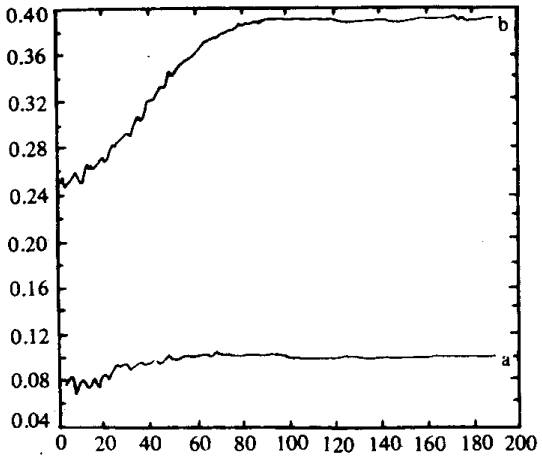


图 3 时间系数的互相关系数矩阵各元素绝对值的平均值随时间的分布
(a——EOF, b——球谐系数)

此外,对初值、参数和强迫项作用施加小的随机扰动,大量的数值试验结果均表明,EOF 分解有较好的稳定性,这就为由 n 维系统转变为 R^m 空间的甚低维系统提供了基本的保证.

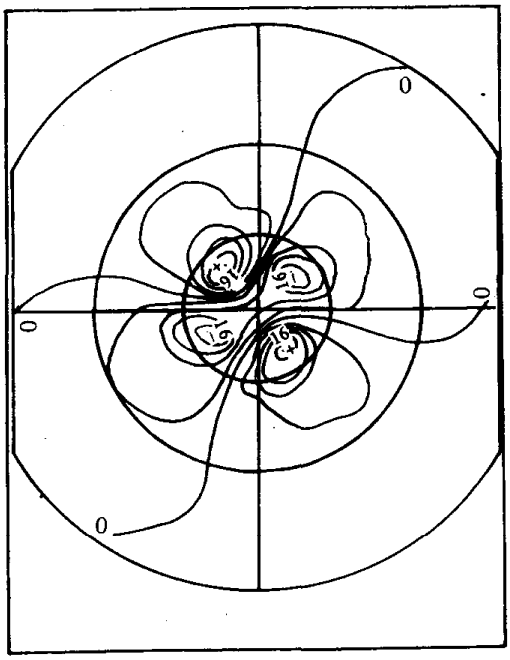
3. 简化模型试验结果

利用模式现实的 EOF 分解结果,把 112 维系统转换为 30 维的系统作为预报方程,表 3 给出了初值在混沌区(试验 1)和暂态区(试验 2)的 10 个预报个例的预报与实况的平均相关系数. 由表 3 可见,在混沌区的预报效果好于暂态区,这就说明了用 EOF 作为正交基函数来简化大气模式是可行的.

用气候模式不能指望作出超出 2—3 周的逐日预报,只能要求正确模拟出统计特征. 平均场是一个最基本的统计量,预报与实况的平均场相关系数达 0.84. 图4(a)和 4(b)分别给出了预报与实况的平均场,由图可见,形势是非常相似的. 这也从一个侧面说明了用一个简化的低维模式是可以研究大气的长期行为.

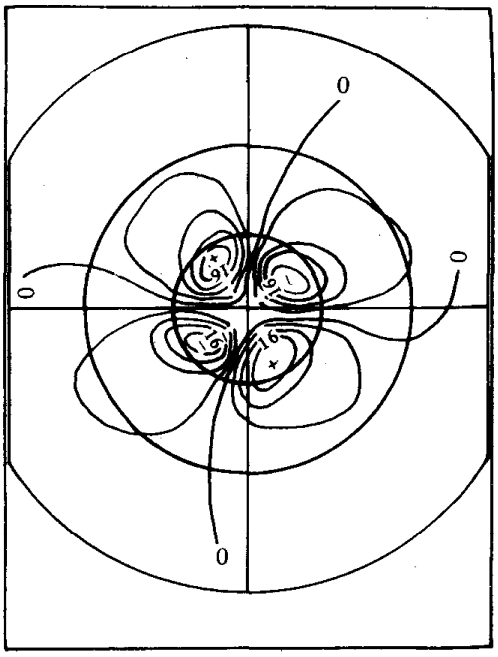
表3 预报与实况的平均相关系数

试验 \ 预报时效(日)	1	2	3
1	0.928	0.867	0.779
2	0.848	0.787	0.698



(a)

图 4(a) 541—810 模式日间的预报平均场



(b)

图 4(b) 541—810 模式日间的实况平均场

四、结 语

上面讨论的一个前提是我们知道了一个强迫耗散系统准确的偏微分方程,从理论上讲,它

的长期行为会收缩到一个有限的自由度较少的吸引子上，这为我们用一个自由度较少的模型研究其长期行为提供了可能性．利用数值积分获得一个现实，作经验正交函数分解，以EOF作正交基函数就可以把复杂的偏微分方程转化为一个简化的模型．但是实际问题恰恰相反，描述大气和海洋现象的准确的偏微分方程是我们还不知道的，而实况观测资料却可以看作是这个方程比较准确的积分，在这方面无疑还需进行一些更深入的研究．我们相信，沿着本文的方向可以走向一个新的领域，即对气候形成机制及其预测的问题研究中，把现有物理知识和实际观测资料的知识有机的、更好的结合起来，以求获得一个与实际现象更为一致的模型．另一方面，这样的简化模型不仅节省了计算量，还使本来受机器能力限制而不能做的问题也变得可以计算．这对在相当长一段时间内我国计算机性能还达不到情况下，进行运算是格外有意义的．

附　录

大气模式总可以写成算子方程：

$$B\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(N+L)\varphi=\xi, \tag{1}$$

其中 B, L 为正定自伴算子，N 为反伴算子．设有变换

$$Z(t)=E^{-1}\varphi(t), \tag{2}$$

则(1)式可转变为

$$E^{-1}BE\frac{\partial E^{-1}\varphi(t)}{\partial t}+(E^{-1}NE+E^{-1}LE)E^{-1}\varphi(t)=E^{-1}\xi,$$

$$E^{-1}BE\frac{\partial Z(t)}{\partial t}+(E^{-1}NE+E^{-1}LE)Z(t)=E^{-1}\xi. \tag{3}$$

若 E 为归一化正交变换，则 $E^{-1}BE$, $E^{-1}LE$ 仍为正定自伴算子，$E^{-1}NE$ 为反伴算子．

证．$E^{-1}BE$ 为自伴算子，$E^{-1}NE$ 为反伴算子，即要使

$$(E^{-1}BE)^*=E^{-1}BE,\ (E^{-1}NE)^*=-(E^{-1}NE),$$

而

$$(E^{-1}BE)^*=E^*B^*(E^{-1})^*=E^*B(E^*)^{-1},$$
$$(E^{-1}NE)^*=E^*N^*(E^{-1})^*=-E^*N(E^*)^{-1}.$$

所以要求

$$E^{-1}=E^*. \tag{4}$$

此时，$E^{-1}BE$ 必是正定算子，这是因为对任意的 $Z\in L^2(R^n)$ 有

$$(E^{-1}BEZ,\ Z)=(BEZ,\ (E^{-1})^*Z)=(BEZ,\ EZ)=(B\varphi,\ \varphi)\geqslant 0. \tag{5}$$

又 $E^{-1}=E^*$，即为

$$\sum_{j=1}^{n}e_{ij}e_{Kj}^*=\delta_i^K, \tag{6}$$

这就是正交归一化矩阵的定义．

反之，由 E 是正交归一化矩阵可推出 $E^{-1}BE$, $E^{-1}LE$ 为正定自伴算子，$E^{-1}NE$ 为反伴算子．显见经验正交函数分解的EOF是满足此条件的，所以变换后方程的算子性质仍保持不变．

参 考 文 献

[1] Александров А. Д. и др., *Математика, Её содержание, методы и значение*, Том 2, Издательство Академии Наук СССР, 1956.

[2] 郝柏林，物理学进展，**3**(1983)，3.

[3] 丑纪范，气象学报，**41**(1983)，385—392.

[4] 江守宏、黄建平、丑纪范，中国科学B 辑，1989, 3: 308—336.

[5] 丑纪范，长期数值天气预报，气象出版社，1986, 66—78.

[6] Folas, C. & Teman, R., *J. Math. Pures Appl.*, **58**(1979), 339—368.

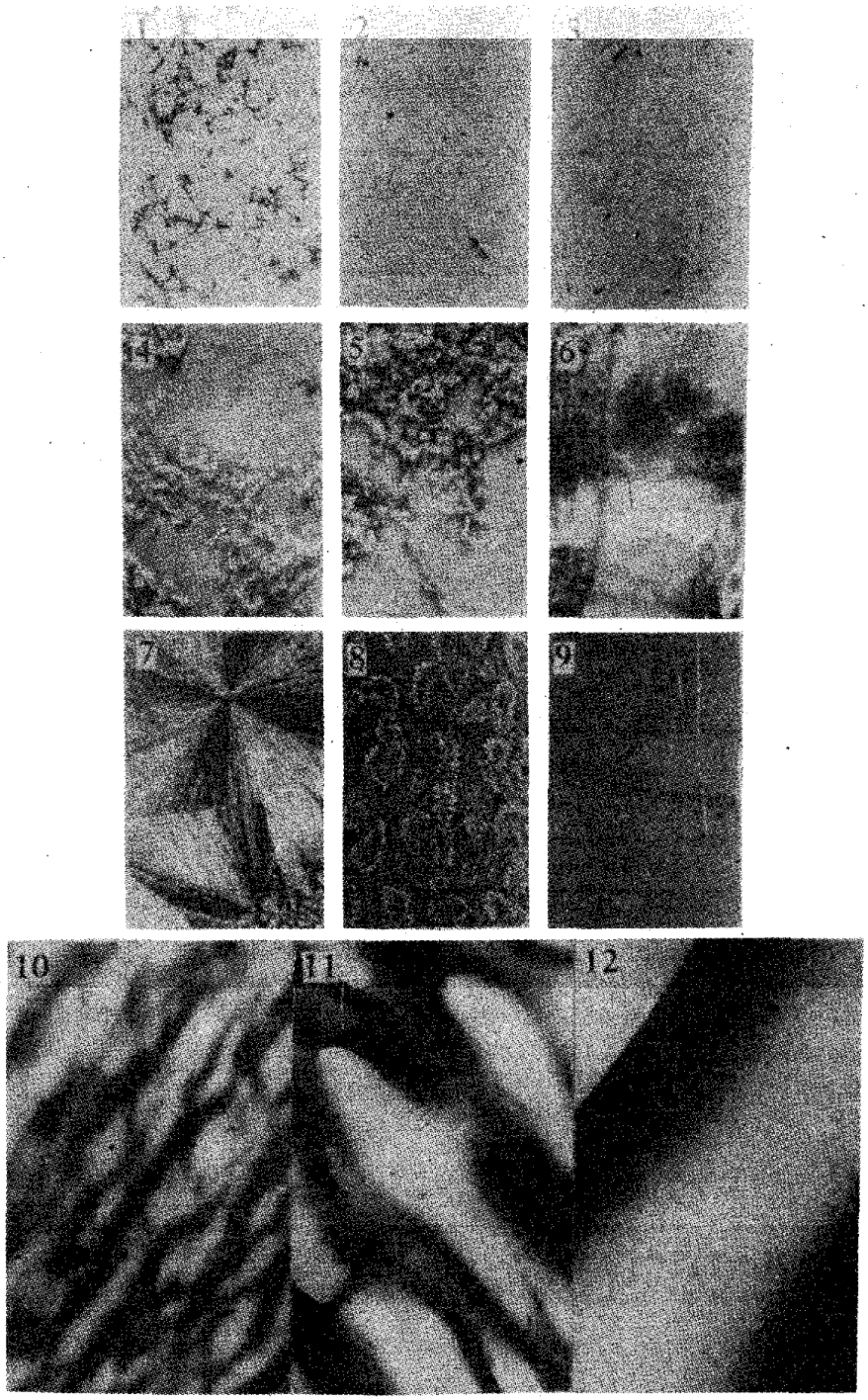
[7] Ghidalia, J. M., *Siam. J. Math. Anal.*, **17**(1986), 1139—1157.

[8] Constanin, P., Folas, C. & Teman, R., *Mem. Am. Math. Soc.*, **53**(1985), No. 314.

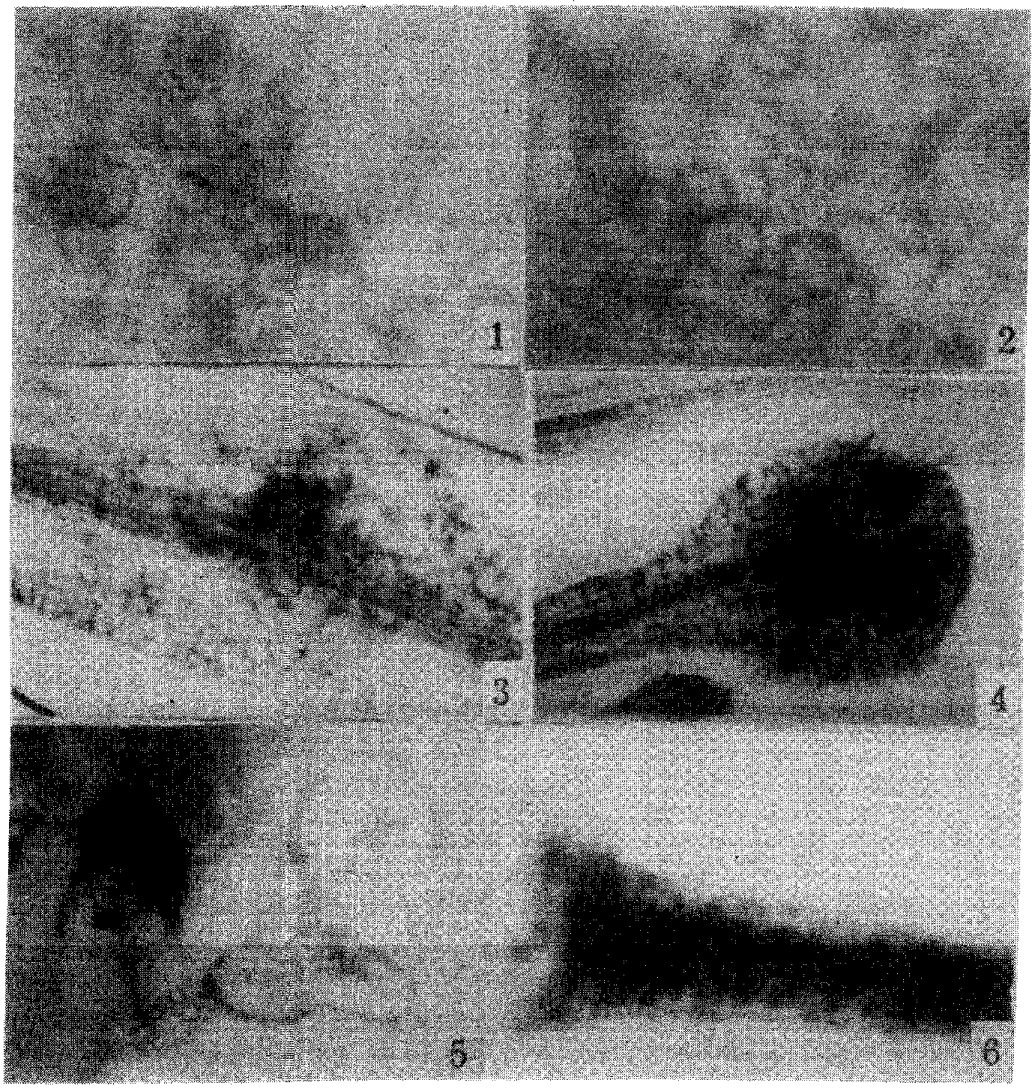
[9] Folas, C., Manley, O. & Teman, R., *Theory Meth. & Appl.*, **11**(1987), 939—967.

[10] Whitney, H., *Ann. Math.*, **37**(1936), 645.

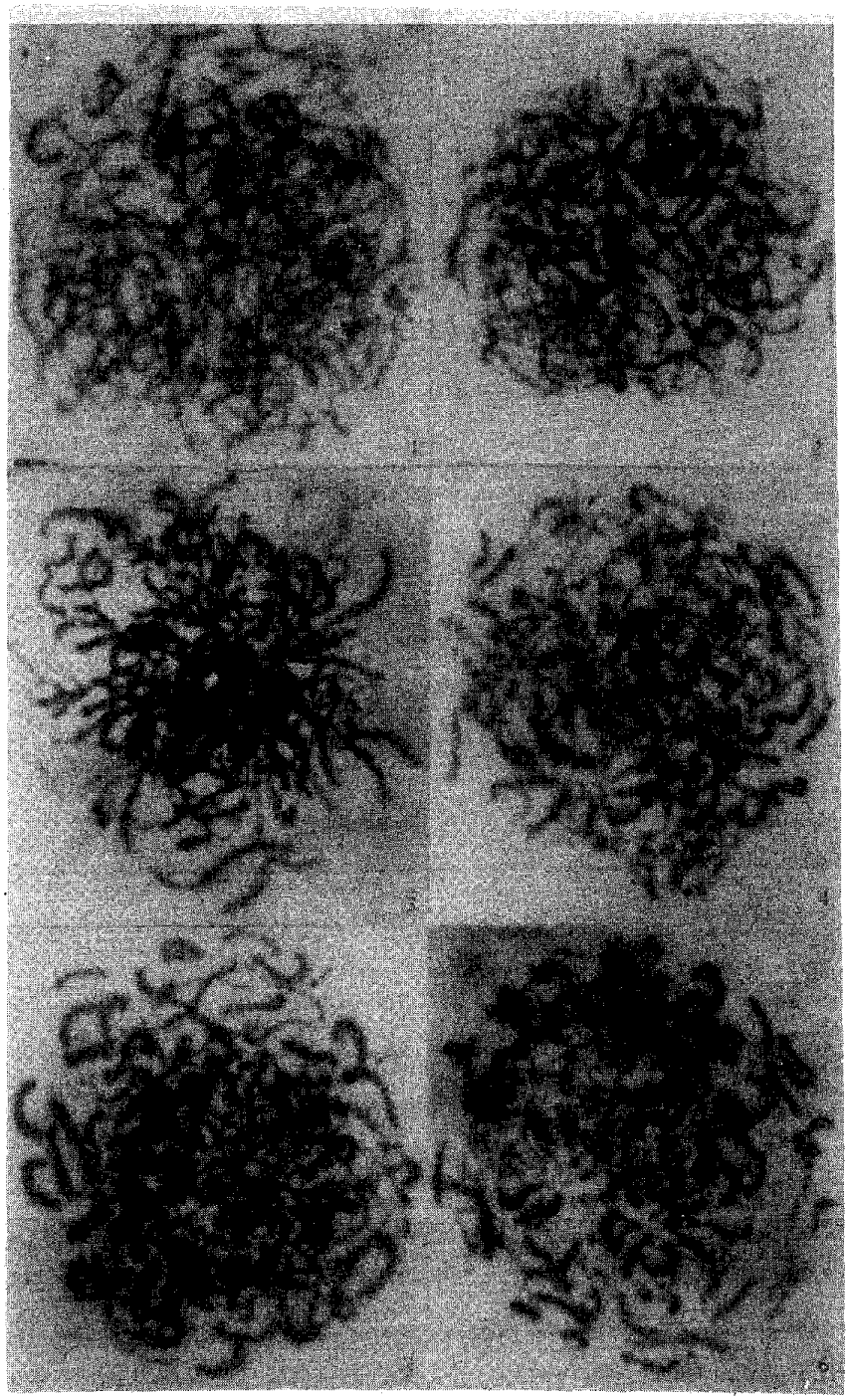
[11] Preisendorfer, R. W. & Barnett, T. P., *Am . Met. Soc. Fifth Conf. on Probability and Statistics in Atmospheric Sciences*, 1977, Las Vegas, 169—172.



1—3 溶液 pH 值对复合物形态的影响. 1. pH=3.5; 2. pH=7; 3. pH=9, 相差显微镜照片　×100, t=5 min.
4—6 复合时间对复合物形态影响的相差显微镜照片. ×1000, 4. 5 min; 5. 1 h; 6. 72h, pH=5.
7—9 PEO 与 P(MMA-MAA)/PEO 体系的偏光显微镜照片, 7. PEO; 8. 未复合体系; 9. 复合体系, ×100.
10—12 P(MMA-MAA)/PEO 复合物的透射电子显微镜照片. 10. ×6700; 11. ×20000; 12. ×100000.



1. 在液体培养基内，根肿菌次生原质团在甘蓝转化根根皮层组织内分裂，×640；　2. 根皮层细胞受次生原质团刺激而增生扩张，×640；　3. 在液体培养基内，甘蓝转化根根段中间膨大形成肿块，×320；　4. 转化根侧根顶端膨大形成肿块，×320；　5. 在半固体培养基内，根肿菌侵入甘蓝转化根根段切口处的细胞内，×640；　6. 根段切口处受根肿菌刺激膨大起来，×66.

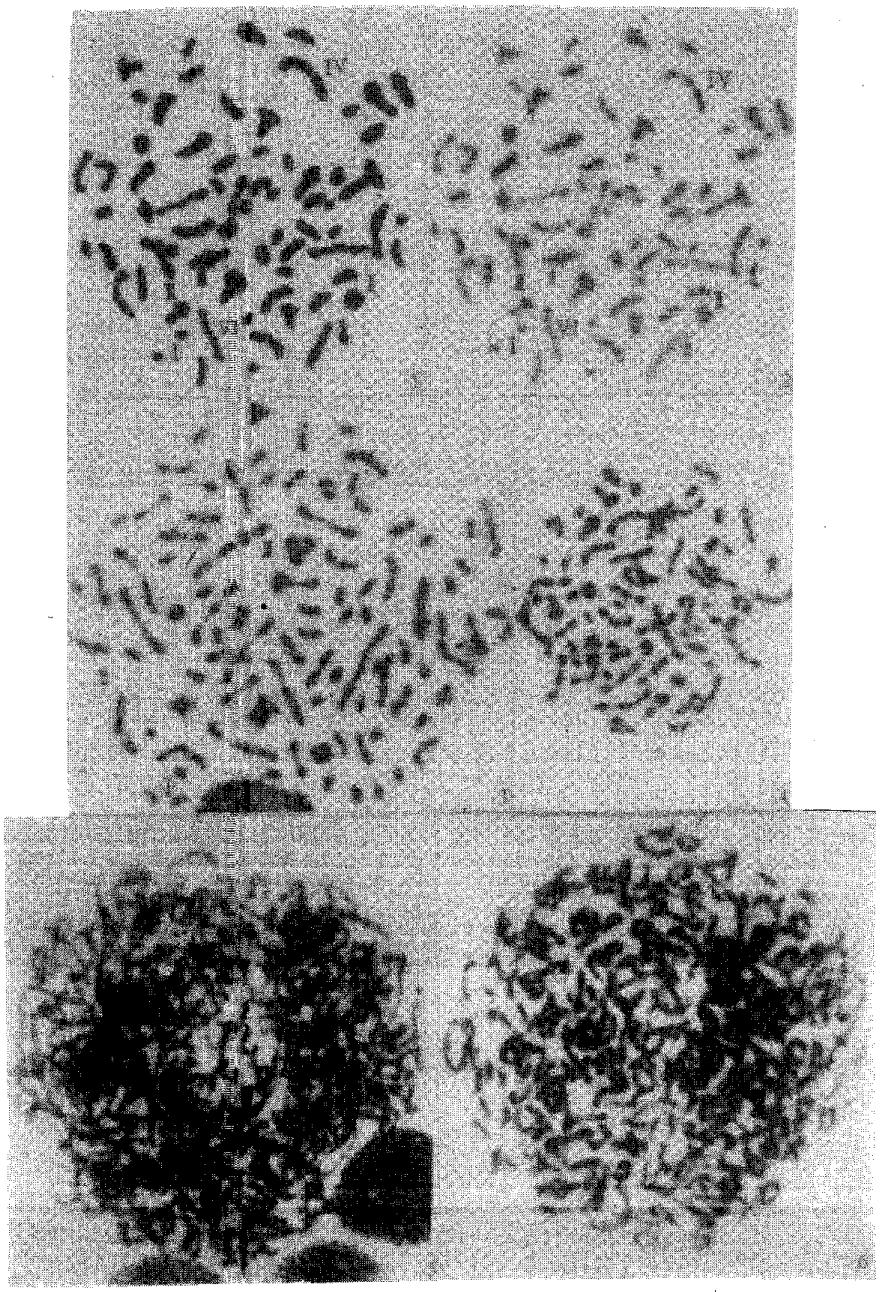


1，2．由空气干燥法获得的偶线期细胞图象

1.具有很多配对叉(箭头所示)的早偶线期细胞．　2.部分染色体已完成配对的晚偶线期细胞，　×2800．

3—6．由空气干燥法获得的粗线期染色体图象

3.具有"三联配对"三价体(箭头所示)的早粗线期细胞；4.具有部分复合配对多价体(箭头所示)的中粗线期细胞；5.具有部分配对三价体(大箭头所示)和在端粒处联合的四价体(小箭头所示)的中粗线期细胞；6.具有部分配对三价体(大箭头所示)和在着丝粒处相联四价体(小箭头所示)的晚粗线期细胞，×2800．

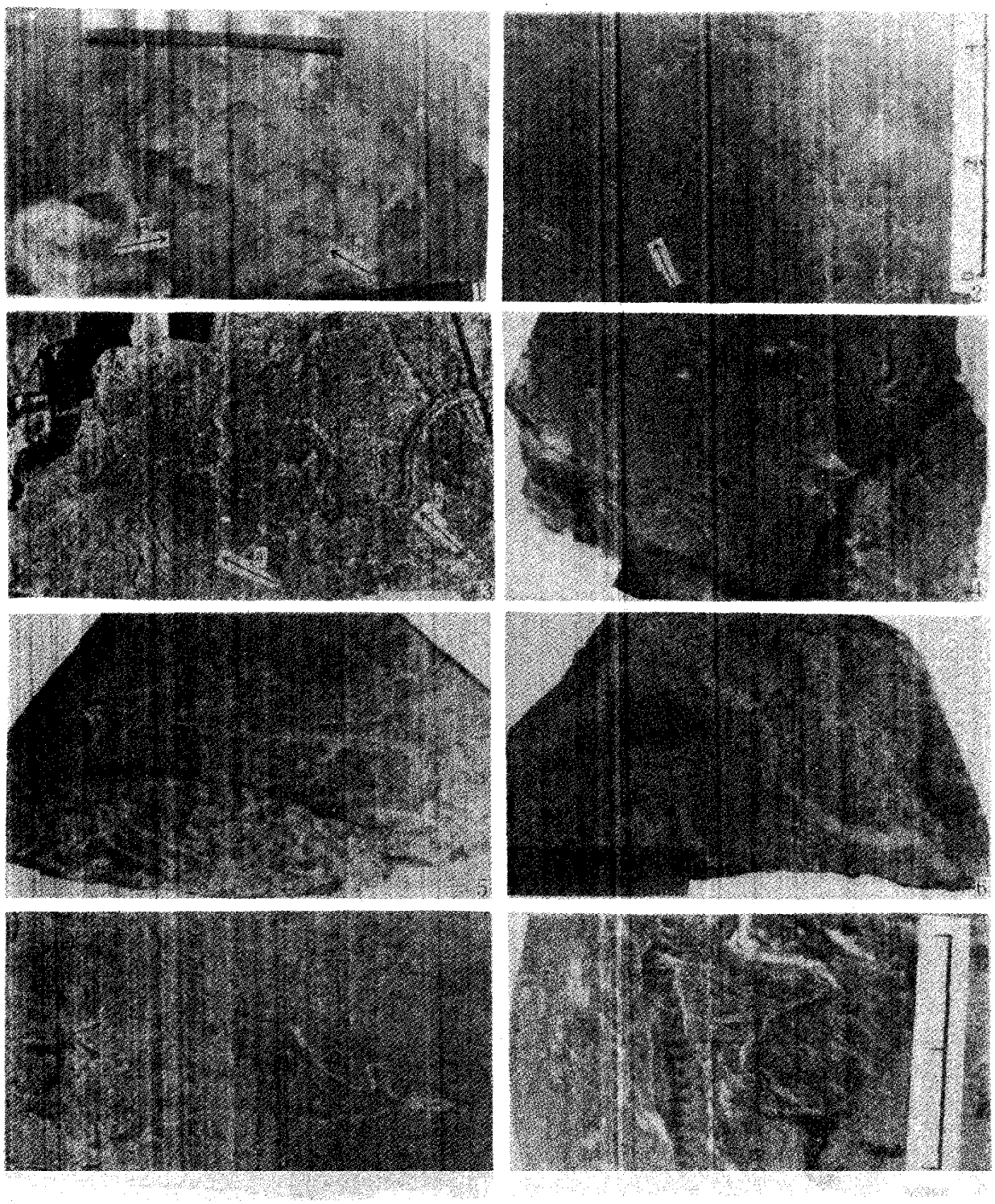


1—4. 具有不同染色体成员数和构型的中期 I 图象

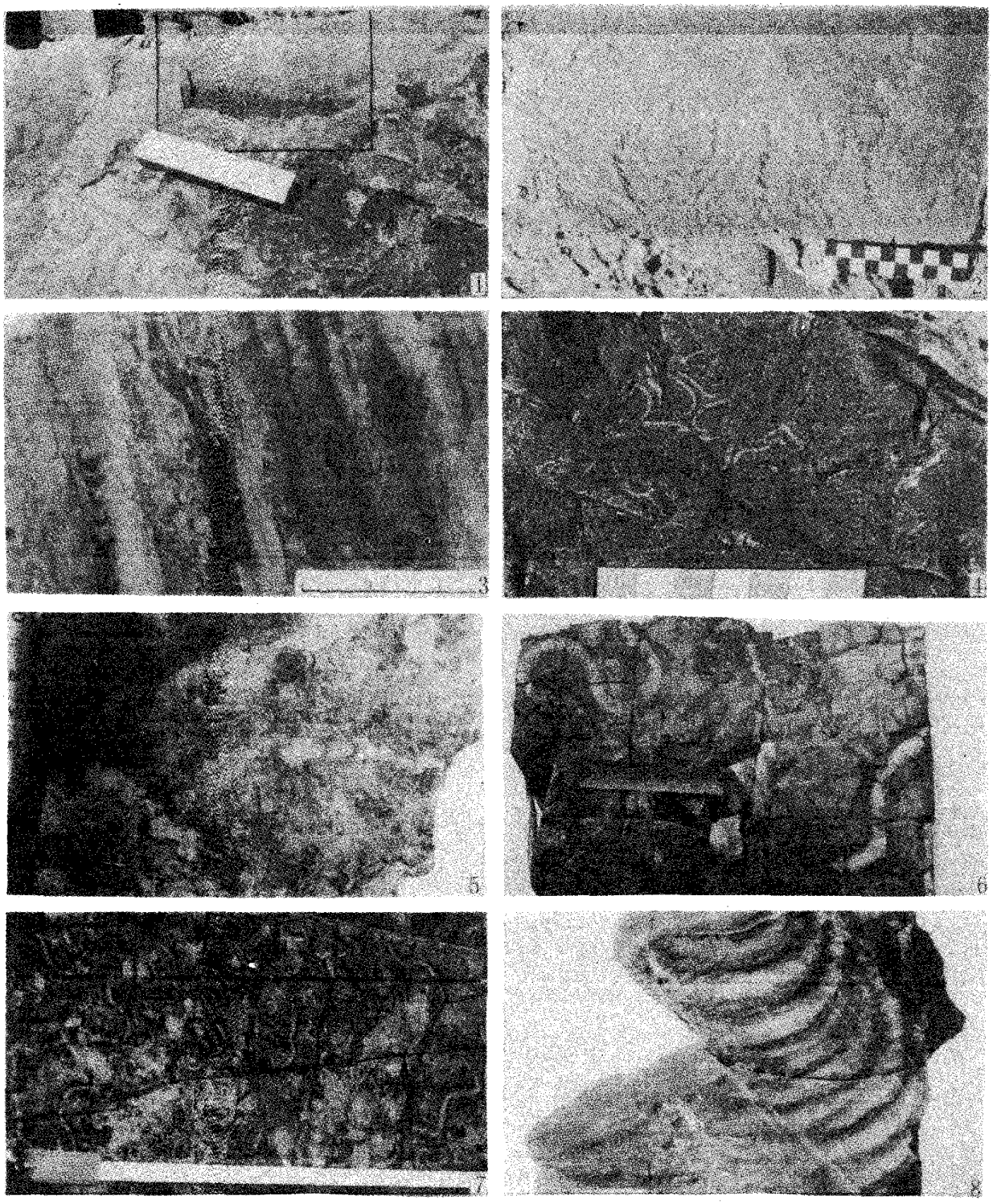
1，2. 分别为同一中期细胞的常规染色和 C 带图象，具 70 个染色体成员，构型为 21 I+27 II+15III+6 IV+1VI；3. C 带图象，具 90 个染色体成员，构型为 43I+34II+13III；4. C 带图象，具 62 个染色体成员，构型为 14I+13II+31III+3IV+1V，×3080

5. 六倍体的粗线期，箭头示重复配对的三价体，×2100

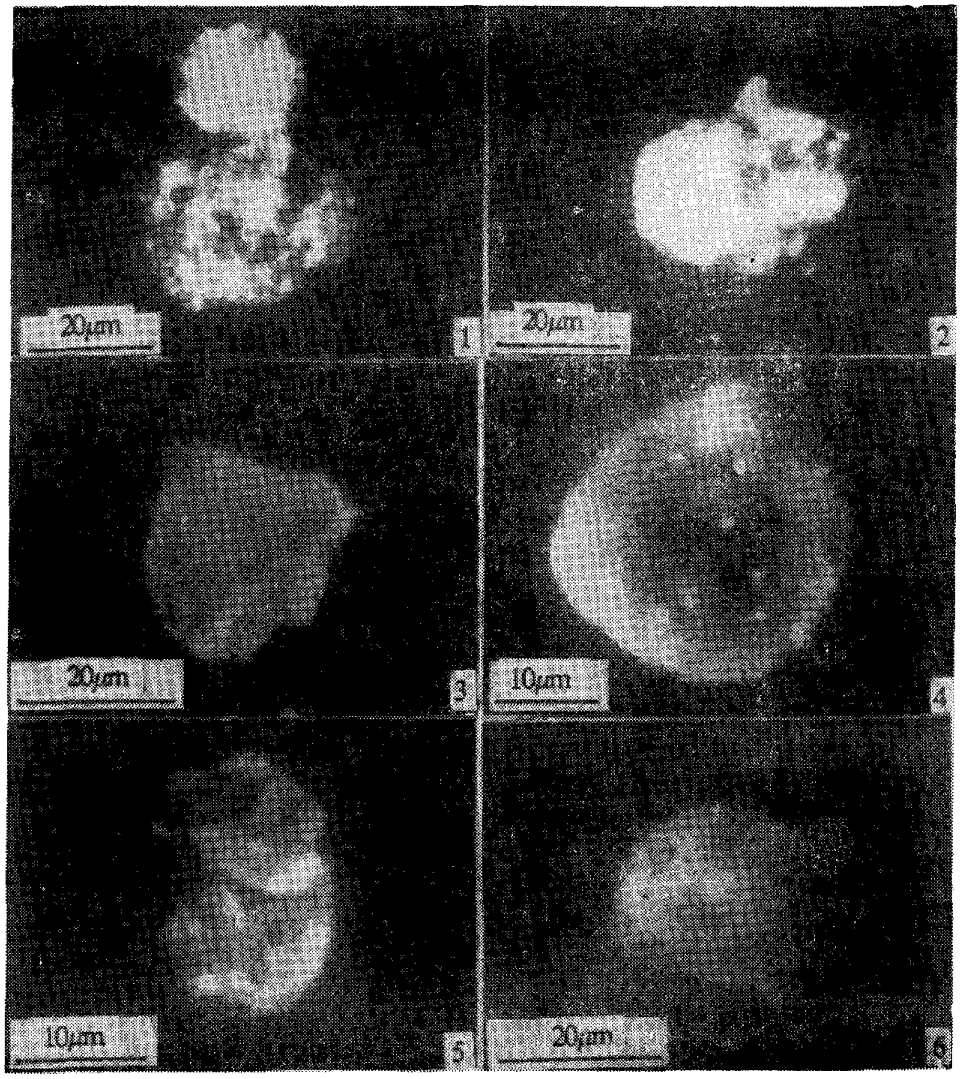
6. 六倍体的双线期细胞，×2100 .



山,中石炭统; 7. *Helminthopsis*,哈拉阿拉特山,中石炭统,白线段长:2cm; 8. *Imponogyphus*,哈拉阿拉特山,中石炭统.



1. *Lophoctenium*, 哈拉阿拉特山，中石炭统，比例尺长：10 cm; 2. *Nereites*, 伊林哈比尔根山，中石炭统; 3. 左. *Zoophycos*, 札依尔山，下石炭统; 3右. *Planolites* (横断面)，札依尔山，下石炭统; 4. *Phycosiphon*, 伊林哈比尔根山，中石炭统; 5. *Parascalarituba*, 哈拉阿拉特山，中石炭统; 6. *Scalarituba*, 札依尔山，下石炭统; 7. *Scalarituba*, 札依尔山，下石炭统; 8. *Spirophyton*, 博格达山，下二叠统，白线段长：5 cm.



1. SP-4 宇宙尘，2. SP-2 宇宙尘(？)，3. SP-9 宇宙尘(？)，
4. SP-5 微玻璃陨石，5. SP-7 尘粒，6. SP-14 尘粒