

大气运动的自忆性方程

曹 鸿 兴

(中国气象科学研究院, 北京 100081)

摘 要

基于大气运动是一种不可逆过程的观点, 引进了忆及过去时次资料的记忆函数. 通过定义 Hilbert 空间中的内积, 导出了大气运动的自忆性概念, 从而把通常的大气运动方程推广为包含多时次观测的自忆性方程. 作为示例, 文中给出了正压无辐散模式和正压原始方程模式的自忆性方程.

文中证明了现存的若干差分格式可以通过给记忆函数以特殊值而从自忆性方程中导出, 论证了现有的多时次数值预报模式可以统一在自忆性方程的框架中. 在求记忆函数时若采用随机型方法, 就可使自忆性方程变为一种动力-统计预报模型.

关键词 记忆、不可逆过程、数值天气预报、差分格式、随机-动力模式

1 引 言

根据微分方程的经典理论, 只要给定一个时刻的初值就可以求解方程, 也就构成了数值天气预报的数学基础. 早在 50 年代, 顾震潮就指出了数值预报只用一个初始场而经验预报运用初始时刻以前的多个时次的资料间的差异^[1]. 随后我国学者先后从不同原理和准则提出了能容纳多时次资料的预报模式^[2-4]. 计算表明, 这些模式是有一定预报能力的.

混沌现象及其理论研究是当今自然科学的历史性的发展方向之一. 它一方面沟通了决定论与随机论的鸿沟, 另一方面也给事物的可预报性提出了质疑. 混沌学告诉我们, 即使在一个简单的动力系统中也因为非线性而产生随机行为, 这意味着, 兼顾动力和随机双重性的预报模式是势在必行的^[5].

本文从定义 Hilbert 空间中的内积出发, 导出了一种新的大气运动方程. 鉴于大气运动的不可逆性, 从物理角度提出了自忆性概念, 推演了一般性的和特殊数值模式的自忆性方程. 进而论证了现存的使用过去若干时次资料的数值预报模式都可统一在自忆性方程中, 一些典型的差分格式也可以从自忆性方程中导出.

2 数 学 原 理

时间集合 $T=[t_p \cdots t_0 \cdots t_q]$, 其中 t_0 为起报时刻; 空间集合 $R=[r_\alpha \cdots r_i \cdots r_\beta]$, 其中 r_i 为被考察的空间点. 内积空间 $L^2: T \times R$ 由内积

$$(f, g) \equiv \int_a^b f(\xi) g(\xi) d\xi, \quad f, g \in L^2 \quad (2.1)$$

来定义, 相应地定义范数

$$\|f\| = \left[\int_a^b (f(\xi))^2 d\xi \right]^{1/2}, \quad (2.2)$$

易证它满足 Cauchy-Schwarz 不等式^[6]:

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|. \quad (2.3)$$

将内积空间完备化就得到 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$. 可将多时次模式的解视为 $\mathcal{H}$ 中的广义解. 不失一般性, 大气动力-热力方程组可写为

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = F_i(x, \lambda, t), \quad i=1, 2, \dots, J, \quad (2.4)$$

J 为整数, x_i 为第 i 个物理量, λ 为物理参数. 为简便计, 下文中只考虑一个物理量 x . (2.4) 式表达了 x 的局地变化与扰源函数 F 的关系. 显然 x 是空间 r 和时间 t 的标量函数. 定义记忆函数:

$$\beta(r, t) \in \mathcal{H} \quad (2.5)$$

在本节推导中固定在空间点 r_i 上, 故在 β 中省写 r . 在 (2.4) 式中抹去 i 后, 运用 (2.1) 式定义的内积运算到 (2.4) 式上得

$$\int_{t_0}^t \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial t} d\tau = \int_{t_0}^t \beta(\tau) F(x, \lambda, \tau) d\tau. \quad (2.6)$$

显然, 也可视 (2.6) 式为对 (2.5) 式的一种加权积分, 权重即为记忆函数.

对 (2.6) 式左边用分部积分得

$$\int_{t_0}^t \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau = \beta(t)x(t) - \beta(t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^t x(\tau)\beta'(\tau) d\tau, \quad (2.7)$$

式中

$$\beta'(t) = \frac{\partial \beta(t)}{\partial t}.$$

为简便计, 令 $\beta_t \equiv \beta(t)$, $\beta_0 \equiv \beta(t_0)$, $x_t \equiv x(t)$, $x_0 \equiv x(t_0)$, 类似的符号可类推. 对 (2.7) 式右边第三项运用微积分中的中值定理得

$$-\int_{t_0}^t x(\tau)\beta'(\tau) d\tau = -x_0^m(\beta_t - \beta_0), \quad (2.8)$$

式中, 中值 $x_0^m \equiv x(t_m)$, $t_0 < t_m < t$. 将(2.7)式和(2.8)式代入(2.6)式, 经归并移行得

$$x_t = \frac{\beta_0}{\beta_t} x_0 + \frac{\beta_t - \beta_0}{\beta_t} x_0^m + \frac{1}{\beta_t} \int_{t_0}^t \beta(\tau) F(x, \lambda, \tau) d\tau, \quad (2.9)$$

(2.9)式的右边第一和第二项, 只涉及到本空间点(即 r_i 点)的初始时刻 t_0 和中间时刻 t_m 的预报量 x 的值, 故称它们为自忆项; 而称第三项为他效项, 即其他空间点对 r_i 点的在时间间隔 $[t_0, t]$ 中的总效应. (2.9)式的物理意义是, 第 r_i 点在时刻 t 的 x 值等于本点过去 x 值的自忆效应加上空间项 $F(x, \lambda, t)$ 与记忆函数乘积的累计和. 若令 $\beta_0 = \beta_t = 1$, 即记忆函数恒为 1, 则(2.9)式变为

$$x_t = x_0 + \int_{t_0}^t F(x, \lambda, \tau) d\tau, \quad (2.10)$$

即大气动力-热力方程的通常求解, 这是数值天气预报和大气数值模拟的途径. 反之, (2.9)式是(2.10)式的一种推广, 它强调空间点上的物理量本身前后的影响.

对多个时次 t_i , $i = -p, -p+1, \dots, t_0, t$, 对(2.4)式进行积分得

$$\begin{aligned} & \int_{t_{-p}}^{t_{-p+1}} \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau + \int_{t_{-p+1}}^{t_{-p+2}} \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau + \dots + \int_{t_0}^t \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau \\ &= \int_{t_{-p}}^t \beta(\tau) F(x, \lambda, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

类似于(2.7)和(2.8)式, 且消去相同的项 $\beta_i x_i$, $i = -p+1, -p+2, \dots, 0$, 得

$$\beta_t x_t - \beta_{-p} x_{-p} - \sum_{i=-p}^0 x_i^m (\beta_{i+1} - \beta_i) - \int_{t_{-p}}^t \beta(\tau) F(x, \lambda, \tau) d\tau = 0, \quad (2.11)$$

这是一个差分-积分方程, 称它为自忆性方程. 令 $p=0$, 则有时次 t, t_0 , (2.11)式变为(2.9)式, 称(2.9)式为 0 阶自忆性方程. 若 $p=1$, 则有时次 t, t_0, t_{-1} , (2.11)式变为

$$\beta_t x_t - \beta_{-1} x_{-1} - x_{-1}^m (\beta_0 - \beta_{-1}) - x_0^m (\beta_t - \beta_0) - \int_{t_{-1}}^t \beta(\tau) F(x, \lambda, \tau) d\tau = 0, \quad (2.12)$$

称(2.12)式为 1 阶自忆性方程. 同理, 称(2.11)式为 p 阶自忆性方程. 令 $x_{-p} \equiv x_{p-1}^m$, $\beta_{-p-1} = 0$, (2.11)可写为

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{1}{\beta_t} \sum_{i=-p-1}^0 x_i^m (\beta_{i+1} - \beta_i) + \frac{1}{\beta_t} \int_{t_{-p}}^t \beta(\tau) F(x, \lambda, \tau) d\tau \\ &= S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

也就是在 r_i 点的预报量在时次 t 的值 x 为自忆项 S_1 和他效项 S_2 的共同贡献.

设预报量在起报时次 t_0 的值为 x_0 , 将 x_0 代入(2.4)式的右边求得 $\Delta x|_{t_0}$, 然后有 $x_1 = x_0 + \Delta x|_{t_0}$, 再将 x_1 代入(2.4)式得 $\Delta x|_{t_1}$, 也就是当求 $x_2 = x_1 + \Delta x|_{t_1}$ 时, 模式只用了 x_1 的值, 已将 x_0 的值遗忘. 所以这是一种 Markov 过程, 即下时刻的值只与上一时刻的值有关. 这是通常的数值天气预报的作法. 若用(2.11)式作预报时, 模式始终要用到 t_0 以前 p 个值, 因此(2.11)式

中 $\beta(i)$ 起了记忆 $p+1$ 个时次 x 的效应的功能, 所以称 $\beta(i)$ 为记忆函数. 这是引进记忆函数的数学理由. 引进记忆函数的物理基础是, 大气运动方程组中包含热力学方程, 由于大气是一个开放系统, 不时接受太阳能和发射红外辐射, 因此大气运动是一种不可逆过程. 不可逆过程研究对物理学的杰出贡献是将记忆概念引进物理中, 也就是说, 大气的未来发展不仅与上一时刻的, 而且与它过去的状态有关, 即大气并不遗忘它的过去. 对这种记忆性, 在这里引进记忆函数来表征.

3 自忆性方程的求解

3.1 最小二乘解

对(2.13)式, 积分用求和替代, 微分变为差分, 中值 x_i^m 简单地用两个时次的值替代, 即

$$x_i^m = \frac{1}{2} (x_{i+1} + x_i) \equiv y_i.$$

设时次为 $t, t_0, t_{-1}, \dots, t_{-p}$, 取等距时次间隔, 可令 $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = 1$. 将 β_i 和 β_i 合写, 则得离散形式的自忆性方程:

$$x_i = \sum_{i=-p-1}^{-1} \alpha_i y_i + \sum_{i=-p}^0 \theta_i F(x, \lambda, i), \quad (3.1)$$

$$\text{式中} \quad \alpha_i = (\beta_{i+1} - \beta_i) / \beta_i \quad \theta_i = \beta_i / \beta_i. \quad (3.2)$$

因此只要求得 α_i, θ_i 的值, 就可用(3.1)式求得时次 t 的预报量 x_i .

现在用 L 个时次的历史资料用最小二乘来求记忆系数 α_i 和 θ_i , 设空间共 N 个点. 记

$$X_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{iL} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{-p-1} \\ \alpha_{-p} \\ \vdots \\ \alpha_{-1} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_{-p1} & y_{-p+11} & \cdots & y_{01} \\ y_{-p2} & y_{-p+12} & \cdots & y_{02} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{-pL} & y_{-p+1L} & \cdots & y_{0L} \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{-p} \\ \theta_{-p+1} \\ \vdots \\ \theta_0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F(x, \lambda, -p)_1 & F(x, \lambda, -p+1)_1 & \cdots & F(x, \lambda, 0)_1 \\ F(x, \lambda, -p)_2 & F(x, \lambda, -p+1)_2 & \cdots & F(x, \lambda, 0)_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F(x, \lambda, -p)_L & F(x, \lambda, -p+1)_L & \cdots & F(x, \lambda, 0)_L \end{bmatrix},$$

则得矩阵方程

$$X_i = Y\alpha + F\Theta. \quad (3.3)$$

令

$$Z = [Y \ F], \quad W = \begin{bmatrix} \alpha \\ \Theta \end{bmatrix},$$

则(3.3)式变为

$$X_i = ZW,$$

其最小二乘解为

$$W = (Z^T Z)^{-1} Z^T X_i. \quad (3.4)$$

如果进一步设记忆函数不仅是时间的函数且是空间的函数, 则对 α 和 Θ 显然各有 $\tilde{N}=N \times (p+1)$ 个元素, 记为 $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\Theta}$, 将其排为一列. 而 $\tilde{Y}$ 和 $\tilde{\mathcal{F}}$ 有 $L \times \tilde{N}$ 个元素, 将其排为长方阵, 即

$$\tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{-p-1}^1 \\ \alpha_{-p}^1 \\ \vdots \\ \alpha_{-1}^1 \\ \alpha_{-p-1}^2 \\ \alpha_{-p}^2 \\ \vdots \\ \alpha_{-1}^2 \\ \vdots \\ \alpha_{-p-1}^N \\ \vdots \\ \alpha_{-1}^N \end{bmatrix}_{\tilde{N} \times 1}, \quad \tilde{Y} = \begin{bmatrix} y_{-p1}^1 & y_{-p+11}^1 & \cdots & y_{01}^1 & y_{-p1}^2 & \cdots & y_{01}^2 & \cdots & y_{-p1}^N & \cdots & y_{01}^N \\ y_{-p2}^1 & y_{-p+12}^1 & \cdots & y_{02}^1 & y_{-p2}^2 & \cdots & y_{02}^2 & \cdots & y_{-p2}^N & \cdots & y_{02}^N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{-pL}^1 & y_{-p+1L}^1 & \cdots & y_{0L}^1 & y_{-pL}^2 & \cdots & y_{0L}^2 & \cdots & y_{-pL}^N & \cdots & y_{0L}^N \end{bmatrix}_{L \times \tilde{N}}.$$

类似可排得 $\tilde{\Theta}$ 和 $\tilde{\mathcal{F}}$, 同理与 (3.3) 和 (3.4) 式得记忆系数阵 $\tilde{W}$ 的最小二乘估计:

$$\tilde{W} = (\tilde{Z}^T \tilde{Z})^{-1} \tilde{Z}^T X, \quad (3.5)$$

式中

$$\tilde{Z} = [\tilde{Y}; \tilde{\mathcal{F}}], \quad \tilde{W} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \cdots \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix}.$$

3.2 记忆函数的指派

运用某种物理原理或计算原则来指派记忆函数, 正如同在模糊集理论中指派隶属函数那样. 例如, 设计指数型的记忆函数, 其值随着远离起报时刻, 即 t_{-p} 中 p 增大而衰减.

4 无辐散正压模式

在气象中为大家所熟知的无辐散正压模式为

$$\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -J(\psi, \Delta \psi + f), \quad (4.1)$$

式中 ψ 为流函数, Δ 为水平 Laplace 算子, J 为水平 Jacobian 算子, f 为 Coriolis 参数. 令 $q \equiv \Delta \psi$, 运用推导 (2.11) 式相同的原理, 即用 $\beta(r, t)$ 乘 (4.1) 式两边并积分:

$$\int_{t_{-p}}^t \beta(r, \tau) \frac{\partial q}{\partial \tau} d\tau = - \int_{t_{-p}}^t \beta(r, \tau) J(\psi, q + f) d\tau. \quad (4.2)$$

用向前差分 $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j = 1$, 积分用求和替代, 求得离散形式的关于 q 的方程:

$$q_i = \alpha_{-p} q_{-p} + \sum_{j=-p}^{-1} \theta_j q_j^m - \sum_{j=-p}^0 \gamma_j J(\psi_j, q_j) - \sum_{j=-p}^0 \varepsilon_j J(\psi_j, f),$$

式中

$$\alpha_{-p} = \beta(r_i, t_{-p}) / \beta(r_i, t), \quad \theta_j = (\beta(r_i, t_{j+1}) - \beta(r_i, t_j)) / \beta(r_i, t),$$

$$j = -p, -p+1, \dots, -1, \quad \gamma_j = \bar{\beta}(r, t_j) / \beta(r_i, t), \quad j = -p, -p+1, \dots, 0,$$

$$q_{-p} = q(t_{-p}), \quad q_j^m \text{ 为 } t_j \text{ 与 } t_{j+1} \text{ 间 } q \text{ 的中值}, \quad \varepsilon_j = \tilde{\beta}(r, t_j) / \beta(r_i, t), \quad j = -p, -p+1, \dots, 0.$$

由于 f 不随时间而变, 柯氏涡度项的记忆函数 $\tilde{\beta}(r, t_j)$ 显然应不同于相对涡度项的记忆函数 $\bar{\beta}(r, t_j)$.

5 正压原始方程模式

令 $x_1 \equiv u, x_2 \equiv v, x_3 \equiv \varphi$, 正压原始方程组^[7]可写为

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = F_i(x, f, t), \quad i=1, 2, 3, \quad (5.1)$$

式中

$$\begin{aligned} F_1 &= -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), \\ F_2 &= -\left(fu + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \\ F_3 &= -\left(\varphi \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

也可将(5.1)式写为算子方程形式:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \mathcal{A} X, \quad (5.2)$$

式中

$$X = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = - \begin{bmatrix} u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} - f & & \frac{\partial}{\partial x} \\ f & u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \varphi \frac{\partial}{\partial x} & \varphi \frac{\partial}{\partial y} & u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix},$$

运用第二节中的原理, 可求得(5.2)式的自忆性方程:

$$\begin{aligned} \beta(r, t) X_t - \beta(r, t_{-p}) X_{-p} - \sum_{i=-p}^0 X_i^m [\beta(r, t_{i+1}) - \beta(r, t_i)] \\ + \int_{t_{-p}}^t \beta(r, \tau) \mathcal{A} X d\tau = 0. \end{aligned}$$

6 与差分格式的关系

在数值预报中, 人们设计了各种各样的差分格式. 将看到, 若给记忆函数一些数字就能构造出不同的差分格式.

沿用差分格式中的记号, 记 $\beta^{n+1} \equiv \beta_t, \beta^n \equiv \beta_0, x^{n+1} \equiv x_t, x^n \equiv x_0$; 将积分改为求和号; 记 $F^{n+1} \equiv F(x, \lambda, t), F^n \equiv F(x, \lambda, t_0)$, 将(2.9)式重写为

$$\beta^{n+1} x^{n+1} - \beta^n x^n - (\beta^{n+1} - \beta^n) x_0^m = \sum_{i=n}^{n+1} \beta^i F^i \Delta t.$$

若令 $\beta^n = 0, \beta^{n+1} = 1, x_0^m = x^n$, 得隐式差分格式:

$$(x^{n+1} - x^n) / \Delta t = F^{n+1}. \quad (6.1)$$

若令 $\beta^n = \beta^{n+1} = 1$, 则得双时间层的隐式差分格式:

$$(x^{n+1} - x^n) / \Delta t = F^n + F^{n+1}. \quad (6.2)$$

若令 $\beta^n = 1, \beta^{n+1} = 0, x_0^m = x^{n+1}$, 得前向差分格式

$$(x^{n+1} - x^n) / \Delta t = F^n. \quad (6.3)$$

不难推断, 若记忆函数取随时间和空间而变的一些适当数字, 就可构造出现有的差分格式, 还能设计出至今尚无的新格式来. 如对一维平流方程:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + u \frac{\partial x}{\partial s} = 0, \quad (6.4)$$

式中 s 表示空间坐标. 对空间点 r_i , 关于 (6.4) 的 (2.9) 式为

$$x(i, t) = \frac{\beta(i, t_0)}{\beta(i, t)} x(i, t_0) + \frac{\beta(i, t) - \beta(i, t_0)}{\beta(i, t)} x^m(i, t_0) \\ + \frac{1}{\beta(i, t)} \int_{t_0}^t \beta(s, \tau) \left(-u \frac{\partial x(\tau)}{\partial s} \right) d\tau.$$

沿用差分格式记号, 积分改为 n 到 $n+1$ 的求和, 空间差商用中心差, 格距为 d , 得

$$x_i^{n+1} = \frac{\beta_i^n}{\beta_i^{n+1}} x_i^n + \frac{(\beta_i^{n+1} - \beta_i^n)}{\beta_i^{n+1}} x_{i0}^m - \frac{\Delta t u^n}{2d} (\beta_{i+1}^n x_{i+1}^n - \beta_{i-1}^n x_{i-1}^n) \\ - \frac{\Delta t u^{n+1}}{2d} (\beta_{i+1}^{n+1} x_{i+1}^{n+1} - \beta_{i-1}^{n+1} x_{i-1}^{n+1}).$$

设 $\beta_i^n = \beta_i^{n+1} = 1, \beta_{i+1}^n = \beta_{i-1}^n = \beta_{i+1}^{n+1} = \beta_{i-1}^{n+1} = \frac{1}{2}$, 令 $u^{n+1} = u^n = u, \mu = \Delta t u / d$, 则上式变为

$$x_i^{n+1} = x_i^n - \frac{\mu}{4} (x_{i+1}^n + x_{i+1}^{n+1} - x_{i-1}^n - x_{i-1}^{n+1}),$$

这是常用的隐式差分格式^[7].

天气预报方程组乃至流体动力-热力学方程组都可形式地写为类似于 (5.2) 式的算子方程^[8], 因此可以推断, 许多现有的差分格式都可视为当记忆函数取不同值时的自忆性方程的特例.

7 与其他多时次模式的关系

(1) 郑庆林-杜行远从假设输出信息与干扰无关的前提下^[3], 提出了一种多时次预报模式. 对无辐散正压模式即有下列变分

$$\delta \int_R \int_T [(\Delta - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi + f)] \frac{\partial \psi}{\partial t} dt dr = 0, \quad (7.1)$$

式中 μ^2 为控制超长波后退的参数. 由于空间坐标 r 不是倾向 $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ 的显函数, 所以当施行变分运算时空间部分不起作用. 对比 (7.1) 与 (4.2) 式, 可知 $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ 相当于一个记忆函数. 因此,

郑-杜模式可视为取倾向作为记忆函数的一个多阶自忆性方程. $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ 是在给定时刻流函数在每一空间点上的倾向, 它相当于业务天气预报中使用的变高、变压. 众所周知, 它们随时空

的变率很大. 因此, 可以推断, 若把 $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ 作为记忆函数, 模式的稳健性(robustness)是不易保证的.

(2) 丑纪范推广了微分方程解的概念^[2], 将微分方程定解问题变为等价的泛函极小问题. 在推导预报方程时对多时次的观测值运用了 Lagrangian 插值多项式. 下面证明, 当记忆函数取特定数值时, 可以导出与这一多时次预报模式相当的方程.

对无辐散正压模式, 若用向后差分 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = 1$, 且考虑两个过去时次 t_0 和 t_{-1} , 预报时次 t_1 , 则关于在空间点 r_i 的倾向 $q = \Delta \psi$ 的离散自忆性方程为

$$\beta_1 q_1 - \beta_{-1} q_{-1} - (\beta_0 - \beta_{-1}) q_{-1}^m - (\beta_1 - \beta_0) q_0^m = \gamma_{-1} J(q_{-1}, \psi_{-1}) + \gamma_0 J(q_0, \psi_0) + \gamma_1 J(q_1, \psi_1) + \varepsilon_{-1} J(f, \psi_{-1}) + \varepsilon_0 J(f, \psi_0) + \varepsilon_1 J(f, \psi_1), \quad (7.2)$$

方程左边的项只涉及格点 i, j (即空间点 r_i), 现令 $q_{-1}^m = q_{-1}$, $q_0^m = q_0$, 对格点 i, j 在时次 t_1 和 t_0 的记忆函数给定为 $\beta_1 = \frac{7}{6}$, $\beta_0 = -\frac{1}{6}$, 则有 $\beta_1 - \beta_0 = \frac{8}{6}$, 方程右边的项因为是 Jacobian 表达式, 在每一格点上给定相应的记忆函数值, 其差分公式为

$$J(A, B) = \frac{1}{4\Delta^2} [(\beta_{i+1,j}^n A_{i+1,j}^n - \beta_{i-1,j}^n A_{i-1,j}^n)(\beta_{i,j+1}^n B_{i,j+1}^n - \beta_{i,j-1}^n B_{i,j-1}^n) - (\beta_{i,j+1}^n A_{i,j+1}^n - \beta_{i,j-1}^n A_{i,j-1}^n)(\beta_{i+1,j}^n B_{i+1,j}^n - \beta_{i-1,j}^n B_{i-1,j}^n)]. \quad (7.3)$$

对时次 t_{-1} , 令

$$\beta_{i+1,j}^{-1} = \beta_{i-1,j}^{-1} = a_{-1} = -\frac{1}{6}, \quad \beta_{i,j+1}^{-1} = \beta_{i,j-1}^{-1} = b_{-1} = \frac{6}{5}; \quad (7.4)$$

对时次 t_0 , 令

$$\beta_{i+1,j}^0 = \beta_{i-1,j}^0 = a_0 = \frac{2}{3}, \quad \beta_{i,j+1}^0 = \beta_{i,j-1}^0 = b_0 = \frac{7}{5}; \quad (7.5)$$

对时次 t_1 , 令

$$\beta_{i+1,j}^1 = \beta_{i-1,j}^1 = a_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_{i,j+1}^1 = \beta_{i,j-1}^1 = b_1 = \frac{8}{15}. \quad (7.6)$$

根据(7.3)式:

$$\gamma_{-1} = a_{-1} b_{-1} = -\frac{1}{5}, \quad \gamma_0 = a_0 b_0 = \frac{14}{15}, \quad \gamma_1 = a_1 b_1 = \frac{4}{15},$$

对(7.2)式中包含 f 的项, 由于 f 不随时间而变, 因此其相应的记忆函数值可令 $b_{-1} = b_0 = b_1 = 1$. 由于 f 不随经度而改变, 故 $J(A, B)$ 中的第二项等于 0, 这样易得

$$\varepsilon_{-1} = a_{-1} \cdot 1 = -\frac{1}{6}, \quad \varepsilon_0 = a_0 \cdot 1 = \frac{2}{3}, \quad \varepsilon_1 = a_1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

将求得的 $\beta_i, \beta_0, \gamma_{-1}, \dots, \varepsilon_i$ 代入(7.2)式得

$$1 \frac{1}{6} q_1 - 1 \frac{1}{3} q_0 + \frac{1}{6} q_{-1} = \sum_{k=-1}^1 \varepsilon_k J(f, \psi_k) + \sum_{k=-1}^1 \gamma_k J(q_k, \psi_k), \quad (7.7)$$

这里

$$\varepsilon_{-1} = -\frac{1}{6}, \quad \varepsilon_0 = \frac{2}{3}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2}; \quad \gamma_{-1} = -\frac{1}{5}, \quad \gamma_0 = \frac{14}{15}, \quad \gamma_1 = \frac{4}{15}.$$

将(7.7)式与文献[2]的(20)式相比, 除对 $J(q_k, \psi_k)$ 无时间 t_{-1}, t_0, t_1 的交错项外, 余均相一

致. 从记忆函数的概念来考察, 交错项是不必要的. 譬如 $\gamma_{0,-1}$ 意味着 t_0 对 t_1 时次的“倒”记忆, 是缺乏实际意义的. (7.7) 式中的 γ_{-1} 等于文献[2]的 (20) 式中的 $\gamma_{-1,-1}$, $\gamma_{-1,0}$, $\gamma_{0,-1}$ 之和, γ_0 和 γ_1 类同. 需要说明的是文献[2](20) 式中的常系数是当多时次观测值用 Lagrangian 插值公式时得到的, 如果用其他插值公式, 其系数显然是会不同的. 细察 (7.4), (7.5) 和 (7.6) 式中的记忆函数值, 它们是基于文献[2](20) 求得的, 但恰有很有意思的规律, 即南北向格点上的记忆函数值均要大于东西向的值, 可能反映了 Rossby 参数 f 的作用. 另外时次 t_0 时的记忆函数值大, 反映了起报初始场的重要性, 这一规律似乎也佐证了引入记忆函数的合理性.

8 应 用

(1) 若在 (2.11) 式中将中值项 $\sum_{i=p}^0 x_i^m (\beta_{i+1} - \beta_i)$ 省去, 把积分改为求和, 用向前时间差分 $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, 即得

$$x_i = \theta_0 F(x, \lambda, t_0) + \theta_{-1} F(x, \lambda, t_{-1}) + \cdots + \theta_p F(x, \lambda, t_{-p}) + \theta_s x(t_{-p}), \quad (8.1)$$

式中, $\theta_0 = \Delta t \beta(t_0) / \beta(t)$, $\theta_1 = \Delta t \beta(t_{-1}) / \beta(t)$, $\cdots$, $\theta_p = \Delta t \beta(t_{-p}) / \beta(t)$,
 $\theta_s = \beta(t_{-p}) / \beta(t)$.

(8.1) 式即作者提出的动力-随机差分模式^[4,9], 反之, 本文的工作可视为动力-随机差分模式的进一步推广. 在文献[9]中, 将无辐散正压模式化成 (8.1) 式形式, 500hPa 用经验正交函数展开, 用这样得到的模式作 48h 预报, 距平相关系数达 0.8, 96h 达 0.75, 预报准确率可以与全球数值预报模式相当. 蒋维东用二层动力-随机差分模式作月高度场预报, 符号相关准确率达 56%, 与现有的数值长期天气预报模式结果不相上下.

(2) 若考虑三个时刻 t_0, t_1, t 令 $x_0^m \equiv x_i$, 积分用求和代替, (2.9) 式变为

$$x_t = \varphi_0 x_0 + \varphi_1 x_1 + a_t, \quad (8.2)$$

式中 $\varphi_0 = \beta_0 / \beta_t$, $\varphi_1 = (\beta_t - \beta_0) / \beta_t$, $a_t = \frac{1}{\beta_t} \sum_{\tau=t_0}^t \beta(\tau) F(x, \lambda, \tau) \Delta \tau$. 若将 a_t 视为随机噪声项. 则

(8.2) 式即为一个二阶自回归模型. 同理, 易推广到 p 阶自回归模型. 若将 a_t 考虑为其他空间点和其他要素场的动力影响, 则 (8.2) 式变为一个既研究本身前后联系又研究他因影响的动力诊断方程.

参 考 文 献

- [1] 顾震潮, 气象学报, 1958, 29(3): 176—186.
- [2] 丑纪范, 中国科学, 1974, (6): 635—644.
- [3] 郑庆林、杜行远, 中国科学, 1973, (2): 289—297.
- [4] 曹鸿兴, 科学通报, 1981, 26(1): 63—63.
- [5] 曹鸿兴, 旱涝气候研究进展, 气象出版社, 北京, 1990, 150—156.
- [6] 张恭庆、林源渠, 泛函分析讲义, 上册, 北京大学出版社, 1987, 55—58.
- [7] 方洞贤、王两铭, 数值天气预报原理及其应用, 气象出版社, 北京, 1986, 106—109.
- [8] 季仲贞、曾庆存, 大气科学, 1982, 6(1): 88—94.
- [9] Zhu Shengming, Cao Hongxing, Acta Meteorologica Sinica, 1991, 5(1): 90—100.