中 国 科 学 (B 辑)
第 25 卷 第 9 期 SCIENCE IN CHINA (Series B) 1995 年 9 月

节理岩体的变分不等式模型*

郑 宏 葛修润
(中国科学院武汉岩土力学研究所,武汉 430071)

摘要 基于对结构面变形特性的数学表述,建立了节理岩体边值问题的广义的变分提法——变分不等式模型,同时证明了该模型与偏微分方程提法的等价性,提出既使将岩块视为线弹性体,节理岩体的力学行为也将呈现出依赖于施工过程的非线性特征. 文中还从理论上给出了求解这一模型的数值方法.

关键词 节理岩体 变分不等式 岩体力学 非线性

迄今为止,在用有限元法求解节理岩体时,无论是线性分析还是非线性分析,对于节理的力学行为大都采用 Goodman 模型[1] 来描述. 该模型认为: 当应力水平较低时,节理面的内力与其相对位移成正比:

$$p_\tau = k_\tau \Delta u_\tau, \quad p_n = k_n \Delta u_n. \tag{0.1}$$

这一模型仅是一种十分粗糙的近似,因为线性的、非耦合的本构方程 (0.1) 式并不成立. 随着非线性研究的逐渐深入,一些学者对 Goodman 模型进行了种种改进[2~4],使其能够反映出节理变形的非线性及相互耦合等特性. 不同的改进型仅是这一本构关系在繁简程度上的差异. 作者认为基于 Goodman 模式的各种节理模型(称之为 G 模型),能够在不同程度上反映有一定厚度的软弱夹层及断层(称之为 G 型结构面)的变形特性,而对于无填充物的节理、裂隙等(称之为 H 型结构面),则根本不存在类似于 (0.1) 式的本构关系. 如果对 H 型结构面赋以 G 模型,不仅会给参数 (k_τ, k_n 等) 的选取带来困难, 而且会使结果失真,例如嵌入现象等. 我们的观点是对于岩体中的各种结构面应区别对待. 对于 G 型结构面可以采用 G 模型,而对于 H 型结构面则应采用新的模型来描述,新模型应将结构面的内力与相对位移视为相互独立.

为了不掩盖问题的实质,简化推导过程,我们对节理岩体作如下简化:

(1) 岩块本身是线弹性的.

(2) 结构面的内力满足无拉应力准则和摩尔 - 库仑准则:

$$p_n \leqslant 0, \quad |p_\tau| \leqslant C - F p_n, \tag{0.2}$$

其中 C 是内摩擦力, $F = \mathrm{tg}\varphi$ (φ 是内摩擦角).

(3) 结构面是位移间断面,其内力和相对位移之间呈刚塑性关系.

由于岩体的稳定性大都取决于结构面的产状及强度特性,因此假定 (1) 式在多数情况下不会使分析结果出现大的误差,此外,即使考虑岩块本身的非线性,如果采用文献[5] 所建议的

1994-04-20 收稿, 1995-05-24 收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目

线性互补算法，也不会给分析过程带来本质上的困难．

变分不等式方法虽已成功地求解了许多非线性问题，但却至今未能在岩体力学中取得应用，这主要是因为岩体介质自身的复杂性所至．鉴于此，本文在对节理的变形特性进行严格的表述后，从存在位移间断面的虚功方程出发，建立了节理岩体边值问题的变分不等式模型，同时证明了该模型与偏微分方程提法的等价性．由于节理岩体的非线性较强，因而本文所导出的变分不等式比来自于其它问题的变分不等式（如 Signorini 问题[6]、弹塑性问题[6]、Stefan 问题[7] 以及渗流问题[8] 等）更为复杂．为了体系上的完整性，文中还从理论上给出了求解这一模型的迭代算法．

1　关于第二类变分不等式和拟变分不等式[8]

60 年代末创立的变分不等式理论是继古典变分法之后一门新的数学分支，已在许多非线性问题中得到成功的应用．本节仅就本文将要用到的第二类变分不等式和拟变分不等式作一简介，关于变分不等式的详细讨论，可参阅文献[7, 8].

1.1　第二类变分不等式问题

设 K 为 Hilbert 空间 V 中的非空闭凸集，$a(u, v)$ 是 $V\times V$ 上的连续强制对称的双线性型，$L\in V'$，$\varphi(v)$ 为 K 上的下半连续正常泛函．求 $u\in K$, 使

$$a(u, v-u)+\varphi(v)-\varphi(u)\geqslant L(v-u),\ \forall v\in K. \tag{1.1}$$

命题 1.1　变分不等式问题 (1.1) 等价于下列泛函极小问题[8]

$$\begin{cases} J(u)=\min\limits_{v\in K} J(v), \\ J(v)=\dfrac{1}{2}a(v, v)+\varphi(v)-L(v). \end{cases} \tag{1.2}$$

顺便提一下，正因为许可函数集 K 仅是 V 中的一个闭凸集，所以从 (1.2) 式出发，才使 (1.1) 式成为不等式，否则若 $K=V$，或是 V 的一个线性子空间，则 (1.1) 式就会成为古典变分法中的变分等式了．

1.2　拟变分不等式

对 K, V, $a(u, v)$ 及 L 的限制如上，$j(u, v)$ 是 $V\times V$ 上的双参型正常泛函，求 $u\in K$, 使得

$$a(u, v-u)+j(u, v)-j(u, u)\geqslant L(v-u),\ \forall v\in K. \tag{1.3}$$

需指出的是，目前关于拟变分不等式的研究还很不充分，其在一般条件下解的适定性及正则性均未得到解决，因此只能结合具体问题分别加以研究，如本文的途径就是通过构造第二类变分不等式解的序列去逼近拟变分不等式的解．

2　结构面力学行为的描述

设所界定的节理岩体是含有结构面 Γ 的多连通域 Ω, S 为 Ω 的边界．结构面 Γ 可以贯穿 Ω, 也可以尖灭于 Ω 内，Γ 由下岸 $\Gamma^{(1)}$ 和上岸 $\Gamma^{(2)}$ 所组成，$\Gamma^{(i)}(i=1, 2)$ 上的外法向单位向量记为 $n^{(i)}$, 切向单位向量记为 $\tau^{(i)}$, $n^{(i)}$ 和 $\tau^{(i)}$ 组成了 $\Gamma^{(i)}$ 上一点的局部系，忽略 Γ 的细观结构，由小变形假定以及 $\Gamma^{(1)}$ 和 $\Gamma^{(2)}$ 之间的初始间隙量 δ^0 很小，可以认为变形过程中 $(n^{(i)}, \tau^{(i)})$ 保持不变且满足

$$n^{(2)}=-n^{(1)},\ \tau^{(2)}=-\tau^{(1)}, \tag{2.1}$$

以后我们在考察 Γ 上点对的相对运动时均以 $(n^{(1)},\ \tau^{(1)})$ 作为局部参照系.

在对节理岩体进行应力分析时,由于事先无法确定结构面的接触状态,因此属于具有内部自由边界的非线性问题. 这类问题在某个瞬时 t 的应力场、结构面的接触状态等,不仅与载荷水平、材料特性以及结构面的产状有关,而且还与 t 时刻以前的加载路径有关,因此,对节理岩体问题应按增量方式来提: 假定在某个时刻 t_0 岩体已经处于一个平衡状态,$\Gamma_c^0(\subset\Gamma)$ 是接触面,δ^0 是 Γ 上点对之间的间隙,σ^0 为应力场,试问若对体系施加一组新的荷载增量

$$b=(b_1\ b_2)^{\mathrm{T}}\ \text{in}\ \Omega,\ q=(\bar{q}_1\ \ \bar{q}_2)^{\mathrm{T}}\ \text{on}\ S_\sigma;\ u=(\bar{u}_1\ \ \bar{u}_2)^{\mathrm{T}}\ \text{on}\ S_u, \tag{2.2}$$

节理岩体的应力场及结构面的接触状态将有何变化? 其中 $S=S_\sigma\bigcup S_u$.

设施加载荷增量(2.2)式之后岩块内的应力增量为 σ,结构面的接触力变为 $(p_n,\ p_\tau)$,这里约定 $(p_n,\ p_\tau)$ 是 $\Gamma^{(i)}$ 上的点所受的接触力,因此

$$\begin{cases} p_n=(\sigma_{ij}^{0(k)}+\sigma_{ij}^{(k)})n_i^{(k)}n_j^{(k)}, \\ p_\tau=(\sigma_{ij}^{0(k)}+\sigma_{ij}^{(k)})n_i^{(k)}\tau_j^{(k)}, \quad (k=1,\ 2), \end{cases} \tag{2.3}$$

同时,记 $(u_n^{(i)},\ u_\tau^{(i)})$ 为 $\Gamma^{(i)}$ 上的点在各自标架 $(n^{(i)},\ \tau^{(i)})$ 中的位移增量,Γ_c 和 Γ_d 分别表示相应的接触面和分离面,有 $\Gamma=\overline{\Gamma}_c\bigcup\overline{\Gamma}_d$.

在 Γ_d 上:

$$u_n^{(1)}+u_n^{(2)}-\delta^0<0,\ p_n=p_\tau=0, \tag{2.4}$$

在 Γ_c 上:

$$u_n^{(1)}+u_n^{(2)}-\delta^0=0,\ p_n<0, \tag{2.5}$$

且当 $|p_\tau|<C-Fp_n$ 时,

$$u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)}=0, \tag{2.6}$$

而当 $|p_\tau|=C-Fp_n$ 时,

$$\operatorname{sign}p_\tau\cdot(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})\leqslant 0. \tag{2.7}$$

(2.4)~(2.5)式反映了互不嵌入条件和无拉应力准则,(2.5)~(2.6)式为啮合条件,(2.7)式说明当接触面上出现相互错动时,摩擦力的方向与相对运动的方向相反,(2.6)~(2.7)式还包含了摩尔-库仑准则.

总之,在施加载荷增量(2.2)式之后,结构面内的位移和内力应满足下列互补条件:

$$\begin{cases} u_n^{(1)}+u_n^{(2)}-\delta^0\leqslant 0,\ p_n\leqslant 0, \\ (u_n^{(1)}+u_n^{(2)}-\delta^0)\cdot p_n=0, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} |p_\tau|+Fp_n-C\leqslant 0, \\ \operatorname{sign}p_\tau\cdot(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})\leqslant 0, \\ (u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})(|p_\tau|+Fp_n-C)=0. \end{cases} \tag{2.9}$$

3 数学模型及其等价性

3.1 问题的方程提法 F1

在节理岩体 Ω 中,由于存在位移不连续面 Γ,因此在定解条件中,除了常规的边界条件外,还应附上结构面 Γ 上的位移间断条件. 若以位移为基本未知量,则节理岩体边值问题的微分方程提法如下,求 $u_i\in H^2(\Omega)$,使得

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(u)+b_i=0, & \text{in } \Omega, \\ u_i=\overline{u}_i, & \text{on } S_u, \\ \sigma_{ij}n_j=\overline{q}_i, & \text{on } S_\sigma, \\ \text{(2.8) 和 (2.9) 式} & \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.2　问题的变分不等式提法 F2

在 t_0 时刻对节理岩体施加一组新的荷载增量 (2.2) 式之后，所引起的位移增量 u 是下列变分不等式问题的解：

求 $u\in U$，使得

$$a(u,\ v-u)+j(u,\ v)-j(u,\ u)\geqslant L(v-u),\ \forall v\in U, \tag{3.2}$$

其中 $U=\{v|v_i\in H^1(\Omega),\ v_i=\overline{u}_i \text{ on } S_u,\ v_n^{(1)}+v_n^{(2)}-\delta^0\leqslant 0 \text{ on } \Gamma\}$ 是所有机动许可位移的集合，显然为 $[H^1(\Omega)]^3$ 中的闭凸集；

$$a(u,\ v)=\int_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\mathrm{d}V \tag{3.2a}$$

为内力的虚功，由 Korn 不等式[6] 可知 $a(u,\ v)$ 是连续强制的；

$$j(u,\ v)=\int_\Gamma (C+F|p_n(u)|)\cdot|v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)}|\mathrm{d}S \tag{3.2b}$$

表示在结构面发生滑动时，摩擦力的虚功；

$$L(v)=\int_\Omega b_iv_i\mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}\overline{q}_iv_i\mathrm{d}S-\int_\Gamma[p_n^0(v_n^{(1)}+v_n^{(2)})+p_\tau^0(v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)})]\mathrm{d}S, \tag{3.2c}$$

前两项为外力的虚功，第三项为 t_0 时刻结构面的内力所做的虚功，其中 p_n^0，p_τ^0 为 t_0 时结构面的内力.

3.3　自然约束条件

注意到在变分提法 F2 中，我们仅要求试探函数满足位移边界条件和结构面上的互不嵌入条件，而对于应力边界条件及 (2.8)，(2.9) 式中所规定的结构面上的其它约束条件不作要求，然而正如我们在 3.5 节中将要证明的那样，如果从变分提法 F2 出发去求解节理岩体问题，所求得的解必将自动满足在提法 F1 中所涉及到的全部条件. 从这个意义上讲，我们称结构面上的互不嵌入条件为本质约束条件，而结构面上的其它约束条件则为自然约束条件.

3.4　变分提法的物理意义

我们对 (3.2) 式略作变形得

$$a(u,\ v)+j(u,\ v)-L(v)\geqslant a(u,\ u)+j(u,\ u)-L(u). \tag{3.3}$$

如果给一处于平衡态的节理岩体一虚位移 $v\in U$，体系将包含两部分内虚功：岩块本身的内虚功 $a(u,\ v)$ 及结构面的内虚功 $j(u,\ v)$，而 $L(v)$ 则为外力的虚功. 这样 (3.3) 式可理解为：在所有的机动许可位移场中，真实的位移使得体系的净虚功为最小.

3.5　两种提法的等价法

命题 3.1（等价性） (F1) 的解与 (F2) 的解的关系是：

(1) (F1) 的解必是 (F2) 的解；

(2) 若 $u_i\in H^2(\Omega)$，则 (F2) 的解也是 (F1) 的解；

(3) 若 $u_i\in H^1-H^2$，则称由 (F2) 给出的解是节理岩体边值问题的广义解或弱解.

证 (1) 若 u 是(F1)的解，则由存在位移间断面的虚位移原理[9]可知 $\forall v\in U$,

$$a(u,\ v-u)-(b,\ v-u)-(\bar{q},\ v-u)_{S_\sigma}=R_J\triangleq$$

$$\int_\Gamma\{(p_n-p_n^0)[(v_n^{(1)}+v_n^{(2)})-(u_n^{(1)}+u_n^{(2)})]+(p_\tau-p_\tau^0)[(v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)})-(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})]\}\mathrm{d}S. \tag{3.4}$$

配项 R_J 得

$$R_J=\pi_n+J_\tau-j_0(v-u), \tag{3.5}$$

其中

$$\pi_n=\int_\Gamma p_n[(v_n^{(1)}+v_n^{(2)})-(u_n^{(1)}+u_n^{(2)})]\mathrm{d}S, \tag{3.6}$$

$$J_\tau=\int_\Gamma p_\tau[(v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)})-(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})]\mathrm{d}S, \tag{3.7}$$

$$j_0(v)=\int_\Gamma[p_n^0(v_n^{(1)}+v_n^{(2)})+p_\tau^0(v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)})]\mathrm{d}S,$$

整理 π_n

$$\pi_n=\int_\Gamma p_n(v_n^{(1)}+v_n^{(2)}-\delta^0)\mathrm{d}S-\int_\Gamma p_n(u_n^{(1)}+u_n^{(2)}-\delta^0)\mathrm{d}S.$$

由(2.8)式三式可知上式第二项为零，再由 $p_n\leqslant 0$ 及 $v_n^{(1)}+v_n^{(2)}-\delta^0\leqslant 0$ 可知 $\pi_n\geqslant 0$.

对于 J_τ, 利用(2.8)和(2.9)诸式，我们有

$$J_\tau\geqslant-\int_\Gamma|p_\tau|\cdot|v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)}|\mathrm{d}S-\int_\Gamma\mathrm{sign}p_\tau\cdot(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})\cdot|p_\tau|\mathrm{d}S\geqslant$$

$$\int_\Gamma(C+F|p_n|)\cdot(|u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)}|-|v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)}|)\mathrm{d}S=$$

$$j(u,\ u)-j(u,\ v), \tag{3.8}$$

所以

$$R_J\geqslant j(u,\ u)-j(u,\ v)-j_0(v-u), \tag{3.9}$$

将(3.9)式代入(3.4)式即可得到(3.2)式.

(2) 再证(F2)的解同时也是(F1)的解，即从(3.2)式可以推出(3.1)式中的全部方程.

因为 $u_i\in H^2(\Omega)$, 所以由(3.2)式可对其 $a(u,\ v-u)$ 施以 Gauss 公式，同时注意到(2.3)式以及 Γ 是贯穿 Ω 的位移间断面，即得

$$\int_\Omega(\sigma_{ij,j}+b_i)(v_i-u_i)\mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{q}_i)(v_i-u_i)\mathrm{d}S+\pi_n+\pi_\tau\geqslant 0,\ \forall v\in U,$$

注意对于尖灭型结构面，先将其延拓，使其贯穿 Ω, 再利用延拓部分的连续性也同样可得上式.

其中

$$\pi_\tau=\int_\Gamma p_\tau[(v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)})-(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})]\mathrm{d}S+j(u,\ v)-j(u,\ u), \tag{3.10}$$

令 $v^{(1)}=u^{(1)}+v'$, $v^{(2)}=u^{(2)}-v'$, v' 是任意函数，即得

$$\sigma_{ij,j}+b_i=0\ \text{in}\ \Omega,\ \sigma_{ij}n_j=\bar{q}_i\ \text{on}\ S_\sigma,$$

故

$$\pi_n+\pi_\tau\geqslant 0,\ \forall v\in v.$$

鉴于 v 的任意性，又可得

$$\pi_n \geqslant 0 \quad 且 \ \pi_\tau \geqslant 0, \ \forall v \in U.$$

令 $v_n^{(1)}+v_n^{(2)}=-\beta\varphi$, φ 为正值函数，令 $\beta \to +\infty$，可知欲使 $\pi_n \geqslant 0$，必须

$$p_n \leqslant 0 \ \text{ on } \ \Gamma. \tag{3.11}$$

而取 $v_n^{(1)}+v_n^{(2)}-\delta^0=0$，则

$$\pi_n=-\int_\Gamma p_n(u_n^{(1)}+u_n^{(2)}-\delta^0)\mathrm{d}S \geqslant 0.$$

由(3.11)式及 $u_n^{(1)}+u_n^{(2)}-\delta^0 \leqslant 0$，可知必有

$$p_n(u_n^{(1)}+u_n^{(2)}-\delta^0)=0 \ \text{ on } \ \Gamma,$$

因此得(2.8)诸式．取将(3.2b)代入(3.10)式后进行整理，同时注意到

$$v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)}=\mathrm{sign}(v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)})\cdot|v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)}|,$$

$$u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)}=\mathrm{sign}(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})\cdot|u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)}|,$$

$$\pi_\tau=\int_\Gamma |v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)}|\cdot[C+F|p_n|+\mathrm{sign}(v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)})\cdot p_\tau]\mathrm{d}S-$$

$$\int_\Gamma |u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)}|\cdot[C+F|p_n|+\mathrm{sign}(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})\cdot p_\tau]\mathrm{d}S.$$

因为上式第二项为常量，由 v 的任意性及 π_τ 的非负性得

$$|p_\tau| \leqslant C+F|p_n|=C-Fp_n \ \text{ on } \ \Gamma, \tag{3.12}$$

再取 $v_\tau^{(1)}+v_\tau^{(2)}=0$，则

$$\pi_\tau=-\int_\Gamma |u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)}|\cdot[C+F|p_n|+\mathrm{sign}(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})\cdot p_\tau]\mathrm{d}S \geqslant 0.$$

由(3.12)式可知

$$(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})\cdot[\mathrm{sign}(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})\cdot(C+F|p_n|)+p_\tau]=0 \ \text{ on } \ \Gamma, \tag{3.13}$$

且当 $u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)} \neq 0$ 时必有

$$p_\tau=-\mathrm{sign}(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})\cdot(C+F|p_n|),$$

即 p_τ 与 $u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)}$ 异号，(3.13)式也就可变成

$$(u_\tau^{(1)}+u_\tau^{(2)})(|p_\tau|+Fp_n-C)=0,$$

至此，我们已经从(3.2)式推出了(3.1)式中的全部方程．

(3)考虑到问题(F2)对于解的光滑性的要求没有(F1)那么强，因此，(F2)给出的解可能不在 H^2 中．鉴于此，我们将这种解称作问题的广义解或弱解，这种情况可发生在当外载的奇性较高如存在集中力时的场合．

4　数值求解方法

由于在问题(3.2)中，含有一非线性的双参型泛函 $j(u, v)$，因此它不属于第二类变分不等式而属于拟变分不等式，也正是由于这一非线性项，才使得节理岩体的变分不等式问题难以求解．很显然

$$j(u, v) \to \varphi(v)=\int_\Gamma (C+F|p_n^0|)\cdot|v_n^{(1)}+v_n^{(2)}|\mathrm{d}S, \quad 当载荷量增量 \to 0 时,$$

若以 $\varphi(v)$ 替代 $j(u, v)$ 虽可使(3.2)式成为第二类变分不等式，但因实际计算中的载荷增量不可

能任意的小，因而会造成较大的误差．鉴于此，我们仿线性方程组的 Jacobi 迭代法，构造了利用第二类变分不等式的结果来逐次逼近真解的迭代格式：设已知第 i 次迭代解为 u^i，求第 $(i+1)$ 次的迭代解 $u^{i+1}\in U$，使得

$$a(u^{i+1},\ v-u^{i+1})+j(u^i,\ v)-j(u^i,\ u^{i+1})\geqslant L(v-u^{i+1}),\ \forall v\in U, \tag{4.1}$$

记 $j(u^i,\ v)=\varphi(v)$，易证 $\varphi(v)$ 是下半连续的，这样 (4.1) 式便成为第二类变分不等式，从而由命题 (1.1) 可按以下问题来求解 u^{i+1}：

$$\begin{cases} J(u^{i+1})=\min\limits_{v\in U} J(v), \\ J(v)=\dfrac{1}{2}\ a(v,\ v)+j(u^i,\ v)-L(v). \end{cases} \tag{4.2}$$

至于由 (4.2) 式给出的序列 $\{u^i\}$ 是否收敛到真解 u，目前还难以从理论上给出证明，但考虑到从 $j(u^i,\ v)$ 逼近 $j(u,\ v)$ 的过程正是体现了目前在有限元程序中被广泛使用的“试探— 求解—调整”这一迭代过程，因此可断定在充分小的载荷增量及载荷组合下，由 (4.2) 式给出的序列 $\{u^i\}$ 可以收敛到真解 u.

然而，由于

$$j(u^i,\ v)=\int_\Gamma (C+F|p_n^i|)|v_n^{(1)}+v_n^{(2)}|\mathrm{d}S$$

的不可导性增加了 (4.2) 式的求解难度，因此，我们对其作正则化处理，用可导的

$$j_\varepsilon(u^i,\ v)=\int_\Gamma \frac{1}{1+\varepsilon}\ (C+F|p_n^i|)|v_n^{(1)}+v_n^{(2)}|^{1+\varepsilon}\mathrm{d}S$$

来代替 $j(u^i,\ v)$，这样当 $\varepsilon\to 0$ 时，相应的解 u_ε^i 便会收敛到 u^i.

上面我们仅从理论上给出了问题 (F2) 的求解径途．如果用有限元法进行离散，就可以得到一个有限维凸集 U_h 上的非线性规化问题，当节点数较多时，其计算量十分可观，所以应寻求效率更高的算法，例如，可采用文献[10] 的方法，在保证有足够精度的前提下，通过引入两个惩罚因子，使接触力与相对位移之间成理想弹塑性关系，以替代其间的刚塑性关系给数值计算带来的不便，从而使计算过程大为简化．但因本文着眼于节理岩体边值问题的理论模型，因此这里就不再赘述了．

5 结语

本文将变分不等式理论用于描述节理岩体这种复杂的地质体，建立了节理岩体边值问题的精确的变分不等式模型，除了结构面互不嵌入条件外，该模型解除了结构面上的全部约束，因此是节理岩体边值问题的广义的变分提法，该模型可以作为数值求解的基础，但为了便于计算，还需对此模型作合理的简化和近似．该模型还指出：施工过程中岩体的力学行为不仅仅呈现出材料非线性，而且还伴随着更强烈的几何非线性．

致谢 Arizona 大学的 Desai 教授对本项研究提出了建设性的指导意见，特此致谢．

参　考　文　献

1 Goodman R E, Taylor R L, Brekke T L. A model for the mechanics of jointed rock. J Soil Mech Found Div, ASCE, 1968, 94(SM3): 637～659

2 Desai C S, Fishman K L. Plasticity-based constitutive model with associated testing for joints. Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr, 1991, 28: 15～26

3 Desai C S, Zaman M M. Thin layer element for interfaces and joints. Int J Num Analyt Meth Geomech, 1984, 8 (1): 19～43

4 殷有泉．考虑损伤的节理本构模型．工程地质学报，1994, 2(4): 1～6

5 郑　宏，葛修润．弹塑性分析的线性互补问题．力学学报，1995, 27(1): 38～47

6 Necas J, Hlavacek I. Methmatical theory of elastic and elasto-plastic bodies. Elsevier Scientific Publishing Company, 1981

7 王耀东．变分不等方程．北京：高等教育出版社，1987

8 彭旭麟，陈奉苏．现代工程数学手册，第 III 卷．武汉：华中理工大学出版社，1988

9 王　仁，黄文彬，黄筑平．塑性力学引论(修订版)．北京：北京大学出版社，1992

10 朱昌铭．基于虚功原理的弹性接触问题的线性互补方法．力学学报，1995, 27(2): 189～197