中 国 科 学

1991年8月 B 辑 第8期

多层准地转流体运动的稳定性*

穆 穆

（中国科学院大气物理研究所，大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室，北京 100080）

摘 要

本文考察多层准地转流体运动的稳定性．应用变分原理与先验估计相结合的方法，得到了若干非线性稳定性判据．已有文献中关于该类运动的稳定性判据仅适用于初值的扰动，本文的判据适用于初值与参数的扰动．运用精细的先验估计方法，对多层准地转流体运动，本文首次得到了对应于 Arnold 第二定理的非线性稳定性判据．

关键词：非线性稳定性，准地转流体运动

一、引 言

Arnold[1, 2] 最早提出了用变分原理与先验估计相结合的方法研究流体运动的非线性稳定性，得到了二维不可压缩理想流体运动的两个稳定性判据．此后，特别是最近几年，Arnold 的方法引起了不少学者特别是地球流体力学领域内学者的很大兴趣．Bluman[3]，Andrews[4]，Holm 等[5]，Zeng[6, 7]，McIntyre 等[8]，Mu 等[9] 与 Shepherd[10, 11] 等发展了 Arnold 的方法与技巧，在三维不可压缩流体、可压缩流体、等离子流体及地球流体等方面得到了一系列非线性稳定性判据．

多层准地转模式是地球流体力学中的一个重要模式，在天体物理学的研究中也被采用．本文将运用文献 [7, 9] 的思想，深入研究多层准地转流体运动的稳定性．Holm 等[5] 曾研究过该问题，但未考察参数的扰动，也未得到对应于 Arnold 第二定理的非线性稳定性判据．文献 [8] 仅对于一层流体，得到了平行于 Arnold 第二定理的稳定性判据．就作者所知，迄今未见文献将 Arnold 第二定理及 McIntyre 等有关结果推广至多层流体的情形．利用精细的先验估计技巧，本文不仅得到了同时适用于初值与参数扰动的非线性稳定性判据，也首次成功地将 Arnold 第二定理推广至多层准地转流体运动（判据 2）．

在海洋动力学研究中使用的准地转多层模式，一般地，区域是多连通的，这时，侧边界条件是重要的．本文在物理上合理、数学上严谨的初边界条件下，严格论证了流函数在相差一个仅与时间有关的函数意义下的唯一性（附录 I）．另一方面，由 Arnold 方法得到的稳定性判据仅在古典解的存在寿命区间（lifespan）内适用[5, p. 10]，所以整体（关于时间尺度而言）古典解的

本文 1990 年 12 月 10 日收到，1991 年 3 月 10 日收到修改稿．

* 国家自然科学基金资助项目．

存在性与运动稳定性是紧密相关的. 为确认本文得到的稳定性判据适用于时间区间 $[0, \infty)$, 故是 Ляионоь 意义下的稳定性, 本文附录 2 中证明了多层准地转模式整体古典解的存在性.

二、模　　式

描述 N 层准地转流体运动的方程组是下述 $2N$ 个耦合的偏微分方程组(参见文献 [5, p. 32] 或 [12, §6.16]):

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + J(\psi_i, \omega_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{2.1}$$

$$\omega_i = \nabla^2 \psi_i + \alpha_i \sum_{j=1}^{N} T_{ij} \psi_j + f_i. \tag{2.2}$$

这里 ψ_i, ω_i 分别表示第 i 层流体的流函数与广义涡度. $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 是 Laplace 算子, $J(F, G) = (\partial F/\partial x)\cdot(\partial G/\partial y) - (\partial F/\partial y)\cdot(\partial G/\partial x)$ 是 Jacobi 算子(F, G 是任意可微函数). $\alpha_i = f_0^2/g[(\rho_{i+1} - \rho_i)/\rho_0]\, D_i$, $i = 1, 2, \cdots, N$; 而 $\rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_N$ 是自上而下各层流体的密度(常数); $f_0 = 2\Omega\sin\varphi_0$, 其中 Ω 是地球自转的角速度, φ_0 是参考纬度, D_i 是第 i 层流体的平均厚度; g 代表重力加速度; $\rho_0 = (\rho_1 + \cdots + \rho_N)/N$; 对于 $i = 1, \cdots, N-1$, $f_i = f_0 + \beta y$, 而 $f_N = f_0 + \beta y + f_0 d(x, y)/D_N$, 这里 $\beta = (2\Omega\cos\varphi_0)/R$, $d(x, y)$ 是地形函数, R 表示地球半径. 最后

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, N.$$

本文在二维有界多连通区域 D 中考察问题. 假设 D 的边界 $\partial D = \bigcup_{j=0}^{J} \partial D_j$ 是充分光滑的, ∂D_j ($j \neq 0$) 在 ∂D_0 之内, 当 $m \neq 0$, $n \neq 0$, 且 $m \neq n$ 时, ∂D_m 在 ∂D_n 之外. 由固壁边界条件及 Kelvin 速度环流定理(参见文献 [5, 12]), 流函数 ψ_i 应满足边界条件

$$\left.\frac{\partial \psi_i}{\partial \tau}\right|_{\partial D} = 0, \quad \frac{d}{dt}\int_{\partial D_j} \nabla\psi_i \cdot \boldsymbol{n}\, ds = 0, \quad i = 1, \cdots, N;\ j = 0, \cdots, J. \tag{2.3}$$

这里 $\frac{\partial}{\partial \tau}$ 是边界上的切向求导算子, $\boldsymbol{n}$ 是边界上的单位外法向量.

因为 ψ_i 是流函数, 所以(2.1)—(2.3)式满足初始条件

$$\psi_i|_{t=0} = \psi_i^0 \tag{2.4}$$

的解可以相差一个只与时间 t 有关的向量函数. 事实上, 我们可以证明下述更强的结论: 若 ψ_i ($i = 1, \cdots, N$) 是(2.1)—(2.4)式的古典解(即 ψ_i, ω_i 皆是一阶连续可导函数), 仅依赖于时间 t 的一阶连续可导函数 $f(t)$ 满足 $f(0) = 0$, 则 $\psi_i + f(t)$, $i = 1, \cdots, N$; 仍然是(2.1)—(2.4)式的一组解. 反之, 若 ψ_i, φ_i 是(2.1)—(2.4)式的两组古典解, 则存在只与时间 t 有关的函数 $f(t)$, 使得 $\psi_i - \varphi_i = f(t)$, $i = 1, \cdots, N$; $f(0) = 0$. 该结论的意义在于可利用它简化问题(2.1)—(2.4)式, 从而进一步简化稳定性判据的推导; 我们将在附录 1 中给出该结论(称之为命题(2.1) 的证明, 现利用它简化问题(2.1)—(2.4)式.

对于由(2.4)式给定的初值 ψ_i^0, 令 $\varphi_i^0 = \psi_i^0 - \psi_1^0|_{\partial D_0}$ (由固壁条件可知 $\psi_1^0|_{\partial D_0}$ 为一常数), 则易看出,

若 φ_i 是(2.1),(2.2)式在初边值条件

$$\left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial\tau}\right|_{\partial D_j}=0,\ i=1,2,\cdots,N;\ j=0,\cdots,J;\ \varphi_1|_{\partial D_0}=0, \tag{2.3'}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\partial D_j}\nabla\varphi_i\cdot\boldsymbol{n}ds=0,\ i=1,2,\cdots,N;\ j=0,\cdots,J.$$

$$\left.\varphi_i\right|_{t=0}=\varphi_i^0 \tag{2.4'}$$

之下的解,则 $\psi_i=\varphi_i+\psi_1^0|_{\partial D_0}$ 是(2.1)—(2.4)式的解;反之亦然.

事实上,边界条件(2.3)′式还可以进一步化简:将(2.3)′式中删去 $\frac{d}{dt}\int_{\partial D_0}\nabla\varphi_1\cdot\boldsymbol{n}ds=0$ 之后,剩下的边界条件记为(2.3)′式,则可证明下述结论:若 φ_i 是(2.1),(2.2),(2.3)′,(2.4)′式的解,则它满足(2.1),(2.2),(2.3)′,(2.4)′式. 证明如下:若 φ_i 是如上所述之解,则有

$$\frac{d}{dt}\int_D(\nabla^2\varphi_i+\alpha_i\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\varphi_j+f_i)dxdy=0,\ i=1,\cdots,N. \tag{2.5}$$

由此,注意到 α_i 为常数,f_i 与 t 无关,得

$$\frac{d}{dt}\int_D T_{ij}\varphi_j dxdy=0,\ i=2,\cdots,N.$$

将上式关于 $i=2,\cdots,N$ 求和,得

$$\frac{d}{dt}\int_D(\varphi_1-\varphi_2)dxdy=0. \tag{2.6}$$

在(2.5)式中令 $i=1$,然后分部积分,利用(2.3)′式,得

$$\frac{d}{dt}\int_{\partial D_0}\nabla\varphi_i\cdot\boldsymbol{n}ds=-\alpha_1\frac{d}{dt}\int_D\sum_{j=1}^{J}T_{1j}\varphi_j dxdy=-\alpha_1\frac{d}{dt}\int_D(\varphi_2-\varphi_1)dxdy.$$

再利用(2.6)式,知 $\frac{d}{dt}\int_{\partial D_0}\nabla\varphi_1\cdot\boldsymbol{n}ds=0.$

基于上述讨论与命题 2.1,我们将在下文中考察问题(2.1),(2.2),(2.3)′,(2.4)′式的稳定性.

三、若干预备事项

为了得到适用于参数与初值扰动的稳定性判据,并将 Arnold 第二定理推广至多层流体情形,关键是建立一类精细的先验估计. 本节将考察一个椭圆型方程组边值问题,并建立若干估计式,为下文做好准备.

记矩阵算子

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_N\end{pmatrix},\ A^{1/2}=\begin{pmatrix}\sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_N}\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}\nabla^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \nabla^2\end{pmatrix}+AT,$$

这里 T 的定义如第二节. 再记 A, $A^{1/2}$ 的逆矩阵分别为 A^{-1}, $A^{-1/2}$. 对于给定的向量函数 $\boldsymbol{F}=(F_1,\cdots,F_N)$ 与给定的函数组 g_{ij} $(i=2,\cdots,N;\ j=0,\cdots,J)$, g_{1j} $(j=1,\cdots,J)$, 考察关于未知向量函数 $\vec{\varphi}=(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)$ 的椭圆型方程组边值问题.

$$\begin{cases} P\overleftarrow{\varphi}=\boldsymbol{F}, \text{ 在 } D \text{ 中;} \\ \varphi_1|_{\partial D_0}=0, \int_{\partial D_j}\nabla\varphi_1\cdot\boldsymbol{n}ds=g_{1j}, j=1,\cdots,J; \\ \left.\dfrac{\partial\overleftarrow{\varphi}}{\partial\tau}\right|_{\partial D}=0, \int_{\partial D_j}\nabla\varphi_i\cdot\boldsymbol{n}ds=g_{ij}, i=2,\cdots,N; j=0,\cdots,J. \end{cases} \tag{3.1}$$

我们有

定理 1. 设$\boldsymbol{F}$是平方可积的向量函数,则存在唯一的$\overleftarrow{\varphi}$满足(3.1)式,且成立估计式

$$\int_D(|\overleftarrow{\varphi}|^2+|\nabla\overleftarrow{\varphi}|^2+|\nabla^2\overleftarrow{\varphi}|^2)dxdy\leqslant C\left(\int_D|\boldsymbol{F}|^2dxdy+\sum_{i,j}|g_{ij}|^2\right), \tag{3.2}$$

这里常数 C 与 $\overleftarrow{\varphi}$, $\boldsymbol{F}$, g_{ij} 无关.

唯一性. 令 $\boldsymbol{F}=0$, $g_{ij}=0$; 将(3.1)式的第一式与 $A^{-1}\overleftarrow{\varphi}$ 作内积,分部积分,由边界条件,可得

$$\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}|\nabla\varphi_i|^2/\alpha_i+\sum_{i=1}^{N-1}(\varphi_i-\varphi_{i+1})^2\right]dxdy=0.$$

由此与 $\varphi_1|_{\partial D_0}=0$, 可知 $\overleftarrow{\varphi}=0$.

存在性. 任意取定负数 μ_0, 记 E 为 $N\times N$ 单位矩阵,在与(3.1)式相同的边界条件下考察问题

$$(P+\mu_0E)\overleftarrow{\varphi}=\boldsymbol{F}, \text{ 在 } D \text{ 中}, \tag{3.3}$$

若 $\overleftarrow{\varphi}$ 是满足(3.3)及(3.1)式中边界条件的古典解,将(3.3)式两边与 $A^{-1}\overleftarrow{\varphi}$ 作内积,利用边界条件,可得

$$\int_D[|\nabla\overleftarrow{\varphi}|^2+|\overleftarrow{\varphi}|^2]dxdy\leqslant C\left(\int_D|\boldsymbol{F}|^2dxdy+\sum_{ij}|g_{ij}|^2\right).$$

由上式及椭圆型方程理论(参见 Showalter[13]),可证(3.3)在(3.1)式中边界条件下存在解 $\overleftarrow{\varphi}$, 且 $\overleftarrow{\varphi}$, $\nabla\overleftarrow{\varphi}$ 及 $\nabla^2\overleftarrow{\varphi}$ 皆为平方可积的向量函数. 由此知,当 $\boldsymbol{F}=0, g_{ij}=0$ 时,问题(3.1)式的特征值问题至多只有可列多个离散的正特征值. 注意到(3.1)式为自伴定解问题,$\lambda=0$ 不是(3.1)式的特征值,可知存在性得证,且(3.2)式成立.

记 λ_1 是椭圆算子 P 在(3.1)式中边界条件下的最小特征值,易见 λ_1 也是椭圆算子 $A^{1/2}PA^{-1/2}$ 在同样边界条件下的最小特征值. 利用椭圆型方程理论[13, 14], 可得

定理 2. 在定理 1 中取 $g_{ij}=0$. 这时(3.1)式的解 $\overleftarrow{\varphi}$ 满足

$$\int_D|A^{1/2}\overleftarrow{\varphi}|^2dxdy\leqslant\frac{1}{\lambda_1^2}\int_D|A^{1/2}\boldsymbol{F}|^2dxdy, \tag{3.4}$$

该不等式将在建立判据 2 中起重要作用.

四、稳定性判据

若 $\overline{\varphi}_i(x,y)$, $\overline{\omega}_i(x,y)=\nabla^2\overline{\varphi}_i+\overline{\alpha}_i\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\overline{\varphi}_j+\overline{f}_i$ 是(2.1),(2.2),(2.3)′,(2.4)′式对应于参数 $\overline{\alpha}_i$, $\overline{f}_i$(这里及下文中,均用"$-$"表示未作扰动的参数与函数)的常定解,则 $J(\overline{\varphi}_i,\overline{\omega}_i)=0$ 对 $i=1$,

$\cdots, N$ 成立. 显然,使这组等式成立的充分条件是:存在 N 个一阶连续可导的一元函数 $Q_i(\xi)$, $i=1, \cdots, N$; $\xi \in [\min_D \bar{\omega}_i, \max_D \bar{\omega}_i]$, 使得

$$\bar{\varphi}_i(x,y) = Q_i(\bar{\omega}_i(x,y)), \quad (x,y)\in D. \tag{4.1}$$

本文在下述两种情形下考察$(\bar{\varphi}_i, \bar{\omega}_i)$的稳定性.

(1) $\min_D(\nabla\bar{\varphi}_i/\nabla\bar{\omega}_i) = C_{1i} > 0$, $\max_D(\nabla\bar{\varphi}_i/\nabla\bar{\omega}_i)$

$$= C_{2i} < \infty, \ i=1, \cdots, N. \tag{4.2}$$

(2) $\min_D(-\nabla\bar{\varphi}_i/\nabla\bar{\omega}_i) = \tilde{C}_{1i} > 0$, $\max_D(-\nabla\bar{\varphi}_i/\nabla\bar{\omega}_i)$

$$= \tilde{C}_{2i} < \infty, \ i=1, \cdots, N. \tag{4.3}$$

这里 $\nabla\bar{\varphi}_i/\nabla\bar{\omega}_i \equiv (\partial\bar{\varphi}_i/\partial x)/(\partial\bar{\omega}_i/\partial x) \equiv (\partial\bar{\varphi}_i/\partial y)/(\partial\bar{\omega}_i/\partial y)$.

记 $F_i(\xi) = \int^{\xi} Q_i(\tau)d\tau$. 对(2.1),(2.2),(2.3)′,(2.4)′式的任一组古典解(φ_i, ω_i),有能量、广义位涡能及速度环流守恒

$$\frac{d}{dt}\int_D \Big[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\alpha_i}|\nabla\varphi_i|^2 + \sum_{i=1}^{N-1}(\varphi_i-\varphi_{i+1})^2\Big]dxdy = 0. \tag{4.4}$$

$$\frac{d}{dt}\int_D F_i(\omega_i)dxdy = 0, \ i=1, \cdots, N \tag{4.5}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\partial D_j} \nabla\varphi_i \cdot \boldsymbol{n}ds = 0, \ i=1, \cdots, N; \ j=0, \cdots, J. \tag{4.6}$$

利用上述守恒律,可知 $H(t) \equiv H(0)$, 这里

$$H(t) = \frac{1}{2}\int_D \Big[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\alpha_i}|\nabla\varphi_i|^2 + \sum_{i=1}^{N-1}|\varphi_i-\varphi_{i+1}|^2\Big]dxdy$$

$$-\frac{1}{2}\int_D \Big[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\bar{\alpha}_i}|\nabla\bar{\varphi}_i|^2 + \sum_{i=1}^{N-1}|\bar{\varphi}_i-\bar{\varphi}_{i+1}|^2\Big]dxdy$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_D \frac{1}{\alpha_i}F_i(\omega_i)dxdy - \sum_{i=1}^{N}\int_D \frac{1}{\bar{\alpha}_i}F_i(\bar{\omega}_i)dxdy$$

$$+\sum_{ij}\bar{\lambda}_{ji}\int_{\partial D_j}\nabla(\bar{\varphi}_i-\varphi_i)\cdot\boldsymbol{n}ds,$$

其中 $\bar{\lambda}_{ji} = \left.\dfrac{\bar{\varphi}_i}{\bar{\alpha}_i}\right|_{\partial D_j}$

令 $\tilde{\omega}_i = \omega_i + (\bar{\alpha}_i-\alpha_i)\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\varphi_j + \bar{f}_i - f_i$, 可得 $H(t) = \sum_{i=1}^{4}H_i(t)$, 而 $H_i(t)$的定义如下:

$$H_1(t) = \sum_{i=1}^{N}\int_D \frac{1}{\bar{\alpha}_i}\nabla\varphi_i\cdot\nabla(\varphi_i-\varphi_i)dxdy + \sum_{i=1}^{N-1}\int_D(\bar{\varphi}_i-\bar{\varphi}_{i+1})[(\varphi_i-\varphi_{i+1})$$

$$-(\bar{\varphi}_i-\bar{\varphi}_{i+1})]dxdy + \sum_{i=1}^{N}\int_D \frac{1}{\bar{\alpha}_i}Q_i(\bar{\omega}_i)(\tilde{\omega}_i-\bar{\omega}_i)dxdy - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}\int_{\partial D_j}\bar{\lambda}_{ji}\nabla(\varphi_i-\bar{\varphi}_i)\cdot\boldsymbol{n}ds,$$

$$H_2(t)=\frac{1}{2}\int_D\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{\alpha_i}-\frac{1}{\bar{\alpha}_i}\right)(|\nabla\varphi_i|^2+F_i(\omega_i))dxdy,$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_D\frac{1}{\bar{\alpha}_i}Q_i(\bar{\omega}_i)(\tilde{\omega}_i-\omega_i)dxdy,$$

$$H_3(t)=\frac{1}{2}\int_D\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\bar{\alpha}_i}|\nabla(\varphi_i-\bar{\varphi}_i)|^2dxdy+\frac{1}{2}\int_D\sum_{i=1}^{N-1}[(\varphi_i-\varphi_{i+1})-(\bar{\varphi}_i-\bar{\varphi}_{i+1})]^2dxdy,$$

$$H_4(t)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\bar{\alpha}_i}\int_D[F_i(\omega_i)-F_i(\bar{\omega}_i)-Q_i(\bar{\omega}_i)(\omega_i-\bar{\omega}_i)]dxdy.$$

利用 $Q_i(\bar{\omega}_i)=\bar{\varphi}_i$, 可证 $H_1(t)\equiv 0$. 为下文中叙述方便,引进记号

$$B(\alpha_i,\bar{\alpha}_i,f_i,\bar{f}_i,\varphi_i^0,\bar{\varphi}_i,\omega_i^0,\bar{\omega}_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}(|\alpha_i-\bar{\alpha}_i|+\int_D|f_i-\bar{f}_i|^2dxdy+\sum_{i=1}^{N}\int_D[|\varphi_i^0-\bar{\varphi}_i|^2$$

$$+|\nabla(\varphi_i^0-\bar{\varphi}_i)|^2+|\omega_i^0-\bar{\omega}_i|^2]dxdy+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}\left|\int_{\partial D_j}\nabla(\bar{\varphi}_i^0-\varphi_i)\cdot\boldsymbol{n}ds\right|.$$

这是仅与模式中参数、初值及基本状态有关的量,因而是与时间无关的有量界.

首先考察$(\bar{\varphi}_i,\bar{\omega}_i)$满足(4.1),(4.2)式时的稳定性. 记 $C_1=\min_i(C_{1i}/(2\bar{\alpha}_i))$,则由 Taylor 公式可得

$$C_1\sum_{i=1}^{N}\int_D|\omega_i-\bar{\omega}_i|^2dxdy\leqslant H_4(t),$$

$$C_1\sum_{i=1}^{N}\int_D|\omega_i-\bar{\omega}_i|^2dxdy+H_3(t)\leqslant|H(0)|+|H_2(t)|.$$

利用守恒律(4.4)—(4.6)式与不等式(3.2),可知当 $B(\alpha_i,\bar{\alpha}_i,f_i,\bar{f}_i,\varphi_i^0,\bar{\varphi}_i,\omega_i^0,\bar{\omega}_i)$趋于零时,$|H(0)|+|H_2(t)|$关于 t 一致地趋于零. 因而,我们得到了

判据 1. 设常定解$(\bar{\varphi}_i,\bar{\omega}_i)$满足(4.1),(4.2)式,则它关于初值及参数的小扰动在Ляионов意义下是稳定的;即对任何 $\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得只要初值及参数的扰动满足

$$B(\alpha_i,\bar{\alpha}_i,f_i,\bar{f}_i,\varphi_i^0,\bar{\varphi}_i,\omega_i^0,\bar{\omega}_i)<\delta,$$

则(2.1),(2.2),(2.3)′,(2.4)′式的任一古典解恒满足

$$C_1\sum_{i=1}^{N}\int_D|\omega_i-\bar{\omega}_i|^2dxdy+H_3(t)\leqslant\varepsilon,\ t\geqslant 0.$$

再考察$(\bar{\varphi}_i,\bar{\omega}_i)$满足(4.1),(4.3)式的情形. 这时

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\tilde{C}_{1i}}{\bar{\alpha}_i}\int_D|\omega_i-\bar{\omega}_i|^2\leqslant -H_4(t).\tag{4.7}$$

将 ω_i 与$\bar{\omega}_i$ 的定义式相减,两边乘以$(\varphi_i-\bar{\varphi}_i)/\bar{\alpha}_i$,在 D 上积分,利用不等式 $ab\leqslant\frac{\mu a^2}{2}+\frac{b^2}{2\mu}$

(这里 μ 为任一正数),可得

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\bar{\alpha}_i}\int_D|\nabla(\varphi_i-\bar{\varphi}_i)|^2\,dxdy+\sum_{i=1}^{N-1}\int_D[(\varphi_i-\bar{\varphi}_i)-(\varphi_{i+1}-\bar{\varphi}_{i+1})]^2\,dxdy$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}\int_D[\frac{1}{2\bar{\alpha}_i\mu}(\varphi_i-\bar{\varphi}_i)^2+\frac{\mu}{2\bar{\alpha}_i}(\omega_i-\bar{\omega}_i)^2]dxdy+|\tilde{H}_2(t)|, \tag{4.8}$$

这里 $\mu>0$ 为待定常数,而

$$\tilde{H}_2(t)=\sum_{ij}\frac{1}{\bar{\alpha}_i}\int_{\partial D_j}(\varphi_i-\bar{\varphi}_i)\nabla(\varphi_i-\bar{\varphi}_i)\cdot\boldsymbol{n}ds+\int_D\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i-\bar{\alpha}_i}{\bar{\alpha}_i}$$

$$\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\varphi_j(\varphi_i-\bar{\varphi}_i)dxdy+\sum_{i=1}^{N}\int_D\frac{1}{\bar{\alpha}_i}(f_i-\bar{f}_i)(\varphi_i-\bar{\varphi}_i)dxdy.$$

为了估计 $\int_D|\varphi_i-\bar{\varphi}_i|^2dxdy$,构选辅助向量函数 $\vec{\varphi}^*=(\varphi_1^*,\cdots,\varphi_N^*)$. 它是在椭圆边值问题(3.1)式中令 $\alpha_i=\bar{\alpha}_i$, $\boldsymbol{F}=(\omega_1-\bar{f}_1,\cdots,\omega_N-\bar{f}_N)$, $g_{1j}=\int_{\partial D_j}\nabla\bar{\varphi}_1\cdot\boldsymbol{n}ds$ $(j=1,\cdots,J)$, $g_{ij}=\int_{\partial D_j}\nabla\bar{\varphi}_i\cdot\boldsymbol{n}ds$ $(i=2,\cdots,N;\ j=0,\cdots,J)$而得到的解.

记 $\bar{\lambda}_1$ 是在问题(3.1)式中令 $\alpha_i=\bar{\alpha}_i$, $F=0$, $g_{ij}=0$ 时的最小特征值,由定理 2, 可得

$$\sum_{i=1}^{N}\int_D|\varphi_i^*-\bar{\varphi}_i|^2/\bar{\alpha}_i\,dxdy\leqslant\frac{1}{\bar{\lambda}_1^2}\sum_{i=1}^{N}\int_D|\bar{\omega}_i-\bar{\omega}_i|^2/\alpha_i\,dxdy, \tag{4.9}$$

另一方面,将 φ_i,φ_i^* 满足的方程组相减,利用定理 1, 可知存在仅与 $\bar{\alpha}_i$ 有关的常数 C,使得

$$\sum_{i=1}^{N}\int_D[|\varphi_i^*-\varphi_i|^2+|\nabla(\varphi_i^*-\varphi_i)|^2+|\nabla^2(\varphi_i^*-\varphi_i)|^2]\,dxdy$$

$$\leqslant C[\sum_{i=1}^{N}\int_D|f_i-\bar{f}_i|^2\,dxdy+\sum_{i=1}^{N}|\alpha_i-\bar{\alpha}_i|^2|\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\varphi_j|^2\,dxdy$$

$$+\sum_{ij}|\int_{\partial D_j}\nabla(\bar{\varphi}_i-\varphi_i^0)\cdot\boldsymbol{n}ds|^2]. \tag{4.10}$$

由定理 1 及(4.10)式可知,当 $B(\alpha_i,\bar{\alpha}_i,\varphi_i^0,\bar{\varphi}_i,\omega_i^0,\bar{\omega}_i)$ 趋于零时,$|\tilde{H}_2(t)|$ 与(4.10)式的右端关于 t 一致地趋于零. 再利用 $|\varphi_i-\bar{\varphi}_i|\leqslant|\varphi_i^*-\bar{\varphi}_i|+|\varphi_i-\varphi_i^*|$, (4.9)式,由(4.8)式,可得

$$2H_3(t)\leqslant\frac{1}{2}(\frac{1}{\mu\bar{\lambda}_1^2}+\mu)\sum_{i=1}^{N}\int_D\frac{|\omega_i-\bar{\omega}_i|^2}{\bar{\alpha}_i}\,dxdy+|\tilde{\tilde{H}}_2(t)| \tag{4.11}$$

这里 $\tilde{\tilde{H}}_2(t)$ 具性质:当 $B\to0$ 时,$|\tilde{\tilde{H}}_2(t)|$ 关于 t 一致地趋于零.

由(4.7)式,我们得

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\tilde{C}_{1i}}{\bar{\alpha}_i}\int_D|\omega_i-\bar{\omega}_i|^2dxdy\leqslant H_3(t)+|H_2(t)|+|H(0)|.$$

将上式代入(4.11)式,再令 $\mu=1/\bar{\lambda}_1$, 得

$$\sum_{i=1}^{N}(\tilde{C}_{1i}-\frac{1}{\bar{\lambda}_1})\int_D\frac{|\omega_i-\bar{\omega}_i|^2}{\bar{\alpha}_i}\,dxdy\leqslant|\tilde{\tilde{H}}_2(t)|+2(|H_2(t)|+|H(0)|). \tag{4.12}$$

由此可见,若

$$\widetilde{C}_{1i}\overline{\lambda}_1>1,\ i=1,\ \cdots,\ N, \tag{4.13}$$

则由(4.11),(4.12)式,即得

判据 2. 设常定解$(\overline{\varphi}_i, \overline{\omega}_i)$满足(4.1),(4.3),(4.13)式,则它在判据 1 所述意义下是稳定的.

比较(4.13)式与 McIntyre 等[8]在一层模式时得到稳定性判据所导出的条件(p.541.(6.22)式),可见(4.13)是他们条件的自然推广.

五、结　束　语

本文研究了多层准地转流体运动的稳定性. 利用精细的先验估计方法,导出了适用于初值与参数扰动的两个非线性稳定性判据. 特别,判据 2 是 Arnold 第二定理(文献[2],定理 2)及 McIntyre 等[8]有关结果在多层流体情形的自然推广. 解决这些问题所必需的理论推导占去了本文的主要篇幅,关于这些判据的应用及例子将另文发表.

附　录 I

本附录给出命题 2.1 的证明.

(i)若 $\psi_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$是(2.1)—(2.4)式的解,利用 T_{ij} 的表达式及 $f(0)=0$,可知$\psi_i+f(t)$仍是(2.1)—(2.4)式之解.

(ii)首先证明:若 ψ_i 是(2.1)—(2.4)式的解,则

$$\frac{d}{dt}\int_D \psi_1 dxdy=\frac{d}{dt}\int_D \psi_2\, dxdy=\cdots=\frac{d}{dt}\int_D \psi_N\, dxdy. \tag{A1}$$

事实上,将(2.1)式在 D 上积分,由(2.3)式,得

$$\alpha_i\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\int_D\frac{\partial\psi_j}{\partial t}\,dxdy=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N.$$

注意到 $\alpha_i\neq 0$,由上式即得(A1).

利用(A1)式,可知存在只与 t 有关的函数 $f_1(t)$,使

$$\int_D(\psi_i-\psi_i^0)dxdy=f_1(t),\ f_1(0)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N. \tag{A2}$$

由(i)的结果,可知 $\widetilde{\psi}_i=\psi_i-f_1(t)/\int_D dxdy$ 为(2.1)—(2.4)式之解.

类似地,若 φ_i 是(2.1)—(2.4)式之另一解,则存在只与 t 有关的函数 $f_2(t)$,使

$$\int_D(\varphi_i-\varphi_i^0)dxdy=f_2(t),\ f_2(0)=0,\ i=1,\ \cdots,\ N, \tag{A3}$$

且 $\widetilde{\varphi}_i=\varphi_i-f_2(t)/\int_D dxdy$ 为(2.1)—(2.4)式之解.

记 $\widetilde{\chi}_i=\nabla^2\widetilde{\varphi}_i+\alpha_i\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\widetilde{\varphi}_j+f_i$,$\widetilde{\omega}_i=\nabla^2\widetilde{\psi}_i=\alpha_i\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\widetilde{\psi}_j+f_i$;将 $\widetilde{\chi}_i$,$\widetilde{\omega}_i$ 满足的方程相减,然后两边乘以$(\widetilde{\omega}_i-\widetilde{\chi}_i)$,再在 D 上积分,可知对任何 $T>0$,存在常数 C,使

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_D|\widetilde{\omega}_i-\widetilde{\chi}_i|^2dxdy\leqslant C\Big(\int_D|\nabla(\widetilde{\psi}_i-\widetilde{\varphi}_i)|^2dxdy\Big)^{1/2}\Big(\int_D|\widetilde{\omega}_i-\widetilde{\chi}_i|^2dxdy\Big)^{1/2},\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{A4}$$

由(A2), (A3)式可知, $\int_D(\tilde{\varphi}_i-\tilde{\psi}_i)dxdy=0$, $i=1,\cdots,N$. 再由偏微分方程理论[13], 可知存在与 $\tilde{\psi}_i,\tilde{\varphi}_i$ 无关的常数 C_1, 使成立 $\int_D|\nabla(\tilde{\psi}_i-\tilde{\varphi}_i)|^2dxdy\leqslant C_1\int_D|\tilde{\omega}_i-\tilde{\chi}_i|^2dxdy$, 将该不等式代入(A4)式, 得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_D|\tilde{\omega}_i-\tilde{\chi}_i|^2dxdy\leqslant C\sqrt{C_1}\int_D|\tilde{\omega}_i-\tilde{\chi}_i|^2dxdy,\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

再利用 Gronwell 不等式[15], $(\tilde{\omega}_i-\tilde{\chi}_i)\Big|_{t=0}=0$, 可知 $\tilde{\omega}_i-\tilde{\chi}_i\equiv 0$, $i=1,\cdots,N$; $0\leqslant t\leqslant T$. 由此易证, $\nabla(\tilde{\psi}_i-\tilde{\varphi}_i)\equiv 0$, $i=1,\cdots,N$; $0\leqslant t\leqslant T$; 且 $\tilde{\psi}_i-\tilde{\varphi}_i=\tilde{\psi}_{i+1}-\tilde{\varphi}_{i+1}$. 因而, 存在仅与 t 有关的函数 $f_3(t)$, 使 $\tilde{\psi}_i-\tilde{\varphi}_i=f_3(t)$, $f_3(0)=0$, $i=1,\cdots,N$. 这样最终我们有

$$\psi_i-\varphi_i=f_3(t)+(f_1(t)-f_2(t))/\int_D dxdy,\ i=1,\cdots,N.$$

易见 $f(t)=f_3(t)+(f_1(t)-f_2(t))/\int_D dxdy$ 满足 $f(0)=0$.

附 录 II

本附录证明问题(2.1), (2.2), (2.3)′, (2.4)′式整体古典解的存在唯一性.

用先验估计方法与不动点原理, 容易证明问题(2.1), (2.2), (2.3)′, (2.4)′式局部古典解的存在唯一性. 要证明整体古典解的存在性, 关键是建立某种一致先验估计[16, 17], 为此, 对任何在 D 上定义的二阶连续可导向量函数 $\vec{\varphi}$, 定义[16, 17]

$$|||\vec{\varphi}|||=\sum_{i=1}^{N}\{\|\varphi_i\|_{C^1(D)}+\sup_{\substack{(x',y')\in D\\(x'',y'')\in D}}\sum_{j_1+j_2=1}\frac{|\partial_x^{j_1}\partial_y^{j_2}((\varphi_i(x',y')-\varphi_i(x'',y''))|}{\chi(\sqrt{|x'-x''|^2+|y'-y''|^2})}\},$$

这里 $\chi(s)=s(1-\ln s)$, $0<s<1$; $\|\varphi_i\|_{C^1(D)}$ 的定义可参见文献[18].

我们首先建立

引理 B1. 设 $\boldsymbol{F}$ 是一阶连续可导的向量函数, $\vec{\varphi}$ 是由定理 1 给出的问题(3.1)式的解. 这时, 存在与 $\vec{\varphi}$, $\boldsymbol{F}$, g_j 无关的常数 C, 使成立

$$|||\vec{\varphi}|||^2\leqslant C(\|\boldsymbol{F}\|_{C^0(D)}+\sum_{ij}|g_{ij}|^2).\tag{B1}$$

这里 $\|\boldsymbol{F}\|_{C^0(D)}$ 的定义可参见文献[18].

证. 因为 $\boldsymbol{F}$ 一阶连续可导, 利用定理 1 及经典的椭圆型方程组正则性定理[14], 可知问题(3.1)式之解 $\vec{\varphi}$ 为二阶连续可导. 注意到 $\partial\vec{\varphi}/\partial\tau|_{\partial D}=0$, 可知 $\vec{\varphi}$ 在边界 ∂D 上任意次可导. 求解椭圆型方程组边值问题 $\{P\vec{\psi}=0$, 在 D 中; $\vec{\psi}|_{\partial D}=\vec{\varphi}|_{\partial D}\}$, 可得解 $\vec{\psi}$, 它是 D 上任意次可导函数. 令 $\vec{\chi}=\vec{\varphi}-\vec{\psi}$, 则有 $\{P\vec{\chi}=\boldsymbol{F}$, 在 D 中; $\vec{\chi}|_{\partial D}=0\}$. 利用文献[16](定理 4.1), 可得

$$|||\chi_i|||^2\leqslant C(\|f_i\|^2_{C^0(D)}+\sum_{j=1}^{N}\|\chi_j\|^2_{C^0(D)}).$$

由上式及椭圆型方程组的经典估计, 即得(B1)式.

利用不等式(B1), 我们用文献[16, 17]的方法, 可以建立

引理 B2. 设 φ 是问题(2.1), (2.2), (2.3)′, (2.4)′式的整体古典解, 这时, 对任何 $T>0$, 整数 $K\geqslant 2$, 存在仅与 K, T, 初值 φ_0 及 α_i, f_i 有关的常数 C, 使成立

$$\|\varphi(t)\|_{H^{k+2}(D)}\leqslant C,\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

这里 $\|\varphi(t)\|_{H^{k+2}(D)}$ 的定义可参见文献[18].

结合引理 B_2 及文献[16,17]的方法,即得

定理 B_3. 设初值 $\varphi_0 \in H^k(D)$, $k \geqslant 6$, 且成立相容性条件 $(\partial\varphi_0/\partial\tau)|_{\partial D} = 0$, $\varphi_{10}|_{\partial D_0} = 0$. 这时,问题(2.1),(2.2),(2.3)′,(2.4)′式存在唯一的整体古典解

$\varphi \in C^0([0,\infty);H^k(D)) \cap C^1([0,\infty);H^{k-1}(D))$.

在本文准备过程中,作者与曾庆存、张学洪研究员作了有益的讨论. 刘永明同志指出了作者的一疏漏之处,谨此一并致谢.

参 考 文 献

[1] Arnold, V. I., *Dukl. Akad. Nauk. USSR*, **162**(1965), 975—978.

[2] Arnold, V. I., *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Matematika*, **54**(1966), 3—5.

[3] Blumen, W., *J. Atmos. Sci.*, **25**(1968), 929—931.

[4] Andrews, D. G., *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **28**(1984), 243—256.

[5] Holm, D. D. et al., *Phys. Rep.*, **123**(1985), 1—116.

[6] Zeng Qingcun, *Proceedings of International Summer Colloquium on Nonlinear Atmospheric Dynamics*, Science Press, Beijing, 1986, 175—186.

[7] Zeng Qingcun, *Advances in Atmospheric Sciences*, **6**(1989), 137—172.

[8] McIntyre, M. E. & Shepherd, T. G., *J. Fluid Mech.*, **181**(1987), 527—565.

[9] Mu Mu & Zeng Qingcun, *Proceedings of the Fourth Asian Congress of Fluid Mechanics* Ed. Ko, N. W. M. & Kot, S. C.), Hong Kong, 1989, Vol. I, E16—18.

[10] Shepherd, T. G., *J. Atmos. Sci.*, **45**(1988), 2014—2025.

[11] Shepherd, T. G., *ibid.*, **46**(1989), 888—907.

[12] Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer, 1979.

[13] Showalter, R. E., *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Pitman, London, 1977.

[14] Hörmander, L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1976.

[15] Beckenbach. E. F. & Bellman, R., *Inequalities*, Springer-Verlag, 1983.

[16] 穆 穆,数学物理学报,**6**(1986), 201—218.

[17] Mu Mu, *Scientia Sinica (Ser. A)*, **30**(1987), 359—371.

[18] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1976.