第23卷 第4期
1999年12月

水生生物学报
ACTA HYDROBIOLOGICA SINICA

Vol. 23, No. 4
Dec., 1999

鱼类体长与体重关系中的分形特征*

黄真理[1)] 常剑波

(中国科学院水生生物研究所，武汉 430072)

摘要 运用分形理论得到了描述鱼类形态的基本关系式，既扩展了传统上对鱼类形状描述的思路，又回答了鱼类体长-体重关系式 $W = bL^a$ 在实际运用中长期存在的量纲不和谐问题。还对体长-体重函数关系的普适性、参数 a 和鱼类生长发育过程的阶段性、鱼类肥满度定义等进行了分析和讨论。

关键词 鱼类、体长-体重关系、分形特征

鱼类体长-体重(L-W)关系是鱼类生物学研究中经常涉及的主要内容之一，应用十分普遍。Von Bertalanffy 通过假设鱼类体重与体长的立方成正比，提出了著名的 Von Bertalanffy 生长方程，奠定了鱼类生长研究的基础[1]。目前应用较多的是将鱼类的体长-体重关系描述为 $W = bL^a$，其中 a 和 b 的值由统计分析给出。已经有作者注意到应该赋予该式以生物学意义，如华元渝等认为参数 a 表示鱼的重量增加系数与体长增长系数之比，参数 b 表示鱼类开始主动摄食时的重量和长度之比乘以初始长度的负 a^{-1}[2]；李星额等认为参数 a 表示同一瞬时相对体重增长率与相对体长增长率之比等[3]。然而，用 $W = bL^a$ 描述鱼类体长-体重的关系时，实际上是在用长度单位(L)测度重量(W)，这里的量纲和谐问题如何解决，被长期地忽略了。要解决鱼类体长-体重关系解析中的量纲不和谐问题，并赋予体长-体重关系以明确、清晰的物理学和生物学意义，用欧氏几何是难以完成的。本研究尝试利用分形几何(Fractal Geometry)的理论，对鱼类体长-体重关系进行推导，分析其物理学和生物学的意义，并对有关的问题进行初步讨论。

1 问题的提出

经常使用的鱼类的体长-体重关系为：

$$W = bL^a \tag{1}$$

根据量纲分析可知，如果参数 a 为无量纲量，则参数 b 的量纲为 W/L^a；如果参数 $a = 3$，则参数 b 的量纲为密度量纲 W/L^3。

将鱼体重量 W 用 ρV(ρ为鱼体的密度，V为鱼体的体积)表示，则(1)式变成：

$$V = (b / \rho) L^a \tag{2}$$

* 国务院三峡工程建设委员会办公室和中国长江三峡工程开发总公司资助项目[SX(97)-18/HBJC]

1) 联系地址：(100044)北京车公庄西路32号国务院三峡工程建设委员会办公室

1999-02-10收到；1999-07-12修回

在式(2)中，如果ρ为常数，即鱼为均质体，体长-体重关系实际上表示了体长-体积关系。当$a = 3$时，式(2)表示鱼的体长-体积关系符合欧氏几何中的体积随长度的变化关系。当$a \neq 3$时表明鱼的体积-体长关系不符合欧氏几何的体积随长度变化关系，即当长度增长λ倍，体积的增长不是λ^3倍，而是λ^a倍。因此，如果要认识式(2)的真实物理含义，需要转变测度观。这需要应用分形几何的理论才能完成。

2　鱼类形态基本特征和体长-体重关系推导

鱼类的体形千差万别，有纺锤形(如金枪鱼)，有扁形(如蝴蝶鱼)，有球形(如箱鲀和河鲀)，有长形或带形的(如鳗鲡、带鱼)，还有十分不规则的体形(如海马)。数学上，这些体形都可以看作非规整的空间几何体。Mandelbrot[4]提出非规整曲面围成的三维欧氏空间的封闭几何体的体积-表面积关系为：

$$V^{1/3} \propto S^{1/D} \tag{3}$$

式中V为非规整曲面的欧氏体积；S为非规整曲面的表面积；D为非规整曲面的分维(Fractal Dimension)。

如S为欧氏面积，即量纲为$[L^2]$，利用量纲分析[5]，则式(3)可写成：

$$S = k_0 \delta^{2-D} V^{D/3} \tag{4}$$

式中k_0为常数；δ为测量码尺，量纲为$[L]$。该式的量纲是和谐的。

如果在实际测量中采用的码尺保持不变，则：

$$V = k_1 S^{3/D} \tag{5}$$

式中$k_1 = \delta^{D-2} / k_0$。该式是三维欧氏空间中复杂曲面围成的封闭几何体的体积-表面积关系，可以作为描述鱼类形态的一个基本关系。

式(5)中V可通过测量鱼的体重表达，但鱼类的体形属非规整形状，表面积S难以测量。在实际测量和计算中，常常用其它形态测量参数，如长、宽、高、胸围，甚至还包括鱼的某些器官的尺寸如头长、鳞径等，作为描述鱼类形态的特征长度，其中鱼的体长(或叉长、全长)是最常测量和使用的特征长度参数。

将鱼的表面积S用特征长度L表示成：

$$S = k_2 L^m \tag{6}$$

式中m为无量纲系数；k_2为量纲$[L^m]$的参数；L为鱼的特征长度。

如果鱼的特征长度L为体长，将(6)式代入(5)式，可以得到鱼类体积-体长关系为：

$$V = kL^{3m/D} \tag{7}$$

式中$k = k_1 k_2^{3/D} = k_2^{3/D} \delta^{D-2} / k_0$。

如果(6)式中L用鱼的宽度、高度等可测量尺寸代替，可得到相应的体积-宽度、体积-高度关系。因此，(5)式可以扩展对鱼的形状描述的思路。

将$W = \rho V$代入(7)式，可以得到：

$$W = \rho k L^{3m/D} \tag{8}$$

这就是从分形理论出发推导出的鱼类体长-体重关系。如令$b = \rho k$、$a = 3m / D$，则(8)与(1)式是一致的。

3 应用分析与讨论

3.1 关于体长-体重函数关系的普适性问题

在研究鱼类的可量性状之间的关系时，如体长-体重关系、年龄-体重关系、年龄-体长关系等，通常采用的都是统计方法，看重的是相关系数。事实上，即使是两个毫无关系的物理量，用统计方法也能找到两者之间的"相关"。但真正具有普适意义的函数关系的建立，必须考虑各统计性状的生物学意义与量纲和谐问题，这是本研究用分形理论研究鱼类体长-体重关系的目的。分形理论最初由 Mandelbort[6]在"英国的海岸线到底有多长"一文提出其基本思想，并得到逐步完善，目前在处理各类非线性问题上得到了很广泛的应用。但在水生生物方面，国内仅见蔡庆华等对芦苇生长格局的研究[7]。本研究用分形理论得到了描述鱼类形态的基本关系式(5)，在假定鱼类是匀质体，且其表面积可以用式(6)表达的基础上，推导出体长-体重的关系式(8)。(8)式的简约记述即是经常采用的描述鱼类体长-体重关系的幂指数关系式($W = bL^a$)，只不过这里参数 a 所包含的鱼类生长过程中的分维特征被明确认识了。

除 $W = bL^a$ 外，被用来描述鱼类体长-体重关系的函数还有 $W = aL + b$、$W = b_1 + b_2 L + b_3 L^2$、$W = be^{a/L}$ 和 $W = be^{aL}$ 等[2]。各式中 a、b 为参数，W、L 分别为体重和体长。基于一种数学逼近方式的思考，过去的研究者没有去认识这些关系式和 $W = bL^a$ 所具有的质的区别。实际上，如果要用 L 去测度 W，在上述函数关系中，参数 a、b(b_1、b_2、b_3)必须是有量纲的，但在此其物理意义、生物学意义均不明确，存在量纲不和谐的问题，不具有可比性和普适性。而(8)式是基于鱼类体积-表面积关系((5)式)导出，式中各参数的量纲是和谐的。大量应用表明，用 $W = bL^a$ 方程表达的鱼类体长-体重关系是最好的[8]，也反映了该方程的内在合理性。

3.2 关于参数 a 和鱼类生长发育 $W = bL^a$ 的过程

由(7)式可知，参数 $a = 3m/D$。这里 m 是(6)式中用量纲 $[L^m]$ 测量鱼表面积(非规整曲面)时的无量纲系数，D 为非规整曲面的分维。当密度恒定时，分维 D 实际上表达了鱼的体积和表面积生长的均匀程度。当 $D = m = 2$ 时，表示生长均匀；D 越远离 2，表示生长越不均匀。参数 a 和分维 D 是倒数关系，也表达了鱼体表面积的分形特征。当 $D = m = 2$ 时，相应地 $a = 3$，这与 Von Betralanffy 关于体重与体长的立方成正比时，鱼类为均匀生长的假设相吻合。Ricker 也认为，a 值可以用来判断鱼类是否处于等速生长。因此，参数 a 表示了鱼类生长发育的不均匀性[9]，这种不均匀性是由于体重(或体积)和体长不均匀增长带来的。

从过去的一些研究者利用 $W = bL^a$ 关系拟合计算的参数 a 值，可以发现：(1)鱼类的幼鱼和成鱼之间、雌雄之间的 a 值相差较大，不同种群之间 a 值也有差异，在所引用的资料范围内，a 值的变辐达 2.4—3.95；(2)在幼鱼阶段，a 值多低于 3，呈强异速性生长，随着鱼的长大，异速性减弱，发育趋向均匀，到成鱼时 a 值都接近或大于 3，如鄱阳湖的鲤，体长小于 58.3cm 时 a 值为 2.417，大于 58.3 时为 2.915；(3)鱼类从幼鱼到成鱼的生长发育过程可概况为：异速生长→等速生长→异速生长(表 1)。

对从四川上游获得的圆口铜鱼、铜鱼、吻鮈的样本进行了分析，也发现这样的规律：即

表1　不同鱼类体长-体重关系的参数a值

Tab.1　Values of parameter a in various species of fishes

鱼类种类 Fish species	种群 Populations	a值 Parameter a	备注 Remark	资料来源 References
青鱼 *Mylopharyngodon piceus*	长江	3.29	雌	华元渝等[2]
		3.04	雄	
		3.95	成鱼	
		2.80	幼鱼	
鲢 *Hypophthalmichthys molitrix*	武汉东湖	2.830	2龄以上	华元渝等[2]
		3.161	1–20cm	
	长江	2.924		李思发[10]
	珠江	2.832		
	黑龙江	3.024		
鳙 *Aristichthys nobilis*	武汉东湖	3.420	2龄以上	华元渝等[2]
		3.115	1–20cm	
鲤 *Cyprinus (Mesocyprinus)micristius micristius*	鄱阳湖	2.417	<58.3cm	李思发[10]
		2.915	>58.3cm	
	新安江水库	2.720		
	汉江	2.862		邓中粦等[11]
草鱼 *Ctenopharyngodon idellus*	汉江	2.854		邓中粦等[11]
鳊 *Parabramis pekinensis*		2.964		
拟尖头鲌 *Culter oxycephaloides*		2.928		
蒙古鲌 *Culter mongolicus mongolicus*		2.864		
细鳞鲴 *Xenocypris microlepis*		3.000		
吻鮈 *Rhinogobio typus*		2.791		
赤眼鳟 *Squaliobarbus curriculus*		2.760		
白甲鱼 *Onychostoma sima*	沱江	2.974		李思发[10]
	涪江	2.906		
中华鲟 *Acipenser sinensis*	长江	3.247	雌亲鱼	邓中粦等[12]
		3.060	雄亲鱼	
		3.029	雌产前亲鱼	
		3.088	雌产后亲鱼	
		3.120	雄产前亲鱼	四川省长江水产资源调查组[13]，
		3.071	雄产后亲鱼	
	人工培育	2.789	全长4.5–30cm	
达氏鲟 *Acipenser dabryanus*	长江	2.72		同上
白鲟 *Psephurus gladius*	长江	3.234	雌	马骏等[14]
		3.250	雄	
似刺鳊鮈 *Paracanthobrama guichenoti*	长江网湖	3.1	8.6–24.6cm	常剑波等[15]
绿鳍马面鲀 *Cantherines modestus*		3.175	12–27cm	李星颉等[3]
河鲈 *perca fluviatilis*		3.9	幼鱼	华元渝等[2]
		3.01	当年或1年	
		3.29	雌2龄以上	
		3.4	雄2龄以上	

鱼类在不同的生长阶段，对应的 a 值不同，且变化幅度较大。低龄鱼 a 值偏小，高龄鱼 a 值偏大，a 值随着体长的变化单调增加。如果计算样本包括所有年龄范围，a 值趋于 3(表 2；图 1)。

鱼类的生长发育，从出生到死亡，经历了不同的时期或阶段。在不同的生长阶段，身体结构、生理结构、食性、生长速率等都有明显的变化。这种阶段性，从分形理论的角度来看，表明了鱼的生长过程中的多重分形性质。因此，鱼类体长-体重关系(8)式在不同的生长阶段，其相应的参数是不同的，应根据鱼类生长阶段的不同，分段处理，计算参数值。在具体操作上，可将获得的鱼的体重、体长数据点绘在坐标图上(最好是双对数坐标)，通过

表2 不同体长范围内几种鱼类体长-体重关系($W=bL^a$)的a值*

Tab.2 Values of parameter a in different body length intervals of various species of fishes

鱼类种类 Fish species	计算体长范围(mm) Length intervals	a值 Parameter a	相关系数(R^2) Correlation coefficient	标本数 Samples
圆口铜鱼	37-570	2.994	0.9936	994
Coreius guichenoti	37-100	2.927	0.931	406
	37-200	2.9502	0.9873	860
	37-400	2.989	0.9932	988
	100-570	3.0221	0.992	605
	200-570	3.1733	0.9685	138
	300-570	3.1259	0.8982	61
	400-570	3.1833	0.9788	5
	100-200	2.9138	0.9744	472
	200-400	3.1775	0.9621	133
	200-300	3.1958	0.9227	79
	150-200	2.7717	0.9039	164
铜鱼	81-530	2.9298	0.9845	158
Coreius heterodon	81-200	2.8825	0.939	71
	81-300	2.8841	0.97	125
	200-530	3.0771	0.9806	87
	300-530	3.1161	0.9455	34
	400-530	3.8418	0.9691	8
	200-400	3.0283	0.971	79
吻鮈	121-365	3.0808	0.9702	484
Rhinogobio typus	132-365(♀)	3.0534	0.9716	398
	121-224(♂)	2.7716	0.908	86
	121-150	2.8814	0.6326	72
	121-200	3.0835	0.9402	422
	121-300	3.0849	0.967	480
	150-365	3.0752	0.9634	416
	200-365	3.1756	0.9691	66
	200-250	2.8283	0.8897	49
	250-300	3.2528	0.878	14

* 基本数据来自"三峡工程生态环境监测网络-水生动物监测站"的数据库。

图上数据的变化趋势划分阶段，确定分段的转折点，在每个区段内分别应用(8)式。

3.3 关于肥满度

肥满度(亦称丰满度)，用来比较不同种群鱼的饵料保障的丰欠和利用程度，定义为：

$$R = (W / L^3) \times 100 \qquad (9)$$

式中：W为体重，单位 g；L为体长，单位 cm；R为肥满度，绝对值没有意义，用于不同鱼类，或同种鱼类的不同种群之间的相互比较。

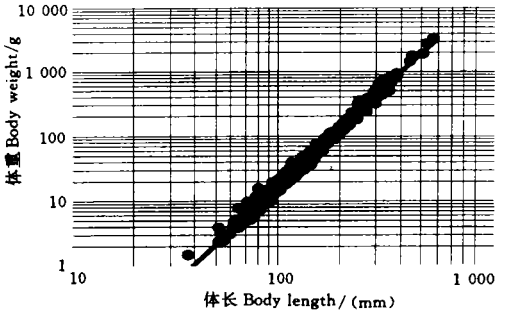


图 1　圆口铜鱼体长-体重关系的双对数曲线

Fig.1　Logarithmic curve of Length-weight relationship of *Coreius guichenoti*

$W = 2 \times 10^{-5} L^{2.994}$; $r^2 = 0.9936$

将(8)式代入(9)式有：

$$R = (\rho k L^{a-3}) \times 100 \qquad (10)$$

此式表明，鱼类的肥满度与体长和参数 a 有关。$|a-3|$越大，体长的影响越大。如果知道 W-L关系，可将肥满度定义进行修改：

$$R' = (W / L^a) \times 100 \qquad (11)$$

式中 R' 为修正的肥满度，其余同前。

参　考　文　献

[1] Von Bertalanffy L. Aquantitative theory of organic growth. *Hum. Biol.*, 1938, 10: 181—213

[2] 华元渝、胡传林. 鱼种重量与长度相关公式($W = bL^a$)的生物学意义及其应用. 鱼类学论文集. 1981，(第一辑)：125—131

[3] 李星颉、陈赛斌. 鱼类生长的数学描述. 浙江水产学院学报，1983，2(1)：29—39

[4] Mandelbrot B B. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 1967, 156:636—638.

[5] 董连科. 分形理论及其应用. 沈阳：沈阳科技出版社. 1991

[6] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1983

[7] 蔡庆华、赵斌、潘文斌. 芦苇生长格局分形特征的初步研究. 水生生物学报，1998，22(2)：123—127

[8] 费鸿年、张诗全，水产资源学. 北京：中国科学技术出版社. 1990.

[9] Ricker W. E. Computation and interpretation of biological statistics of fish populations. *Bull. Fish. Res. Bd. Can.* 1975，(191)：1—382

[10] 李思发. 淡水鱼类种群生态学，北京：农业出版社. 1990.

[11] 邓中粪、余志堂、许蕴玕等. 汉江主要经济鱼类的年龄和生长. 鱼类学论文集. 1981，(第一辑)：97—112.

[12] 邓中粪、余志堂、许蕴玕等. 中华鲟年龄鉴别和繁殖群体结构的研究. 水生生物学报，1985，9(2)：88—110

[13] 四川省长江水产资源调查组. 长江鲟鱼类生物学及人工繁殖研究. 成都：四川科学技术出版社. 1988.

[14] 马骏、邓中粪、邓昕等. 白鲟年龄鉴定及其生长的初步研究. 水生生物学报，1996，20(2)：150—159.

[15] 常剑波、孙建贻、段中华等. 网湖似刺鳊鮈种群生长和死亡率研究. 水生生物学报，1994，18(3)：230—239

FRACTAL CHARACTERISTICS OF LENGTH-WEIGHT RELATIONSHIP IN FISH

Huang Zhenli and Chang Jianbo

(*Institute of Hydrobiology, The Chinese Academy of Sciences, Wuhan* 430072)

Abstract In the study of measurable or numerical properties of fish bodies, statistical methods are usually employed to establish equations of the correlation among the properties. For example, the body length (L)-weight (W) relationship has generally been described as $W = bL^a$, $W = aL + b$, $W = b_1 + b_2L + b_3L^2$, $W = be^{a/L}$ or $W = be^{aL}$ in various literatures. However, only a few authors have defined the biological significance of the parameters in these equations, but no one has ever considered how to resolve the problem of dimension disharmony when the weight is expressed in relation to the length. In fact, the significant"correlation" may be found statistically even if there is no biological relationship between any two physical measures. But, a generalized applicable expression must be established when the biological significance and dimension harmony of statistical parameters is considered. In the present paper, the mass of fish body is assumed as being fractally distributed, the length-weight relationship of fish can be described as $W = \rho kL^{3m/D}$ on the basis of the fractal relationship between surface area and volume in irregular bodies, where ρ and m are constants, D is the fractal dimension, and k is a factor including D. If $b = \rho k$ and $a = 3m / D$, $W = \rho kL^{3m/D}$ can be recorded as $W = bL^a$. It is shown that there are problems of dimension disharmony in the statistical relationship between the body length and weight in fish except the equation $W = bL^a$, and that if the mass of fish body is a constant the fractal dimension D in the expression $W = \rho kL^{3m/D}$ represents the degree of uniform in the growth speed between length and weight of fish. Moreover, calculations of parameter a within different body length intervals revealed that from juvenile to senility, the ratio of fish growth between length and weight is initially varied, then uniformed, and finally back to varied.

Key words Fish, Body length-weight relationship, Fractal characteristics.