DOI：10.3724/1000-6915.jrme.2025.0438

岩石粗糙裂隙渗流逾渗机制

刘殷彤[1, 2]，毛灵涛[2, 3]，程建超[1]，张 辽[1]，侯孟冬[1]，毛婷婷[1]，王帅雄[1]，刘升贵[1]，薛东杰[1, 2, 3, 4*]

（1. 中国矿业大学（北京） 隧道工程灾变防控与智能建养全国重点实验室，北京 100083；2. 中国矿业大学（北京） 力学与土木工程学院，北京 100083；3. 煤炭精细勘探与智能开发全国重点实验室，北京 100083；4. 国家能源集团煤炭开采水资源保护与利用全国重点实验室，北京 102211）

摘要：在单裂隙岩石渗流研究中，经典几何逾渗阈值失效，而启动压力梯度（TPG）作为描述实际流动启动条件的经验参数，无法直接为逾渗阈值的理论求解提供依据，因此亟需定义表征水－力临界行为的“输运逾渗阈值”。针对粗糙裂隙内达西－非达西渗流的拐点判定问题和渗流输运逾渗阈值求解的难题，考虑逾渗阶段的低速－高速裂隙渗流全过程压力梯度与流速演化非连续关系，建立考虑粗糙裂隙迂曲度分形维数和开度分形维数的 Bingham 流体渗流模型，进而基于单元逾渗模型和扩散方程建立全域渗流逾渗模型，实现了粗糙裂隙全域逾渗数值求解。结果表明：对比 Darcy 流假设，Forchheimer 流假设下的单元逾渗模型，其特有的惯性项能够更精确地揭示粗糙角度与水力开度等几何结构逾渗参数对流体逾渗阶段流动路径的影响。逾渗相变发生时，裂隙出口端流速更符合 Forchheimer 方程的非线性渗流特征而非 Darcy 线性假设，该认识为研究低速非达西渗流机制提供了新思路。

关键词：岩石力学；输运逾渗阈值；启动压力梯度；单元逾渗模型；Forchheimer 方程；渗流跨越速率

中图分类号：TU 45 **文献标识码：**A **文章编号：**1000－6915(2026)01－0118－26

第 一 作 者 ：刘殷彤（1994－），现为博士研究生，主要从事渗流力学方面的研究工作。E-mail：liuyintong8123@163.com

***通信作者：**薛东杰（1986－），现任副教授，主要从事非连续采动力学、临界力学、团簇力学和智能岩石力学方面的研究工作。E-mail：xuedongjie@163.com

Percolation mechanism of seepage in rough rock fractures

LIU Yintong[1, 2], MAO Lingtao[2, 3], CHENG Jianchao[1], ZHANG Liao[1], HOU Mengdong[1], MAO Tingting[1], WANG Shuaixiong[1], LIU Shenggui[1], XUE Dongjie[1, 2, 3, 4*]

(1. *State Key Laboratory for Tunnel Engineering*, *China University of Mining and Technology*(*Beijing*), *Beijing* 100083, *China*; 2. *School of Mechanics and Civil Engineering*, *China University of Mining and Technology* (*Beijing*), *Beijing* 100083, *China*; 3. *State Key Laboratory for Fine Exploration and Intelligent Development of Coal Resources*, *Beijing* 100083, *China*; 4. *State Key Laboratory of Water Resource Protection and Utilization in Coal Mining*, *China Energy Investment Group Co*., *Ltd*., *Beijing* 102211, *China*)

Abstract: In studies of fluid flow through single-fractured rock media, the classical geometric percolation threshold loses its validity, and the threshold pressure gradient (TPG), as an empirical parameter describing the onset condition of actual flow, cannot directly provide a basis for the theoretical determination of the percolation threshold. This is because TPG relies on fluid mechanics mechanisms, whereas the percolation threshold is based on network topology statistics. Therefore, it is essential to define a “transport percolation threshold” that characterizes hydraulic critical behavior. Consequently, this study addresses the determination of the inflection point in Darcy-non-Darcy flow

收稿日期：2025－06－23；**修回日期：**2025－09－04

基金项目：国家科技重大专项（2024ZD1003902）；隧道工程灾变防控与智能建养全国重点实验室开放基金重点课题（XD2025007）；煤炭开采水资源保护与利用国家重点实验室开放基金（GJNY－20－113－04）

Supported by the National Science and Technology Major Project (Grant No. 2024ZD1003902), Open Funds of State Key Laboratory for Tunnel Engineering (Grant 375No. XD2025007) and Open Funds of State Key Laboratory of Water Resource Protection and Utilization in Coal Mining (Grant No. GJNY－20－113－04)

through rough fractures and investigates the transport percolation threshold in seepage flow, focusing on the discontinuous relationship between pressure gradient and flow velocity during transitions from low to high velocities. A comprehensive Bingham fluid seepage model, incorporating fractal dimensions of fracture tortuosity and aperture, is developed. By integrating unit percolation models with diffusion equations, a global percolation model is established, allowing for numerical solutions for full-field percolation in rough fractures. The results indicate that, compared to the assumptions of Darcy flow, the unit percolation model under the Forchheimer flow assumption—characterized by its unique inertial term—more accurately captures the influence of geometric percolation parameters (such as roughness angles and hydraulic aperture) on fluid flow paths during the percolation stage. During phase transitions in percolation, the outlet flow velocity conforms more closely to the nonlinear characteristics described by Forchheimer′s equation rather than Darcy′s linear assumption. This understanding offers a novel perspective for investigating the mechanisms of low-velocity non-Darcian flow.

Key words: rock mechanics; transport percolation threshold; threshold pressure gradient; unit percolation models; Forchheimer equation; percolation critical velocity

First author: LIU Yintong (1994－), doctoral candidate, is engaged in research on seepage mechanics. E-mail: liuyintong8123@163.com

***Corresponding author:** XUE Dongjie (1986－), associate professor, is engaged in research on the fields of discontinuous mining mechanics, critical mechanics, cluster mechanics, and intelligent rock mechanics. E-mail: xuedongjie@163.com

1　引　言

自 1856 年达西定律问世以来，学界对孔隙－裂隙介质流体的渗流研究由定性研究转变为定量研究。大量的渗流试验表明，水在介质中的流态以层流或紊流表现，通常以雷诺数 *Re* 作为判别标准。对于单裂隙介质渗流，不少学者认为雷诺数 *Re* 在 1～10 范围内的层流运动符合达西定律[1-4]，而当雷诺数 *Re* 不在该区间内时，流体运动因水力梯度与渗透流速之间不再满足线性关系，称为非达西流动[5-7]。

流体在单裂隙介质内的非达西流动主要分为 2 个阶段：一是逾渗阶段及低速非达西流动阶段，二是达西流动向非达西流动的过渡阶段及转变后的高速非达西流动阶段。

逾渗阶段指当裂隙形成连通路径时，流体开始流动的阶段[8]。经典逾渗理论主要关注的是系统几何连通性的突变，其阈值是一个纯粹的结构性指标，即当系统中出现首个跨越集群(spanning cluster)时的临界点 p_c。在逾渗阈值 p_c 点，长程连通的概率变为非零。理论上，只要 $p>p_c$，就认为系统是“连通”的，即使初始的电导率或渗透率非常低[9-10]。

几何概念中的逾渗阈值 p_c 本质上是一个 0～1 的比例或概率，虽然其属于量纲一的参数，但达到这个临界比例所对应的物理量是有单位的。对于不同的研究对象而言，逾渗阈值 p_c 也有对应的物理参数意义。对于多孔介质的渗流研究，逾渗阈值 p_c 是形成渗流通道所需的临界孔隙度[11]；对于裂隙网络的渗流研究，逾渗阈值 p_c 可以是临界裂隙连通率，也可以是临界裂隙密度[12]。W. B. Tian 等[13]提出在岩芯的原生水饱和度中存在逾渗阈值，其值随无因次含水饱和度增大或渗透率降低呈指数增长；E. Hosseini 等[14]采用退火优化算法，在逾渗临界条件下生成 $L=100$，150，200，250 四种尺度的随机非均质介质，通过蒙特卡洛模拟估算了逾渗阈值；X. H. Wang 等[15]研究了破碎岩体三维离散断裂网络(DFN)的逾渗阈值与其二维截面的理论关系，从渗流的角度比较了三维 DFN 与其对应的 3 个二维离散断裂网络 DFNs 的渗流阈值；C. He 等[16]研究了破裂多孔介质中断裂密度接近逾渗阈值时的有效渗透率，发现当断裂密度低于或接近逾渗阈值时，有限尺寸效应起着重要作用，但随着断裂密度的增加，这种效应逐渐消失。

但在单裂隙介质渗流的研究背景下，逾渗阈值 p_c 的概念会发生根本性的变化，经典的几何逾渗阈值概念在此处不再直接适用，这是因为单裂隙这个前提已经默认了几何上的连通性。因此，在单裂隙研究中，关注的焦点需要从“几何连通性的突变”转移到“流动行为和水力特性的突变”。逾渗阈值被重新定义为导致裂隙内流动路径或流动机制发生临界转变的某个关键参数，即“输运逾渗阈值”。与经典几何逾渗阈值 p_c 相关但不同，其定义的核心是功

能而非结构。输运逾渗阈值表征的是系统从几何连通到有效输运的相变临界点，其具体水力特征参数包括启动压力梯度、临界流速和临界流量等，这些参数共同界定了低速非达西流的起始边界。

低速非达西流动阶段的出现条件和机制与传统的达西流动及高流速非达西流动有显著差异。在低速非达西流动阶段，流速与压力梯度之间不再符合达西定律的线性关系，而呈现非线性或分段线性特征[17-21]。其本质是驱动压力梯度需额外克服界面阻力后，剩余梯度才能驱动线性流动。因此，通常将启动压力梯度(又名阈值压力梯度，即 threshold pressure gradient，TPG)作为低速非达西流动开始的判据[22]；将临界压力梯度(critical pressure gradient for darcy flow)作为低速非达西流动向达西流动转变的关键参数[23]。但需注意的是，启动压力梯度本身不是经典的逾渗阈值，它只是系统处于或非常接近“输运逾渗阈值”时，在宏观上表现出的一个关键现象和证据。X. C. You 等[24]采用同伦分析法(HAM)求解了具有移动边界条件的非达西流动问题，并提出当阈值压力梯度趋于 0 时，具有移动边界条件的一维低渗透多孔介质的非达西流动可以简化为达西渗流模型；E. Chaparian[25]研究了屈服应力流体在多孔介质中的渗流启动机制，基于能量方程的变分形式推导了临界压力梯度的普适性标度律，该标度律仅与多孔介质的几何特征相关；A. Zafar 等[26]通过试验证实孔隙压力是致密气藏启动压力梯度的关键控制因素，当孔隙压力存在时，渗透率降低或含水饱和度升高均会导致启动压力梯度显著增大；S. Roy 等[27]通过对多孔介质中稳态不混溶和不可压缩两相流的研究，发现启动压力梯度和临界压力梯度这 2 种压力梯度均随岩芯尺寸增大而减小，且遵循 2 种不同的幂律关系。但启动压力梯度这一特征参数源自流体力学试验观测，受限于裂隙介质的尺寸，依赖于试验精度，属于工程实践中的具体参数。其物理机制与逾渗理论中基于网络拓扑的逾渗阈值的物理机制存在本质区别，更强调实际流动的驱动力需求，无法为求解逾渗理论模型的输运逾渗阈值提供理论支撑，也无法直接解决大尺度的粗糙裂隙渗流逾渗相变判定问题。

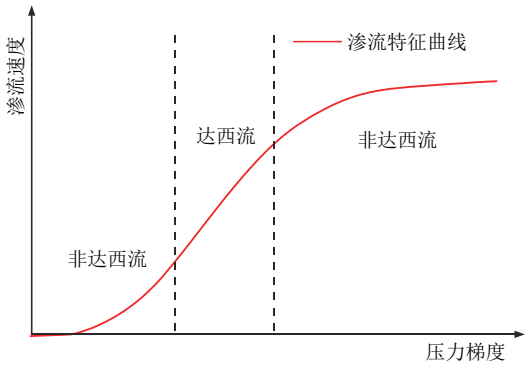
达西渗流定律的理论基础是单相连续流体假设，故其仅能用于描述饱和裂隙流。在该流态下，裂隙的物理开度被直接等效为达西公式中的水力开度。因此，从二维角度通过达西渗流公式研究输运逾渗阈值时，通常考虑简化为平行板模型[28-32]，这样可以忽略由裂隙粗糙度引起的摩擦损失影响，也便于对由流体介质的黏性所引起的边界层效应进行研究。边界层内流体的运动形式是典型的黏性流，对液相而言，分子间广泛存在的内聚力和附着力是造成黏性的主要因素，因此，流体的黏性系数以剪切应力与速度梯度的比值来表征。在基于光滑平行板模型的研究中，V. T. Karman 等[33-34]提出了边界层的控制体分析法和微元体分析法，并给出了可以描述边界层的微分和积分方程式。但光滑平行板模型相较于天然粗糙起伏的裂隙过于理想，无法将受粗糙度影响引起的流体惯性力纳入考虑。此外，基于光滑平行板模型的边界层效应研究往往存在一个隐性假设，即饱和流态。而天然裂隙的几何构造十分复杂，绝大多数流体逾渗是在非饱和流态的条件下发生的。在缺乏高精度逾渗渗流试验数据的情况下，裂隙空间内的实际渗流路径、以及渗流路径中饱和与非饱和区段的分布情况均难以准确预测。此类三维非饱和流态问题极为复杂，却正是以往低速渗流逾渗研究中被忽视的关键一环。

此外，流体流经裂隙表面时，由于黏性力作用形成的薄层区域，层内速度从 0(无滑移条件)逐渐增至主流速度，黏性力与惯性力共同主导流动。综上所述，现有基于饱和流态假设的边界层效应公式不适合用于求解流体的输运逾渗阈值。此时的水力开度受实际流经区域的下表面粗糙高度影响，在不便于进行渗流试验的场景下，无法通过试验得到实际水力开度，也就无法预测流体的输运逾渗阈值。此时的阈值求解近似于黑箱问题，需要新思路、新模型来研究流体的逾渗相变问题，进而预测三维裂隙空间内的流体输运通道。本文将从临界速率的角度切入研究，将其作为输运逾渗阈值的核心评价指标，旨在捕捉系统输运能力的突变行为，而不仅仅是连通性的突变。

2　粗糙裂隙非达西渗流问题探究

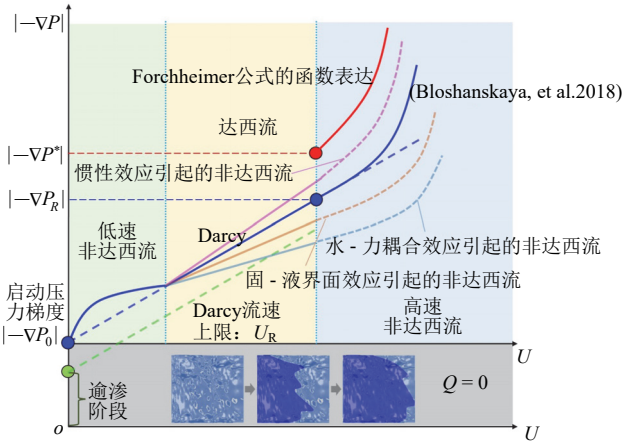
2.1　平行板裂隙非达西渗流拐点

通常认为，达西渗流向非达西渗流的转变是一个连续过程，而非突变的拐点。图 1(a)描述了传统意义上渗流速度随压力梯度变化的渗流特征曲线[35-37]。在启动压力梯度前，渗流速度和流量皆为 0，达西定律、非达西定律均失效。在临界压力梯度后，进入线性达西渗流；在临界雷诺压力梯度后，进入高速非达西渗流。对于同一粗糙裂隙开度分布，不同



(a) 传统意义上的简化渗流特征曲线[35-37]

(a) Simplified seepage characteristic curve in the traditional sense[35-37]



(b) 非达西－达西全域渗流特征曲线

(b) Non-Darcy to Darcy full-range seepage characteristic curves

图 1　压力梯度与渗流速度的关系

Fig.1　Correlation between pressure gradient and seepage velocity

压力梯度下的平均渗流速度从整体上看是非线性的，其中局部线性的区间对应达西流，其他非线性的区间对应非达西流，主要包括低速非达西渗流、达西渗流和高速非达西渗流。

在理论研究中，影响低速非达西渗流的因素主要包括流体的物理性质(如非牛顿流体的黏滞性)、裂隙开度空间分布与连通情况、流－固耦合作用等[38-40]；针对高速非达西渗流，紊流等更复杂的动力特性开始呈现。图 1(b)描述了包括逾渗阶段的非达西－达西全域渗流特征曲线，对比图 1(a)可以看出，其更具体地明确了受惯性效应[41]、固－液界面效应[42]和水－力耦合效应[43]等不同因素引起的高速非达西流特征[44]，并指出了 Forchheimer 方程与达西定律在线性渗流向非线性渗流转变阶段的断点现象，在描述压力梯度与流速之间的变化关系中，单纯依靠 Forchheimer 方程判定达西－非达西渗流的拐点可能并不可靠。

综上所述，依靠理论研究定位平行板裂隙非达西渗流的拐点目前尚存在瓶颈，依靠试验也面临诸多问题。惯性效应、湍流或高速流动的影响逐渐增强，导致试验中难以找到明确的临界点。实际试验中流速、压力梯度等参数的测量误差或噪声可能掩盖拐点特征，若数据点密度不足，过渡区的细节可能被遗漏。除此之外，同一段裂隙内也可能存在过渡区，使 2 种流态的特征同时存在，即部分区域符合达西定律，部分区域出现惯性效应，从而模糊拐点位置。

因此，为了排除天然裂隙粗糙度对惯性效应的影响，同时便于简化计算，通常将对粗糙裂隙流的求解简化为平行板模型，即满足达西渗流的理想平面平行流。设 l 为板长(m)，A 为截面积(m^2)，P_e 为进水端压力(Pa)，P_w 为出水端压力(Pa)，则方程和定解条件可写成：

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}^2P/\mathrm{d}y^2=0\\ &P\big|_{y=0}=P_e\\ &P\big|_{y=l}=P_w \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

容易求得压力分布 $P(y)$、截面流量 q 和渗流速度 u 分别为

$$P(y)=P_e-\Delta P y/l \tag{2}$$

$$q=\frac{Ak\Delta P}{\mu l} \tag{3}$$

$$u=\frac{k\Delta P}{\mu l} \tag{4}$$

式中：$\Delta P=P_w-P_e$，为裂隙两端的压力降(Pa)，对应水力梯度 $\nabla P=\Delta P/l$ (Pa/m)，微分形式为 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}y$；μ 为动力黏度(Pa•s)；k 为渗透系数(m^2)；u 为平均流速(m/s)。

对于平行板模型中的非达西渗流，其理论求解依然存在较大难度，目前多数是在 Navier-Stokes 方程或 Reynolds 方程[45]基础上进行数值求解或者采用描述非达西渗流的经验和理论公式，其中最为经典的是第一类达西渗流上限经验方程，即 Forchheimer 方程[46]：

$$-\nabla P=\frac{\mu}{k}u+\beta\rho u^2 \tag{5}$$

式中：β 为经验常数，也称非达西惯性系数(m^{-1})；ρ 为流体密度(kg/m^3)。

对于非达西渗流，黏性力与惯性力共存，可利用 2 种不同的方法来判定粗糙裂隙非线性渗流状态：一是雷诺数(Reynolds number)，记为 Re；二是福希海默数(Forchheimer number)，记为 F_o，2 个量

纲一的数主要用于区分线性渗流到非线性流动的拐点，对应临界雷诺压力梯度。

由式(5)可定义雷诺数 Re 以及福希海默数 F_o，分别为

$$Re=\frac{\rho}{\mu}u\delta_{\mathrm{h}}=\frac{u\delta_{\mathrm{h}}}{\nu} \tag{6}$$

$$F_o=\frac{\beta\rho u^2}{\frac{\mu}{k}u}=\frac{k\rho\beta u}{\mu} \tag{7}$$

式中：ν 为运动黏度(m²/s)，与动力黏度关系为：$\nu=\mu/\rho$；δ_{h} 为粗糙裂隙开度(m)。

福希海默数 F_o 反映了流体偏离线性的程度，定义 Ω 为非线性程度因子，代表非线性渗流引起的压力梯度占总压力梯度的比例，也可区分达西渗流与非达西渗流，即

$$\Omega=\frac{\rho\beta u^2}{\frac{\mu u}{k}+\rho\beta u^2}=\frac{1}{\frac{1}{F_o}+1}=\frac{F_o}{1+F_o} \tag{8}$$

$$F_o=\frac{\Omega}{1-\Omega} \tag{9}$$

可见 Ω 与 F_o 一一对应，Ω 随着 F_o 增大而增大(见图 2)。

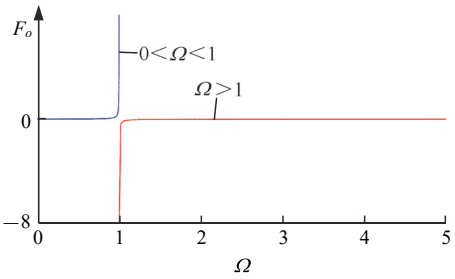


图 2　非达西程度因子与福希海默数的关系

Fig.2　Relationship between non-Darcy factor and Forchheimer number

进一步，雷诺数 Re 可由下式计算：

$$Re=\frac{\Omega}{1-\Omega}\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{k\rho\beta} \tag{10}$$

如果满足立方定律，存在 $k=\delta_{\mathrm{h}}^2/12$，则雷诺数 Re 可改为

$$Re=\frac{12\Omega}{1-\Omega}\frac{1}{\rho\beta\delta_{\mathrm{h}}} \tag{11}$$

记 Re_{c} 为临界雷诺数，当 $Re<Re_{\mathrm{c}}$ 时，惯性效应微弱，黏滞作用主导，裂隙渗流满足达西定律；当 $Re>Re_{\mathrm{c}}$ 时，惯性作用开始主导控制渗流状态，体现为非线性。若 Re 持续增大，黏滞效应可忽略不计，则变为紊流状态。

L. F. Moody 和 N. J. Princeton[47]发现对于非牛顿流体，达西定律一般并不适用，通过 Fanning 摩擦因数 f 和雷诺数 Re 关系曲线可以区分达西流($Re\leqslant5$)、高速非达西流($5<Re<100$)以及紊流($Re\geqslant100$)。事实上，高速非达西流是一个过渡区，在前段惯性力开始起支配作用，但仍是层流；在后段转变为紊流[48]。当 $Re>100$ 时，流体满足[49]：

$$-\nabla P=\frac{\mu}{k}u+\beta\rho u^n \tag{12}$$

在低速非达西流条件下，幂指数 $n\leqslant2$；而在高速非达西流条件下，幂指数 $n>2$。

2.2　分形粗糙裂隙饱和流临界流速推导

如图 3 所示，初始平行板模型中的板长是由沿流体方向的裂隙特征长度简化而来，将其记作 L，单位为 m；将与裂隙长度方向垂直的裂隙横向延伸长度简化为平行板板宽，则层流条件下，牛顿流体在开度为 δ_{h} 的平行板裂隙内，单位宽度体积流量 q 遵循如下泊肃叶定律：

$$q_i=-\frac{\delta_{\mathrm{h}i}^3}{12\mu}\nabla P=-\frac{\delta_{\mathrm{h}i}^3}{12\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}L} \tag{13}$$

式中：$\mathrm{d}P/\mathrm{d}L$ 为参量导数，用于表征 P 随 L 变化的泛函依赖。实际中 L 固定，但此导数揭示其理论敏感度变化的泛函依赖。

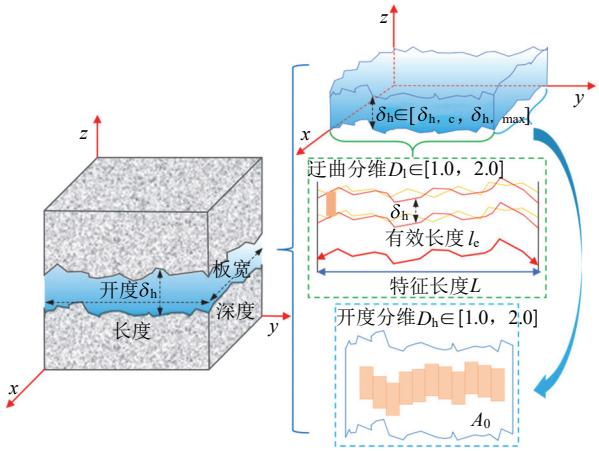


图 3　粗糙裂隙的迂曲分维和开度分维

Fig.3　Fractal dimensions of tortuosity and aperture in rough fractures

当认识到平行板模型过于简化，忽略了裂隙表面粗糙度引发的阻力变化，众多学者考虑真实裂隙长度的迂曲效应，在平行板模型中引入了迂曲度的概念[50-52]，裂隙的迂曲度 ζ 定义为有效长度 l_{e} 与特征长度 L 的比值，即

$$\zeta=\frac{l_{\mathrm{e}}}{L} \tag{14}$$

为了更准确地描述裂隙内压力梯度，将板长由裂隙的特征长度替换为迂曲长度(即有效长度)，式(13)改写为

$$q_i=-\frac{\delta_{hi}^3}{12\mu}\nabla P=-\frac{\delta_{hi}^3}{12\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\zeta\mathrm{d}L}=-\frac{\delta_{hi}^3}{12\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}l_e} \tag{15}$$

但随着研究的深入，发现对迂曲度 ζ 和有效长度 l_e 的表征受限于物理试验的测量精度，无法从理论角度对其进行更完善的表征。大量研究表明，天然岩石裂隙具备分形理论中的统计自相似性特征和标度不变性，薛东杰等[53-60]通过建立的粗糙裂隙断面分形模型，验证了粗糙裂隙的粗糙程度和开度在模型尺度变化过程中存在统计上的自相似性，二者的分布特征在空间尺度变化过程中始终保持一致，天然岩石裂隙存在可表征结构的定量性质，即分形维数。其中，表征裂隙长度的迂曲分维为 D_l，$D_l\in[1.0,\ 2.0]$；表征裂隙开度的分形维数为 D_h，$D_h\in[1.0,\ 2.0]$(见图 3)。如图 4 所示，结合分形理论，为了更准确且更合理地表征裂隙有效长度 l_{ei}，利用裂隙开度 δ_{hi} 作为码尺测量裂隙有效长度 l_{ei}，不同的 δ_{hi} 所得的测量结果 l_{ei} 不是常数，而是关于码尺 δ_{hi} 的函数 $l_{ei}=l_{ei}(\delta_{hi})$，即

$$l_{ei}(\delta_{hi})=N(\delta_{hi})\delta_{hi} \tag{16}$$

式中：$N(\delta_{hi})$ 为利用开度 δ_{hi} 作为码尺所得到的尺数，它遵从分形标度律：

$$N(\delta_{hi})=A\left(\frac{\delta_{hi}}{L}\right)^{-D_l} \tag{17}$$

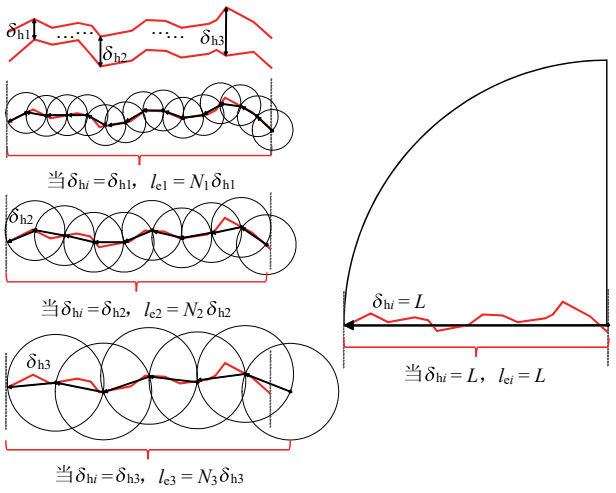


图 4　以开度为码尺测量裂隙有效长度

Fig.4　Quantifying effective fracture length with aperture as the scaling metric

当码尺 δ_{hi} 与裂隙的特征长度 L 一致时，测得的有效长度 $l_{ei}=L$，即 $N(L)=1$，因而 A 近似等于 1，所以式(17)可写为

$$N(\delta_{hi})=\left(\frac{\delta_{hi}}{L}\right)^{-D_l} \tag{18}$$

将式(18)代入式(16)中，可得到测量的有效长度 l_{ei}：

$$l_{ei}(\delta_{hi})=(L)^{D_l}\delta_{hi}^{1-D_l} \tag{19}$$

对任意 l_{ei} 求关于 L 的微分，均对应存在：

$$\frac{\mathrm{d}l_e}{\mathrm{d}L}=D_l(L)^{D_l-1}\delta_h^{1-D_l} \tag{20}$$

联立式(20)和(15)，则单位宽度裂隙流量为

$$q=-\frac{\delta_h^3}{12\mu}\frac{\delta_h^{D_l-1}}{D_lL^{D_l-1}}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}L} \tag{21}$$

如图 4 所示，在深度方向断面上，任意位置截取一单位横截面 A_0，裂隙开度 δ_h 在 $\delta_{h,\,c}\sim\delta_{h,max}$ 范围内连续分布，裂隙纵断面上开度大于 $\delta_{h,\,c}$ 的累积数 $N_c(\delta_h\geqslant\delta_{h,\,c})$ 满足关系：

$$N_c(\delta_h\geqslant\delta_{h,\,c})=\left(\frac{\delta_{h,max}}{\delta_{h,\,c}}\right)^{D_h} \tag{22}$$

式中：$\delta_{h,\,max}$ 为最大裂隙开度(m)。式(22)成立的必要条件为：$(\delta_{h,\,c}/\delta_{h,max})^{D_h}\ll1$，记 $\delta_{h,\,c}/\delta_{h,max}=10^{-n}$，则 $(\delta_{h,\,c}/\delta_{h,max})^{D_h}=10^{-nD_h}$，当开度跨度分布大于 2 个数量级时，必要条件成立产生的误差较小[61]。

若式(22)关系成立，则存在：

$$-\frac{\mathrm{d}N_c}{\mathrm{d}\delta_{h,\,c}}=D_h(\delta_{h,\,max})^{D_h}(\delta_{h,\,c})^{-(D_h+1)} \tag{23}$$

对瞬时流量 q (式(20))在截面积 A_0 上积分后再平均，即可求得渗流速度：

$$V=\frac{1}{A_0}\int_{\delta_{h,\,c}}^{\delta_{h,max}}q\mathrm{d}N_c \tag{24}$$

将式(20)和(23)代入式(24)，可得

$$V=\frac{1}{A_0}\int_{\delta_{h,\,c}}^{\delta_{h,max}}\left(\frac{\delta_h^3}{12\mu}\frac{\delta_h^{D_l-1}}{D_lL^{D_l-1}}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}L}\right)\cdot$$

$$[D_h(\delta_{h,\,max})^{D_h}(\delta_{h,\,c})^{-(D_h+1)}]\mathrm{d}\delta_{h,\,c} \tag{25}$$

积分后可得

$$V=\frac{D_h(\delta_{h,\,max})^3}{A_0 12\mu D_l(2+D_l-D_h)}\cdot$$

$$(1-\lambda_\delta^{2+D_l-D_h})\left(\frac{\delta_{h,\,max}}{L}\right)^{D_l-1}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}L} \tag{26}$$

式中：$\lambda_\delta=\delta_{h,\,c}/\delta_{h,max}$，为最小裂隙开度比，即满足分形裂隙结构的裂隙最小开度与最大开度之比。

令截面积取单位面积，即 $A_0=1$，则粗糙裂隙渗透率 $\tilde{k}$ 为

$$\tilde{k}=\frac{D_{\mathrm{h}}(\delta_{\mathrm{h,\ max}})^3}{12D_{\mathrm{l}}(2+D_{\mathrm{l}}-D_{\mathrm{h}})}(1-\lambda_{\delta}^{2+D_{\mathrm{l}}-D_{\mathrm{h}}})\left(\frac{\delta_{\mathrm{h,\ max}}}{L}\right)^{D_{\mathrm{l}}-1} \tag{27}$$

可见，其与裂隙细观尺寸、结构等几何特征密切相关，主要包括最大裂隙开度、最小裂隙开度比、开度和迂曲度分维。

类似地，裂隙孔隙度 ϕ 为

$$\phi=\frac{D_{\mathrm{h}}D_l\delta_{\mathrm{h,\ max}}}{\eta_0(D_{\mathrm{h}}+D_{\mathrm{l}}-2)}\left(\frac{1}{\lambda_{\delta}^{D_{\mathrm{h}}+D_{\mathrm{l}}-2}}-1\right)\left(\frac{L}{\delta_{\mathrm{h,max}}}\right)^{D_{\mathrm{l}}-1} \tag{28}$$

式中：η_0 为单位面积 A_0 的单位裂隙宽度(m)。

对于平均开度为 $\overline{\delta}_{\mathrm{h}}$ 的粗糙裂隙，Fanning 摩擦因数 f 为[62]

$$f=\frac{\phi^2\overline{\delta}_{\mathrm{h}}}{2\rho u^2}\nabla P \tag{29}$$

在达西范围内雷诺数($Re=\rho\delta_{\mathrm{h}}u/\phi\mu$)和 Fanning 摩擦因数 f 满足：

$$fRe=\frac{\phi\overline{\delta}_{\mathrm{h}}^2}{2u\mu}\nabla P=-C \tag{30}$$

式中：C 为常数。

由式(30)可得

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{\phi\overline{\delta}_{\mathrm{h}}^2}{2\mu fRe}\nabla P=-\frac{k}{\mu}\nabla P=\frac{\phi\mu}{\overline{\delta}_{\mathrm{h}}\rho}Re\\ \nabla P&=fRe^2\frac{2\mu^2}{\overline{\delta}_{\mathrm{h}}^3\rho}\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

其中，

$$k=-\phi\overline{\delta}_{\mathrm{h}}^2/(2\mu fRe)$$

达西流上限雷诺数为 Re_{c}，一般取值为 5～10，则对应的分形粗糙裂隙饱和非达西流临界流速 u_{c} 为

$$u_{\mathrm{c}}=\frac{\phi\mu}{\overline{\delta}_{\mathrm{h}}\rho}Re_{\mathrm{c}} \tag{32}$$

2.3 粗糙裂隙 Bingham 流体渗流求解

对于 Bingham 流体，不考虑重力，则存在单位宽度条件下的平衡方程：

$$-\int_{\delta_{\mathrm{h},\ i}}^{\delta_{\mathrm{h,max}}}\eta_0\delta_{\mathrm{h}}\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{A_0}\mathrm{d}N_{\mathrm{c}}\mathrm{d}p=\int_{\delta_{\mathrm{h},\ i}}^{\delta_{\mathrm{h,max}}}2(\eta_0+\delta_{\mathrm{h}})\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{A_0}\mathrm{d}N_{\mathrm{c}}\tau\mathrm{d}L \tag{33}$$

式中：τ 为流体的剪切应力(Pa)。

化简后，得

$$\tau=-\frac{2}{1/\delta_{\mathrm{h}}+1/\eta_0}\nabla P \tag{34}$$

当 $\eta_0=1$ 时，存在：

$$\tau=-\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{2}\nabla P \tag{35}$$

式(35)与平行板流解完全一致，这说明粗糙裂隙流在求解 Bingham 流体时可完全等效为平行板流模型，与迂曲度和开度分维没有关系。

考虑 Bingham 流体本构方程[63]为

$$\tau=\tau_0-\mu_{\mathrm{P}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\delta_{\mathrm{h}}}=\tau_0-\mu_{\mathrm{P}}\gamma \tag{36}$$

式中：τ 为屈服剪切应力(Pa)，表征了流体的塑性；μ_{P} 为塑性黏度(Pa·s)；γ 为剪切率(s^{-1})。

联合式(35)和(36)，得

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\delta_{\mathrm{h}}}=\frac{\tau-\tau_0}{\mu_{\mathrm{p}}}=-\frac{1}{\mu_{\mathrm{p}}}\left(\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{2}\nabla P+\tau_0\right) \tag{37}$$

当 $\tau=\tau_0$ 时，对应流体不受剪切作用，即在开度内存在一个范围，当 $0\leqslant|\delta_{\mathrm{h}}|<|\delta_0|$ 时流体才处于活塞运动状态，内部的速度差异忽略，此时临界范围 δ_0 为

$$\delta_0=-\frac{2\tau_0}{\nabla P} \tag{38}$$

当 $|\delta_0|\leqslant|\delta_{\mathrm{h}}|\leqslant|\overline{\delta}_{\mathrm{h}}|$ 时，若为剪切层流，对式(37)积分，则流速为

$$\begin{aligned}u(\delta_{\mathrm{h}})&=\frac{1}{\mu_{\mathrm{P}}}\int_{\delta_{\mathrm{h}}}^{\overline{\delta}_{\mathrm{h}}}\left(\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{2}\nabla P+\tau_0\right)\mathrm{d}\delta_{\mathrm{h}}=\\ &\frac{1}{\mu_{\mathrm{P}}}\left[\frac{\nabla P}{4}(\overline{\delta}_{\mathrm{h}}^2-\delta_{\mathrm{h}}^2)+\tau_0(\overline{\delta}_{\mathrm{h}}-\delta_{\mathrm{h}})\right]\end{aligned} \tag{39}$$

当 $0\leqslant|\delta_{\mathrm{h}}|<|\delta_0|$ 时，流体处于活塞运动状态，则有

$$u_0(\delta_{\mathrm{h}})=\frac{1}{\mu_{\mathrm{P}}}\left[\frac{\nabla P}{4}(\overline{\delta}_{\mathrm{h}}^2-\delta_0^2)+\tau_0(\overline{\delta}_{\mathrm{h}}-\delta_0)\right] \tag{40}$$

流量 Q 为通过剪切区($|\delta_0|\leqslant|\delta_{\mathrm{h}}|\leqslant|\overline{\delta}_{\mathrm{h}}|$)和活塞区($0\leqslant|\delta_h|<|\delta_0|$)的流量之和，即

$$Q=\int_{\delta_0}^{\overline{\delta}_{\mathrm{h}}}2\eta u(\delta_{\mathrm{h}})\mathrm{d}\delta_{\mathrm{h}}+2\eta\delta_0u_0(\delta_{\mathrm{h}}) \tag{41}$$

式中：η 为裂隙宽度的全长(m)。

令 $Q=0$，则可解得

$$-\nabla P=\frac{2\tau_0}{\overline{\delta}_{\mathrm{h}}} \tag{42}$$

达西定律适用范围也存在速度下限，在低速情况下水也可能出现类似 Bingham 流体的特征，即存在一个启动压力梯度 ∇P_λ。这可能与粗糙壁面静摩擦力相关，也可能与吸附水层阻碍流体运动相关。因此，由式(42)可知，从理论本构角度出发，当 $\nabla P<\nabla P_\lambda$ 时，流速 $u=0$，启动压力梯度存在。但对于流体单元，剪切速率(速度梯度)为 0，启动压力梯

度必为 0，在科学意义上启动压力并不存在。

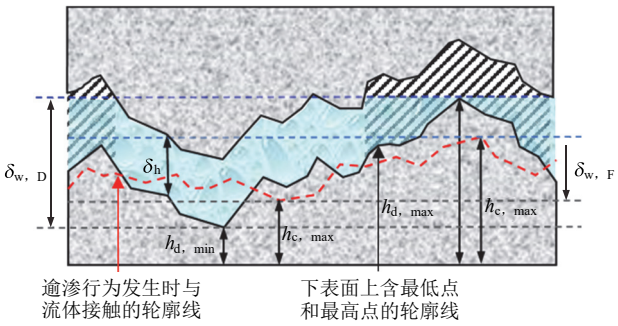
2.4　裂隙非饱和渗流跨越速率定义

在裂隙渗流的工程背景下，逾渗阶段内，整个系统的渗透性会发生显著变化，可能从几乎不渗透转变为开始有流体流动。当系统达到输运逾渗阈值时，系统内会形成跨越整个系统的连通路径，此时流速可能从零突变为非零[64-67]。但不同的裂隙粗糙度和开度会使这个连通时的“非零值”不尽相同，换言之，逾渗现象对应的流速从零到非零并不是线性过渡，而是存在突变特征。

无论裂隙入水端的初始流速及压力(水头)的大小为多少，流体的逾渗过程均受裂隙上下表面的起伏构造和惯性效应影响。但目前学界对流体在逾渗过程中的运动方程尚未有定论，能量方程、扩散方程和渗流方程似乎都可适用，但又都不能准确描述流体的完整运动特性和输运逾渗阈值。

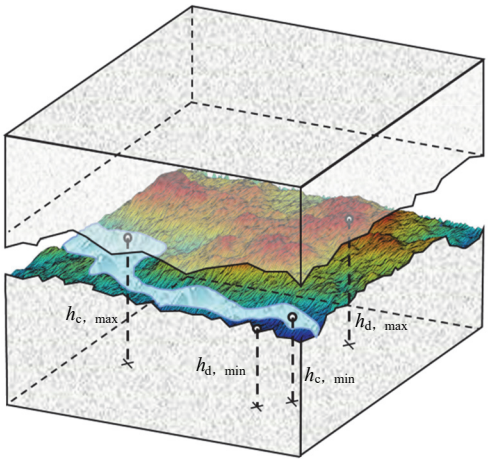
对于饱和流，求解其裂隙出水端通量 $\Phi>0$ 时的渗流跨越速率时，由于裂隙横剖面内存在非线性的流速分布，不可避免地要考虑边界层效应。将裂隙简化为平行板模型，随着流体沿平板的前进运动，边界层内的流态有层流和紊流 2 种可能，且两者间存在一个过渡区域，称为变流区。两者的边界层效应有显著区别：(1) 层流边界层的速度剖面呈抛物线形，从壁面处的零速度(无滑移条件)平滑过渡到外层主流速度；(2) 紊流边界层的速度剖面则呈对数律分布，壁面处(y = 0)的最低速度仍然为 0(无滑移条件)，外层速度更快地接近主流速度；(3) 紊流边界层的厚度和壁面摩擦阻力远大于层流边界层，且因涡旋的剧烈混合作用，其能量耗散率更高。因此可以确定，在饱和流条件下，光滑平行板裂隙模型中的渗流跨越速度的起点均为 0，这是黏性流体在液－固两相环境中排除了粗糙度引起的惯性作用的结果。

而粗糙裂隙内流体的逾渗现象往往并非是饱和流态下的液－固两相问题(见图 5)。图 5 中，$\delta_{\mathrm{w,\ F}}$ 为逾渗相变时裂隙内的水力开度，可表示为接触流体的轮廓线上最大粗糙高度 $h_{\mathrm{c,\ max}}$ 与最小粗糙高度 $h_{\mathrm{c,min}}$ 的差值；$\delta_{\mathrm{w,\ D}}$ 为在裂隙出口端全段有流体流出时的水力开度，此时流体刚好覆盖下表面全域，裂隙内的水力开度可表示为下表面最大粗糙高度($h_{\mathrm{d,max}}$)与最小粗糙高度($h_{\mathrm{d,min}}$)的差值。2 种水力开度的数值关系表现为 $\delta_{\mathrm{w,\ F}}\subseteq\delta_{\mathrm{w,\ D}}$，当且仅当裂隙下表面光滑平整、无粗糙起伏的状态下(如平行板模型)，存在 $\delta_{\mathrm{w,\ F}}=\delta_{\mathrm{w,\ D}}$。随着入口端流体压力梯度的增大，裂隙内的流态由非饱和流向饱和流转变，水力开度随之由 $\delta_{\mathrm{w,\ D}}$ 增加至裂隙开度 δ_{h}，流速与压力梯度的关系逐渐演变为线性关系。



(a) 沿流体流动方向裂隙截面内的逾渗现象

(a) Percolation phenomenon within the fracture cross-section along the fluid flow direction



(b) 裂隙下表面的流体逾渗现象

(b) Fluid percolation phenomenon on the lower surface of the fracture

图 5　粗糙裂隙内流体逾渗现象

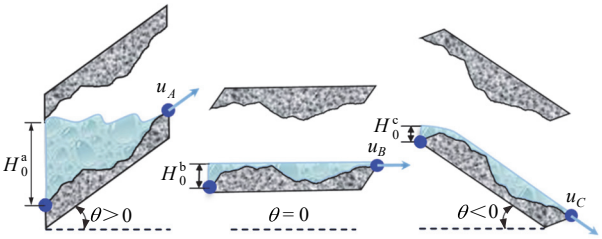
Fig.5　Fluid percolation in rough fractures

在二维裂隙剖面中，整段裂隙的起伏曲折决定了渗流刚好形成时裂隙中的非阴影区域必定处于水饱和状态，而仅有阴影区域是非饱和状态，裂隙上表面的粗糙度对非饱和渗流运动的影响基本可以忽略，逾渗时的实际水力开度小于最大的裂隙开度(δ_{h})。而在三维视角下考虑流体逾渗时，流体往往不需要覆盖下表面整体即可流通，如图 5(b)所示。在渗流刚好形成时，极可能出现仅有“主流干道”存在有水附着的状态，其中部分位置是水饱和状态，某些位置为如图 5(a)所示的二维非饱和状态，而其他区域或“支流”受下表面粗糙度和裂隙开度影响出现非饱和或无水赋存状态。

由此可见，不同于饱和流态的液－固两相问题，粗糙裂隙内非饱和流态面临的是气－液－固三相问题，如果仍然从考虑表面张力、边界层效应、惯性作用和渗流运动等因素的正向推理角度出发，无疑

将使对逾渗相变的研究困难重重。因此，本文从逆向推理的角度，以逾渗相变一定发生作为前提，结合当前国内外对低速渗流运动的研究现状，做出两点假设：达西渗流和非达西渗流 2 种流态，求解裂隙出水端任意一点通量 $\Phi>0$ 时的速率大小，即渗流跨越速率。

不同倾角条件下张裂隙内的流体逾渗相变如图 6 所示。可以发现，无论对于图中何种情况，当入水端的水头 H 无限趋近于 0 时($\lim H\to 0$)，流体不可能从裂隙内流过另一端，逾渗过程将一直持续；而当水头超过 H' 时，流体流过另一端时的流速将与初始水头呈正相关。那么可以假定，存在一个临界水头 H_0，使流体刚好流过裂隙另一端边界，此时的速率即为渗流跨越速率，如图 6 中出水端的速率 u_A，u_B 和 u_C。



(a) 仰角裂隙　(b) 平行裂隙　(c) 俯角裂隙
(a) Dip-angle fracture　(b) Parallel fracture　(c) Counter-dip fracture

图 6　不同倾角条件下裂隙内的流体逾渗相变

Fig.6　Fluid percolation phase transition in fractures at different dip angles

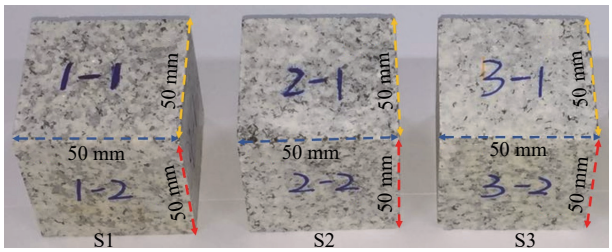
3　裂隙低速渗流逾渗模型与验证

对于工程尺度的裂隙岩体，启动压力梯度的定义中忽视了裂隙内粗糙表面的影响，没有将由粗糙度和重力引发的摩擦损失纳入理论公式中[68]，因此不适合作为研究逾渗过程转向渗流运动临界点的切入概念。在粗糙裂隙介质内，水的逾渗过程也可以表述为水和空气的两相不混溶流体驱替过程：参考黏性指进现象，低速流体受黏滞力影响显著，结合粗糙起伏表面对水的重力偏量影响，下表面粗糙度引起的摩擦损失对流体动能的影响相比惯性作用更大，裂隙介质内水的逾渗运动可排除受惯性效应主导的涡流或回流运动。

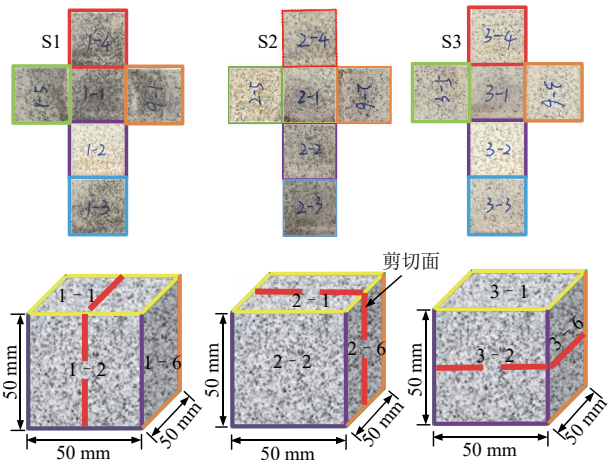
为了便于分析和计算，将下表面的粗糙度作为整个裂隙流动阻力的主要表征。它的起伏和变化足以用来统计性地描述流体在穿过裂隙时需要克服的摩擦损失。将起伏不平的粗糙裂隙分解为由长度 Δl 组成的单元裂隙模型，使开度 $\delta_h >> \Delta l$，复杂的粗糙裂隙流动问题就可以等效为一个以下表面粗糙度为代表的平行平板流动问题。因此可忽略上表面粗糙度对流速的影响，建立只考虑下粗糙表面和裂隙开度影响的逾渗模型，即粗糙裂隙单元逾渗模型。

3.1　硬岩裂隙粗糙断面重构

岩芯取自中国西北甘肃省北山地区地下 500 m 深度，该埋深处于未来我国高放核废料地下深埋处置的理想深度范围(500～1 000 m)内。岩性为花岗岩，不同深度处颗粒的粗细程度迥异，钻芯质量指标(*RQD*)大多分布在 90%～100%范围内，即节理稀少、完整性好。通过 X 射线衍射(XRD)分析：石英、钾长石、斜长石和云母含量分别为 20.05%，13.55%，33.65%和 20.05%，其他含量为 1.65%。扫描电镜(SEM)细微尺度观察：其结构致密，晶体矿物间连接紧密，偶见表观微裂纹。将圆柱体加工为边长 50 mm 的立方体，偏差为±0.3 mm(见图 7(a))。6 个端面的不均匀度偏差为±0.05 mm，相邻横截面互相垂直，偏差为±0.25°。共制备 3 个样品，编号分别为 S1，S2 和 S3(见图 7(b))。



(a) 立方体试样 S1，S2 和 S3
(a) Cube samples S1, S2 and S3



(b) 试样表面编号及剪切面
(b) Samples surface numbering and shear plane

图 7　甘肃北山花岗岩试样

Fig.7　Granite samples in Gansu Beishan

花岗岩相对均匀，但剪切性质仍表现为各向异性。为建立粗糙断面模型，试验中采用压缩剪切试验

(compression shear test，CST)，剪切角均设为 75°。

花岗岩立方体试样经压剪破坏后，清除破碎颗粒，相对的 2 个粗糙壁面之间的空隙即为裂隙。如图 8 所示，完整体被切割为 2 个部分。

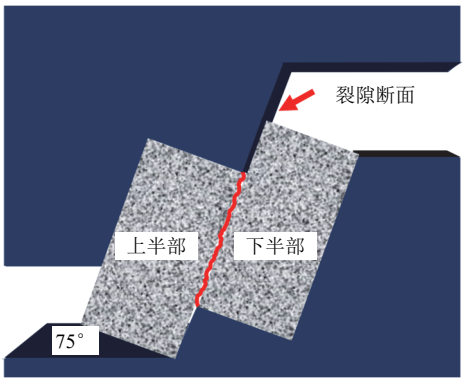
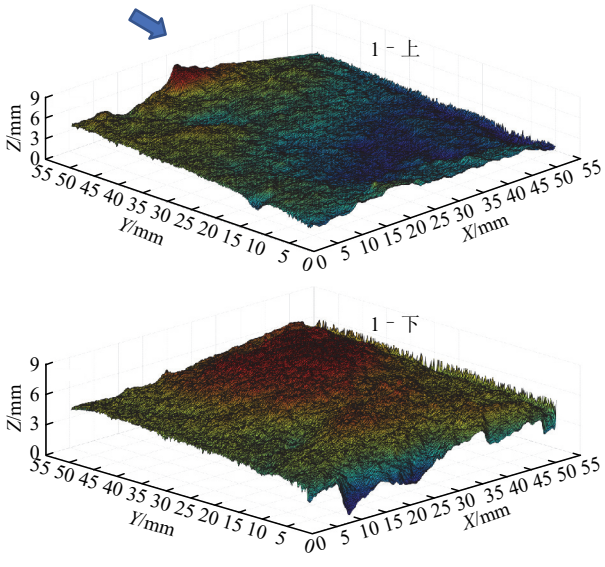


图 8　压缩剪切试验示意图

Fig.8　Schematic diagram of compression-shear test

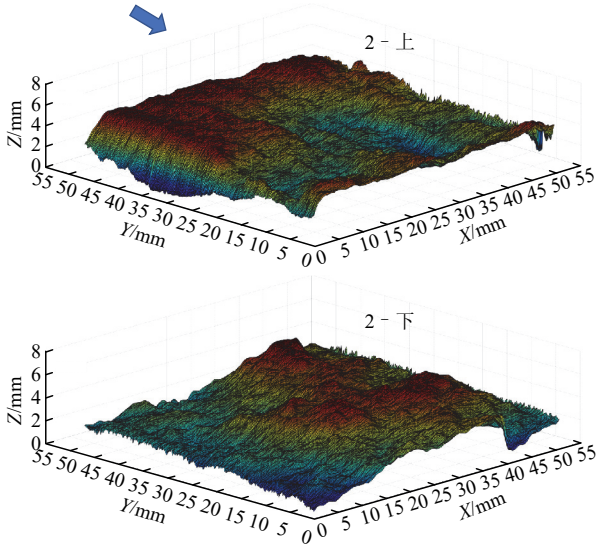
3 组花岗岩试样经压缩剪切试验后，得到了 3 组正交的断裂粗糙断面，每组含上、下 2 个断面，相互分离的断面形态决定了裂隙开度模型。采用激光轮廓仪扫描粗糙表面以对断面进行建模，该轮廓仪的扫描长度为 150 mm，最小间隔(即精度)为 0.1 mm，得到了 506×498，491×500 和 507×471 三组裂隙断面的网格数据。3 组数据分别对应 x，y 和 z 轴，其中 z 轴数据表示粗糙断面的凸起或凹陷高度。

通过使用 MATLAB 软件处理扫描数据，实现断面的三维重建(见图 9)，可以直观地看到 3 组花岗岩试样的上、下裂隙表面，箭头表示剪切方向，图中冷暖色调分布表示相应点的凸起高度，颜色越偏向暖色，则高度值越大。



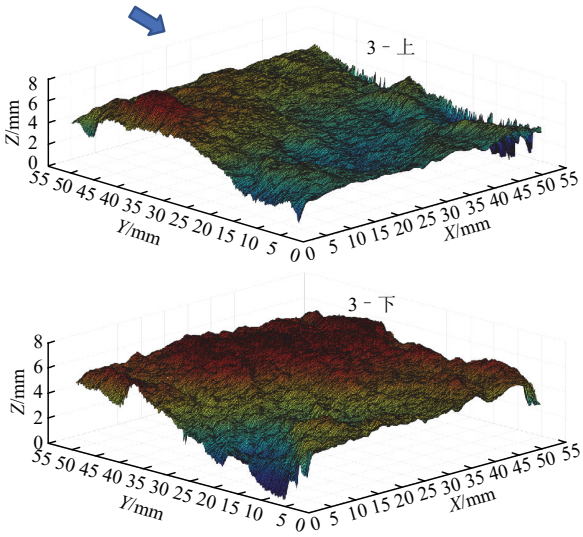
(a) S1 裂隙表面

(a) Fracture surface of sample S1



(b) S2 裂隙表面

(b) Fracture surface of sample S2



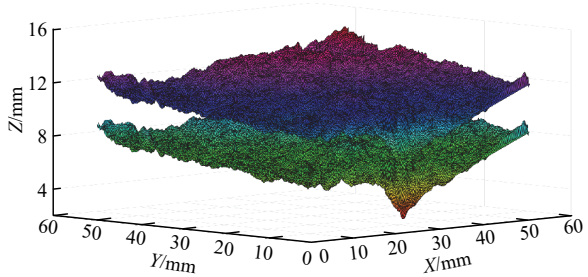
(c) S3 裂隙表面

(c) Fracture surface of sample S3

图 9　3 组粗糙裂隙的上、下表面

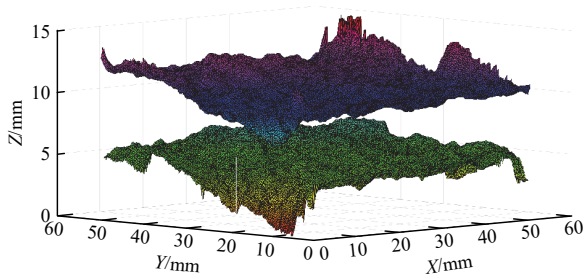
Fig.9　Upper and lower surfaces of three groups of rough fractures

压剪破坏后裂隙处于原位状态，在宏观尺度观察范围内，裂隙上、下粗糙表面凹凸性基本对应。为确保裂隙渗流系统一定发生逾渗相变，首先将上表面翻转并升高一定距离，调整至与下表面相对应的空间位置(见图 10)；其次将上表面与下表面在竖直方向上完全分离，使裂隙的两个表面至多有一点接触；最终得到满足流体可覆盖裂隙全域条件下的最小裂隙开度模型。以此最小裂隙开度值作为等效水力开度，通过此最小裂隙开度模型得到的流体渗流跨越速率和临界连通区域结果，将表征未受损原始裂隙在非饱和流态条件下其输运逾渗阈值的近似解。



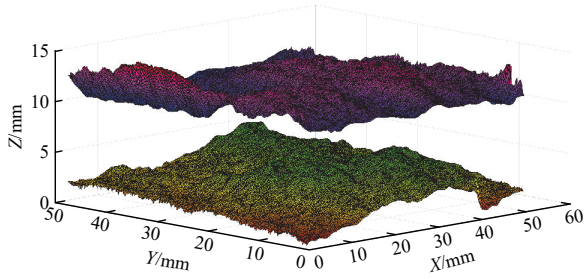
(a) S1 裂隙重构

(a) Reconstruction of S1 fracture



(b) S2 裂隙重构

(b) Reconstruction of S2 fracture



(c) S3 裂隙重构

(c) Reconstruction of S3 fracture

图 10　含粗糙表面的开度模型重构

Fig.10　Reconstruction of an aperture model incorporating rough surfaces

基于重构的最小开度模型，通过上、下表面对应点的粗糙高度差值，求解得到等效水力开度分布 $[\delta_{hij}]$。下表面上相邻两点的粗糙高度为 $h_{i,\ j}$ 与 $h_{i,\ j+1}$，两点间水平距离为 Δl。通过下式可得到粗糙角度 $\theta_{i,\ j}$ 分布：

$$\theta_{i,\ j}=\arctan\left(\frac{h_{i,\ j+1}-h_{i,\ j}}{\Delta l}\right) \tag{43}$$

D. J. Xue 等[61]验证了粗糙角度在描述裂隙面粗糙度方面具有很高的灵敏性。图 11 为 3 组裂隙的等效水力开度分布和粗糙角度分布，其中，等效水力开度以 0.2 mm 为频率分布区间，粗糙角度以 3° 为频率分布区间。3 组裂隙均符合正态分布，采用非线性 Gauss 函数拟合，拟合程度 R^2 基本满足要求。

3.2　低速渗流单元逾渗建模

当裂隙出水端通量 $\Phi>0$ 后，裂隙内流量 $Q>0$，裂隙流体运动适用渗流运动方程。但学界对于达西渗流之前是否存在低速非达西渗流存在争议，因此做 Darcy 流和 Forchheimer 流 2 种假设，按照 2 种流态公式分别求解渗流跨越速率。

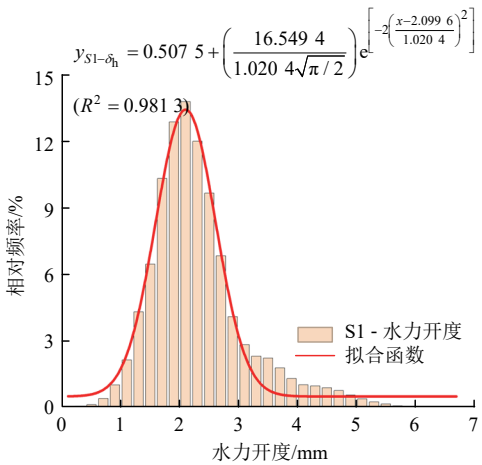
(1)　建立符合 Darcy 流假设和 Forchheimer 流假设的单元逾渗模型

如图 12 所示，以裂隙面网格中沿渗流方向上相邻两点所包含的空间作为一个单元逾渗模型，模型中变量包括粗糙角度分布 $\theta_{i,\ j}$ 和等效水力开度分布 $\delta_{\mathrm{h}i,\ j}$。因此，以裂隙 S1 为例，基于粗糙裂隙表面网格(506×497)，可得到 506×496 个独立的单元逾渗模型。

为使本研究提出的单元逾渗模型成立，需要满足如下假设：

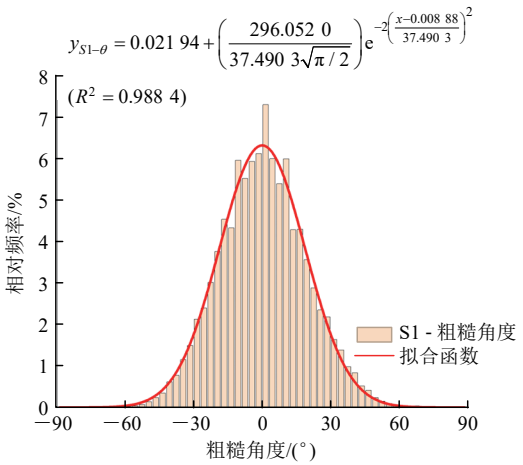
① 由于单元长度 Δl 足够短，裂隙单元可近似为平行板，局部渗透率 k 仅受开度 δ_{h} 控制，裂隙单元满足立方定律：$k=\dfrac{\delta_{\mathrm{h}}^{\ 2}}{12}$；

② 在足够短的单元长度 Δl 内，流速 u 处处相等，动能差 $(u_2^2-u_1^2)/(2g)$ 在单元长度 Δl 内的渗流运动中可以被忽略；



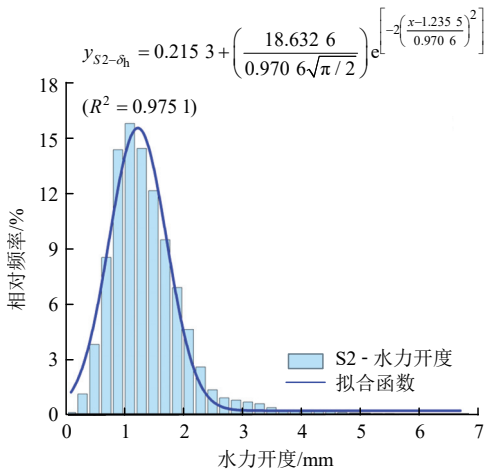
(a) S1 裂隙水力开度分布

(a) Hydraulic aperture distribution of S1 fracture



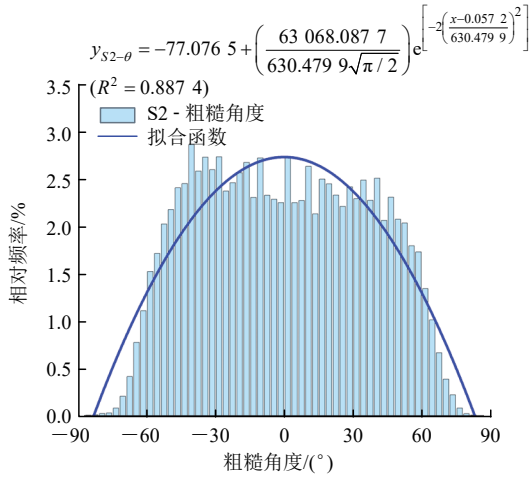
(b) S1 裂隙粗糙角度分布

(b) Roughness angle distribution of S1 fracture



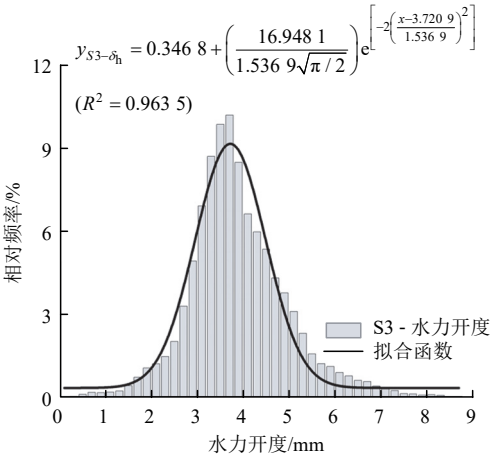
(c) S2 裂隙水力开度分布

(c) Hydraulic aperture distribution of S2 fracture



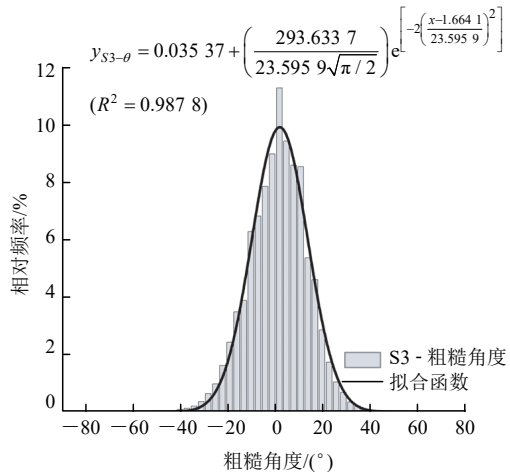
(d) S2 裂隙粗糙角度分布

(d) Roughness angle distribution of S2 fracture



(e) S3 裂隙水力开度分布

(e) Hydraulic aperture distribution of S3 fracture



(f) S3 裂隙粗糙角度分布

(f) Roughness angle distribution of S3 fracture

图 11　等效水力开度和粗糙角度的分布情况

Fig.11　Distributions of equivalent hydraulic aperture and roughness angle

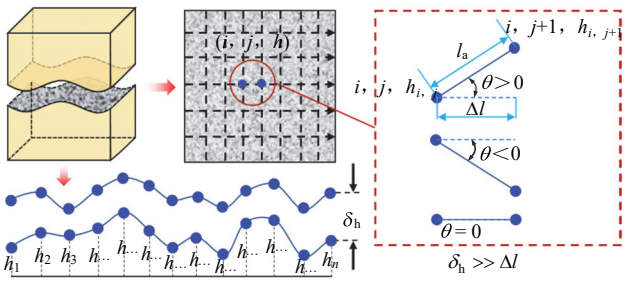


图 12　基于裂隙开度和下表面粗糙角度的单元逾渗模型

Fig.12　Fracture aperture and lower surface roughness angle-based cell percolation model

③ 当单元相邻两点处于同一水平线，即粗糙角度 $\theta=0$ 时，两点间最低跨越速率 $u_{\theta=0}=0$。

该单元逾渗模型忽略上表面粗糙角度的影响，重点考虑下表面粗糙角度引起的能量损耗和惯性效应影响。对于黏性流体渗流，内摩擦力将损耗能量，能量守恒关系和伯努利方程不再严格适用。此时，流体流动过程中的能量损耗主要表现为机械能转化为内能，导致系统能量减少。在这种情况下，为了量化黏滞力引起的能量损失，需要使用能量方程来描述流体的势能、动能和损耗能之间的关系。能量守恒方程的一般形式为

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{u_1^2}{2g}+h_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{u_2^2}{2g}+h_2+h_f \tag{44}$$

式中：P_1，P_2 分别为位置 1 和 2 的压力(Pa)；u_1，u_2 分别为位置 1 和 2 的流速(m/s)；h_1，h_2 分别为位置 1 和 2 的高度(m)；h_f 为流体从位置 1 到位置 2 的能量损失(单位 m，常称为水头损失)。压力差(Pa) $\Delta P=P_2-P_1$。

对式(44)做简单变换，可得

$$\frac{P_2-P_1}{\rho g\Delta l}+\frac{u_2^2-u_1^2}{2g\Delta l}+\frac{h_2-h_1}{\Delta l}+\frac{h_f}{\Delta l}=0 \tag{45}$$

式中：Δl 为相邻两点间的水平距离(m)；$\frac{P_1-P_2}{\Delta l}$ 为

压力梯度(Pa/m)，$\frac{P_1-P_2}{\Delta l}=-\frac{\Delta P}{\Delta l}=\nabla P$。记 Δh 为水头差(m)，$\Delta h=h_2-h_1$，则存在 $\tan\theta=\frac{\Delta h}{\Delta l}$。

因此，能量方程式(45)可改写为

$$-\frac{\nabla P}{\rho g}+\tan\theta+\frac{h_{\mathrm{f}}}{\Delta l}=0 \tag{46}$$

基于达西－魏斯巴赫公式[69]，在单元逾渗模型内摩擦损失项 h_{f} 可表示为

$$\Delta h_{\mathrm{f}}=\Delta f\frac{u^2}{2g}\frac{\Delta l}{D_{\mathrm{h}}} \tag{47}$$

式中：Δf 为单元逾渗模型内的局部 Fanning 系数，量纲为一；D_{h} 为由管道流等效到裂隙流的水力直径(m)，$D_{\mathrm{h}}=4A/M$，其中，A 为流体流通的有效横截面积(m^2)，M 为流体与固体壁面接触的边界总长度(m)，通常在计算裂隙介质单位宽度的体积流量时，认为 $D_{\mathrm{h}}=2\delta_{\mathrm{h}}$。

这里引入 Fanning 摩擦因数 f，定义为流体流动中的壁面剪应力($\tau_{\max}$)和动能密度($\frac{1}{2}\rho u^2$)的比值：

$$f=\frac{\tau_{\max}}{\frac{1}{2}\rho u^2} \tag{48}$$

对于低速渗流运动中的逾渗过程，两点间裂隙单元内存在 2 种可能流态，一种是达西线性渗流，另一种是非达西非线性渗流。相应地，单元逾渗模型内摩擦损失项 h_{f} 和局部 Fanning 摩擦因数 Δf 存在 2 种形式：

$$h_{\mathrm{f}}=\begin{cases}h_{\mathrm{f_D}} & (\text{达西流})\\ h_{\mathrm{f_F}} & (\text{非达西流})\end{cases} \tag{49}$$

和

$$\Delta f=\begin{cases}\Delta f_{\mathrm{D}} & (\text{达西流})\\ \Delta f_{\mathrm{F}} & (\text{非达西流})\end{cases} \tag{50}$$

① 达西线性渗流流态

Navier-Stokes 方程在流动方向 x 上可简化为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\mu\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2},\ y\in\left(-\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{2},\ \frac{\delta_{\mathrm{h}}}{2}\right) \tag{51}$$

求解二阶偏微分方程式(51)，可得

$$u(y)=\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}y^2+C_1y+C_2 \tag{52}$$

由于速度关于 $y=0$ 呈偶对称分布，因此 $C_1=0$。代入边界条件 $u\left(-\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{2}\right)=u\left(\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{2}\right)=0$，求得常数 $C_2=-\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\frac{\delta_{\mathrm{h}}^2}{4}$，解得速度分布为

$$u(y)=\frac{1}{2\mu}\left(-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\delta_{\mathrm{h}}^2}{4}-y^2\right) \tag{53}$$

基于 y 的定义域，对式(52)积分，可得

$$u=\frac{1}{\delta}\int_{-\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{2}}^{\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{2}}u(y)\mathrm{d}y=\frac{-\delta_{\mathrm{h}}^2}{12\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} \tag{54}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=-\frac{12\mu}{\delta_{\mathrm{h}}^2}u \tag{55}$$

根据图 13，结合式(53)和(55)，达西线性渗流流态条件下壁面剪应力 $\tau_{\max}$ (Pa)为

$$\tau_{\max}=\mu\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|_{y=\pm\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{2}}=\frac{6\mu u}{\delta_{\mathrm{h}}} \tag{56}$$

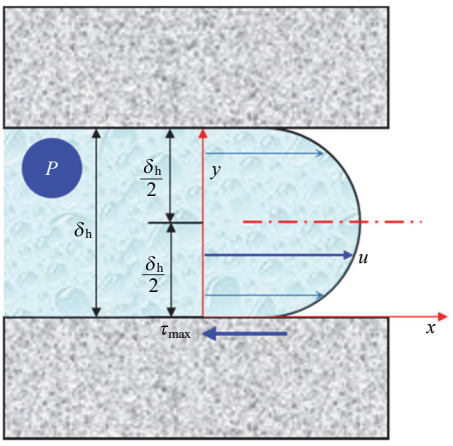


图 13　基于平行板模型的壁面剪应力

Fig.13　Wall shear stress derived from the parallel plate model

结合式(48)，达西线性渗流条件下局部 Fanning 摩擦因数 Δf_{D} 可以表示为

$$\Delta f_{\mathrm{D}}=\frac{\tau_{\max}}{\frac{1}{2}\rho u^2}=\frac{12\mu}{\rho u\delta_{\mathrm{h}}}=\frac{12}{Re} \tag{57}$$

由此，结合式(47)和(57)，达西线性渗流条件的局部 Fanning 摩擦因数 Δf_{D} 可以表示为

$$h_{f_{\mathrm{D}}}=\Delta f_{\mathrm{D}}\frac{u^2}{2g}\frac{\Delta l}{D_{\mathrm{h}}}=\frac{3\mu u\Delta l}{\rho g\delta_{\mathrm{h}}^2} \tag{58}$$

在倾斜裂隙中，当裂隙走向与水平线夹角为 θ 时，达西定律可表示为

$$-\nabla P=\frac{\mu}{k}u+\rho g\sin\theta \tag{59}$$

引入运动黏度 $\nu=\frac{\mu}{\rho}$，并联立式(46)，(58)和(59)，可得符合达西流的两点单元间逾渗速率 $|u_D|$ (m/s)为

$$|u_{\mathrm{D}}|=\left|\frac{-(\sin\theta+\tan\theta)}{15\nu}\delta_{\mathrm{h}}^2g\right| \tag{60}$$

② 非达西非线性渗流

压力梯度与流速呈现二次或更高次幂关系，通常采用 Forchheimer 公式：

$$-\nabla P=\frac{\mu}{k}u+\beta\rho u^2 \tag{61}$$

在非饱和流体运动情况下，对于作用于流体运动外边界上的壁面剪应力 $\tau_{\max}$ 的求解问题，通常参考计算 Bingham 流体启动压力梯度时所应用的壁面剪应力计算公式：

$$\tau_{\max}=-\frac{D_{\mathrm{h}}}{4}\nabla P=-\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{2}\nabla P \tag{62}$$

而在单元逾渗模型中，每个单元内两点间距离 Δl 足够短，假设流体同样存在一个启动压力梯度，参考式(62)，将式(61)和(62)代入式(48)，可得

$$\Delta f_{\mathrm{F}}=\frac{-\frac{\delta_{\mathrm{h}}}{2}\nabla P}{\frac{1}{2}\rho u^2}=-\delta_{\mathrm{h}}\left(\frac{\nu}{ku}+\Delta\beta\right) \tag{63}$$

式中：$\Delta\beta$ 为单元长度 Δl 内的 Forchheimer 惯性系数。将式(47)代入式(63)，可得

$$h_{f_{\mathrm{F}}}=\Delta f_{\mathrm{F}}\frac{\Delta l}{D_{\mathrm{h}}}\frac{u^2}{2g}=-\frac{\Delta l}{4g}\left(\frac{\nu u}{k}+\Delta\beta u^2\right) \tag{64}$$

C. S. Yao 等[4, 70-72]在总结了包含单裂隙介质、多孔介质及裂隙网络等多种条件的非达西渗流研究工作的基础上，提出了表征裂隙岩体的 Forchheimer 渗流惯性系数经验公式[73]：

$$\beta=3\times10^{-6}k^{-1.3} \tag{65}$$

参考式(65)，单元逾渗模型内的单元非线性渗流惯性系数可表示为

$$\Delta\beta=3\times10^{-6}\left(\frac{\delta_{\mathrm{h}}^{\,2}}{12}\right)^{-1.3} \tag{66}$$

式中：$\Delta\beta$ 为单元非线性渗流惯性系数(m^{-1})。

进一步，联立式(64)和(66)，符合 Forchheimer 非线性渗流条件的能量方程式(46)可表示为

$$\Delta\beta u^2+\frac{\nu}{k}u+\frac{4}{3}g\tan\theta=0 \tag{67}$$

根据假设③，即当单元相邻两点处于同一水平线，即粗糙角度 $\theta=0$ 时，两点间最低跨越速率 $u_{\theta=0}=0$，结合式(68)，可得符合 Forchheimer 流条件下的两点单元间逾渗速率唯一解 $|u_{\mathrm{F}}|$(m/s)为

$$|u_{\mathrm{F}}|=\left|\frac{\sqrt{9\nu^2-48k^2\Delta\beta g\tan\theta}-3\nu}{6k\Delta\beta}\right| \tag{68}$$

通过 Matlab 构建沿逾渗方向的粗糙角度和裂隙开度变量数据集，并基于式(60)和(68)，分别求解得到适用达西流条件和 Forchheimer 流假设下的单元逾渗速率集 $[u_{\mathrm{D}ij}]$ 和 $[u_{\mathrm{F}ij}]$。

(2) 基于扩散方程建立全域渗流逾渗模型

经典扩散方程，如 Fick 第二定律为[74]

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{69}$$

式中：C 为目标变量，表示浓度、温度或其他状态量，其单位根据目标的物理意义定义；D 为扩散系数，在本文中其单位为 m/s；t 为时间(s)。

A. M. Sørenssen[75]提出在边界上满足浓度恒定的前提下，以占位概率模型 $P(x,\ t)$ 作为扩散方程中的扩散粒子，则可得到体积浓度项 $C(x,\ t)$ 的精确解[75]，$P(x,\ t)$ 表达式为

$$P(x,\ t)=1-erf\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) \tag{70}$$

式中：$P(0,\ t)=1$；$erf(\cdot)$ 为误差函数，通过对扩散方程进行高斯函数积分得到其表达式为

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{n^2}{2}}\mathrm{d}n \tag{71}$$

由误差函数 $erf(\cdot)$ 得期望方差 $\langle x^2\rangle=Dt$，注意到：$x_{\mathrm{c}}(t)=\sqrt{Dt}$，定义 $P(x_{\mathrm{c}},\ t)=p_{\mathrm{c}}$，表示当 $x=x_{\mathrm{c}}$ 时的占据概率。

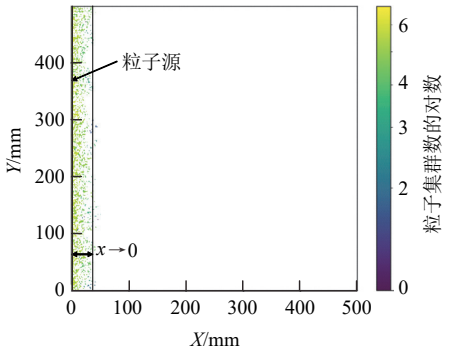
扩散前沿运动轨迹如图 14 所示，粒子从左侧的源头扩散，定义扩散前沿为：连接扩散源粒子和未连接扩散源粒子分离的前沿。在这个系统中，占位概率 $P(x,\ t)$ 随时间 t 和空间位置 x 变化，在接近 $x=0$ 时，扩散粒子源与扩散前沿距离接近，系统内呈紧密的粒子分布状态(见图 14(a))；当 $x>>\sqrt{Dt}$ 时，随着粒子扩散运动的进行，系统内呈现稀疏的粒子分布状态(见图 14(b))。预测系统内扩散粒子在距离扩散源边界 x_{c} 时，到达目标边界(见图 15)，且存在与源相连接的连通簇，则 x_{c} 对应的占据概率等于研究单元逾渗阈值 p_{c}，即 $P(x_{\mathrm{c}},\ t)=p_{\mathrm{c}}$。

图 15 为扩散粒子接触目标边界时的示意图。图 15(a)中，w 为扩散前沿的宽度(m)，即从 x_{c} 至扩散前沿中最靠近目标边界的粒子的距离；$\xi(x_{\mathrm{c}})$ 为扩散前沿在 $x=x_{\mathrm{c}}$ 处的运动轨迹。图 15(b)为图 15(a)中红色虚线框内的局部放大图，显示了扩散前沿更的细节。

为了描述扩散前沿的运动轨迹，建立函数 $\xi(x)$：

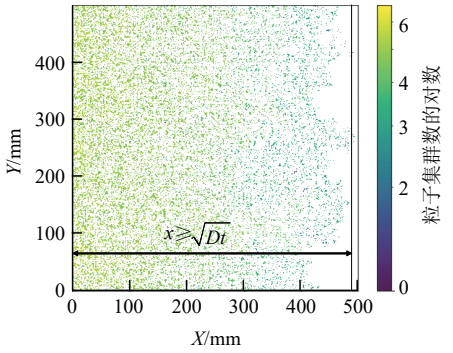
$$\xi(x)=\xi_0\left|P(x,\ t)-p_{\mathrm{c}}\right|^{-\alpha} \tag{72}$$

式中：$\xi(x_{\mathrm{c}})=0$；ξ_0 为比例常数，量纲为一；α 为描述系统标度行为的指数，量纲为一。



(a) 扩散前沿与扩散源接近

(a) Diffusion front approaches the diffusion source

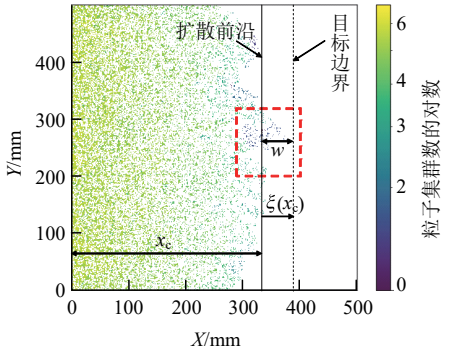


(b) 扩散前沿与目标边界接近

(b) Diffusion front approaches the target boundary

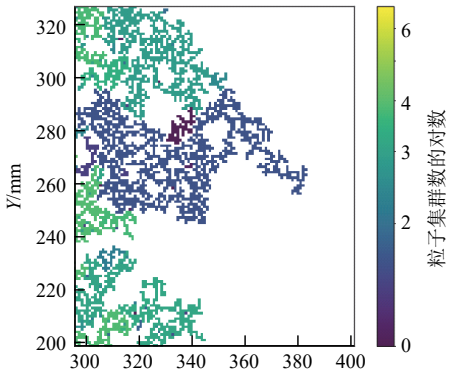
图 14　扩散前沿的运动轨迹

Fig.14　Migration trajectory of the diffusion front



(a) 扩散粒子接触到目标边界

(a) Diffusion particles contact the target boundary



(b) 局部放大图

(b) Partial enlarged view

图 15　扩散粒子接触目标边界时的示意图

Fig.15　Schematic of a diffusing particle as it contacts the target boundary

对 $P(x,\ t)$ 做 Taylor 展开，可得

$$P(x,\ t)\simeq P(x_{\mathrm{c}},\ t)+\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\mathrm{c}}}(x-x_{\mathrm{c}}) \tag{73}$$

由于存在 $x_{\mathrm{c}}\propto\sqrt{Dt}$，可得：$\left.\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\mathrm{c}}}\propto\dfrac{1}{\sqrt{Dt}}\propto\dfrac{1}{x_{\mathrm{c}}}$。

记 w 为扩散前沿的宽度，根据图 15(a)可得

$$\xi(x_{\mathrm{c}}+w)=w \tag{74}$$

将式(74)代入式(72)，可得

$$w=\xi_0\left|P(x_{\mathrm{c}}+w,\ t)-p_{\mathrm{c}}\right|^{-\alpha} \tag{75}$$

将式(73)代入式(75)，可得

$$w=\xi_0\left|w\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\mathrm{c}}}\right|^{-\alpha}\propto\left(\frac{w}{x_{\mathrm{c}}}\right)^{-\alpha} \tag{76}$$

通过对 $P(x,\ t)$ 做变限积分求导，可得以下关系：

$$w\propto x_{\mathrm{c}}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \tag{77}$$

由式(77)可知，随着 x_{c} 增大，w 沿 x 方向缩短，具备收敛性，即扩散前沿的宽度会逐渐收窄，符合模型要求。

(3) 全域渗流逾渗模型数值求解

在粗糙裂隙网格中，将相邻两点的粗糙角度 θ 和对应开度 δ_{h} 的数据映射为一个单元，对于每个单元，都有一个可通过该单元的临界速率值(u_{D} 或 u_{F})。存在无数个速率值可使流体流通整个系统，其中最小的速率值即为渗流跨越速率 U_{c}，使流体刚好可从左侧源边界流至右侧目标边界。通过定义一个不断迭代增大的填充速率 U，使其与单元逾渗速率集 $[u_{\mathrm{D}ij}]$ 和 $[u_{\mathrm{F}ij}]$ 的每个值进行对比，标记其中小于 U 的值，并构建布尔矩阵，直到出现可以使布尔矩阵全域贯通的填充速率 U，即为渗流跨越速率 U_{c} (m/s)。

根据上文提到的达西流和 Forchheimer 流 2 种流态假设，渗流跨越速率 U_{c} 可表示为

$$U_{\mathrm{c}}=\begin{cases}U_{\mathrm{D}} & (\text{达西流})\\ U_{\mathrm{F}} & (\text{Forchheimer流})\end{cases} \tag{78}$$

汇总上述全域渗流逾渗模型求解思路，形成以下求解渗流跨越速率的技术路线(见图 16)：

① 将单元逾渗速率矩阵记为 $\boldsymbol{A}_{ij}$，并提取矩阵 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 的矩阵大小：$L_x\times L_y$。

② 定义一个初始的统计矩阵 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{cluster}}(i,\ j)=0$，用于记录每个网格点被聚集的次数，其中 $i\in[1,\ L_x]$，$j\in[1,\ L_y]$。

③ 定义填充速率 U。若取 1/1 000 000 作为计算精度，则每一步判别步骤 $n_{\mathrm{step}}\in[0,\ 1\ 000\ 000]$，填充速率 U 可表示为：$U=\dfrac{n_{\mathrm{step}}}{1\ 000\ 000}$。

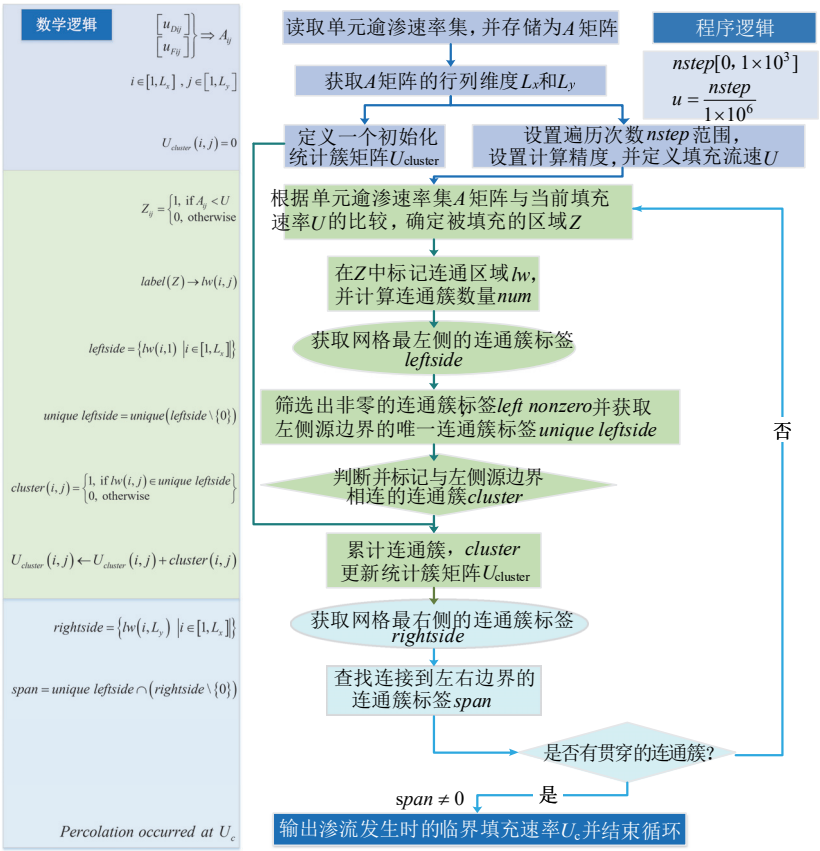


图 16　基于单元逾渗模型求解渗流跨越速率的技术路线

Fig.16　Technical methodology for determining percolation critical velocity based on the unit percolation models

④ 填充判断并标记连通簇。生成布尔矩阵 Z_{ij}，判别单元逾渗速率矩阵 A_{ij} 中哪些点满足条件：

$$A_{ij}<U：\ Z_{ij}=\begin{cases}1 & (A_{ij}<U)\\ 0 & (A_{ij}\geqslant U)\end{cases}。$$

进一步，通过连通性分析，对 Z 中的连通区域进行标记。设标签矩阵为 $\boldsymbol{lw}$，其大小为 $L_x\times L_y$，每个连通簇都赋予一个唯一标签：$label(Z_{ij})\rightarrow \boldsymbol{lw}(i,\ j)$。

⑤ 标记与左边界连通的簇，包含 4 个步骤：

获取左边界的标签：

$$leftside=\left\{lw(i,\ 1)\ \middle|\ i\in\left[1,\ L_x\right]\right\};$$

去除零值，剩余唯一标签集合为

$$unique\ leftside=unique(leftside\setminus\{0\});$$

标记与左边界连通的所有簇：

$$cluster(i,\ j)=\begin{Bmatrix}1,\ lw(i,\ j)\in unique\ leftside\\ 0,\ lw(i,\ j)\notin unique\ leftside\end{Bmatrix};$$

更新统计簇矩阵 $U_{cluster}$：

$$U_{cluster}(i,\ j)\leftarrow U_{cluster}(i,\ j)+cluster(i,\ j);$$

⑥ 检查流通状态，包含 3 个步骤：

获取右边界的标签：

$$rightside=\left\{lw(i,\ L_y)\ \middle|\ i\in[1,\ L_x]\right\};$$

检查是否存在贯穿簇：

$$span=unique\ leftside\cap\left(rightside\setminus\{0\}\right);$$

如果 $span\neq 0$，则说明已发生渗流，输出临界填充速率 U_c 并终止，即 $U=U_c$。

3.3　全域逾渗数值求解与验证

将粗糙裂隙 S1，S2 和 S3 的单元逾渗速率矩阵输入，以常温状态下水的运动黏度 $\nu=1.008\times10^{-3}$ m^2/s 为前提条件，计算得到输出结果。基于单元逾渗速率集($[u_{Dij}]$ 和 $[u_{Fij}]$)数据模型，构建 $\boldsymbol{A}$ 矩阵。基于图 16 中的数学逻辑和程序逻辑，通过 Python 编写代码实现对全域渗流逾渗模型的数值求解，得到基于达西流假设和 Forchheimer 流假设的渗流跨越速率 U_D 和 U_F(见表 1)，以及裂隙流体临界流通区域结果(见图 17)。

图 17 为达西流假设和 Forchheimer 流假设下的流体临界连通区域，流体由左侧向右侧运动。图中着色区域表示临界连通时流体所处位置，右侧云图图例数值表示统计过程中，该点单元逾渗速率小于当前填充速率(U)的累计次数的对数，数值越大代

表 1　基于 2 种流态假设下的渗流跨越速率

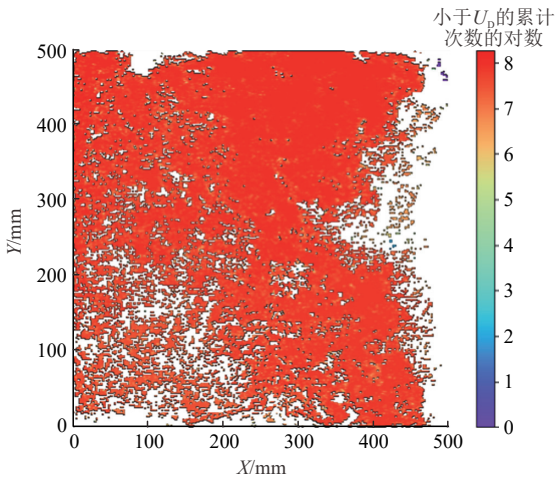
Table 1　Critical percolation velocity under dual flow regime hypotheses

粗糙裂隙(rough fractures)	U_D /(m • s^{-1})	U_F /(m • s^{-1})
S1	3.930×10^{-3}	3.352×10^{-3}
S2	1.974×10^{-3}	1.799×10^{-3}
S3	3.007×10^{-3}	2.516×10^{-3}

表单元逾渗速率越小。Darcy 流假设和 Forchheimer 流假设下的流体临界流通区域基本一致，仅在部分细微区域存在区别，这表明 2 种算法对逾渗模型中流体临界连通区域的敏感性基本一致。

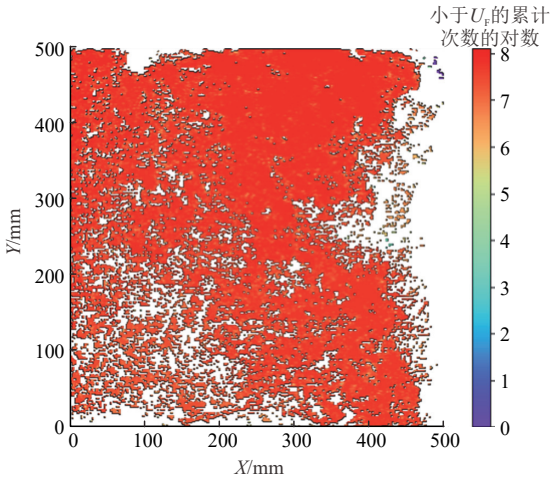
由表 1 可知，3 组粗糙裂隙在 Forchheimer 流假设下的渗流跨越速率U_F，与 Darcy 流假设下的渗流跨越速率U_D相比在数值上更小，但总体差距保持在 3%以内[76]，说明粗糙裂隙渗流从逾渗阶段开始至逾渗相变发生时，裂隙出口端的流体速率更可能是基于 Forchheimer 流假设的渗流跨越速率，但当渗流速率达到U_D时，持续的低速非达西渗流阶段将被打破，裂隙内流态呈现达西渗流特征，这一数值结果可以为低速非达西渗流的存在提供有效理论依据。

3 组裂隙的渗流跨越速率大小关系一致，$U_{S1}>U_{S3}>U_{S2}$，这表明裂隙的粗糙角度和裂隙开度等几何结构逾渗参数是决定其内部流体速率差异的主导因素，S1 裂隙导流能力最强，S3 裂隙次之，S2 裂隙最弱。在极低速渗流条件下，流动仍以黏性力为主，惯性效应尚未强到能够改变由几何属性决定的流速排序。全域渗流逾渗模型对输入的含裂隙几何参数的单元逾渗模型高度敏感，验证了其有效性。



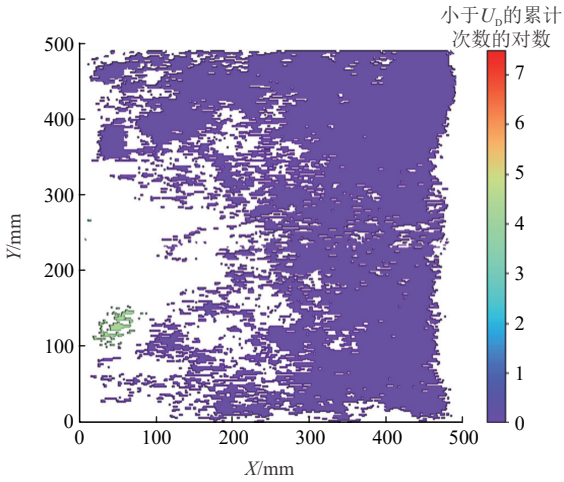
(a) Darcy 流假设下 S1 裂隙的临界连通区域

(a) Critical connected region of S1 fracture under Darcy flow assumption



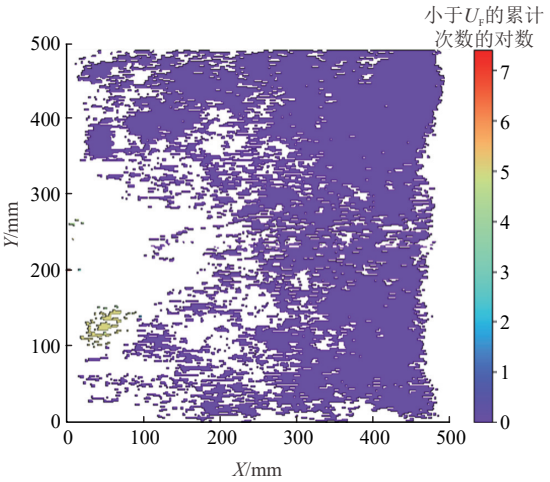
(b) Forchheimer流假设下S1裂隙的临界连通区域

(b) Critical connected region of S1 fracture under Forchheimer flow assumption



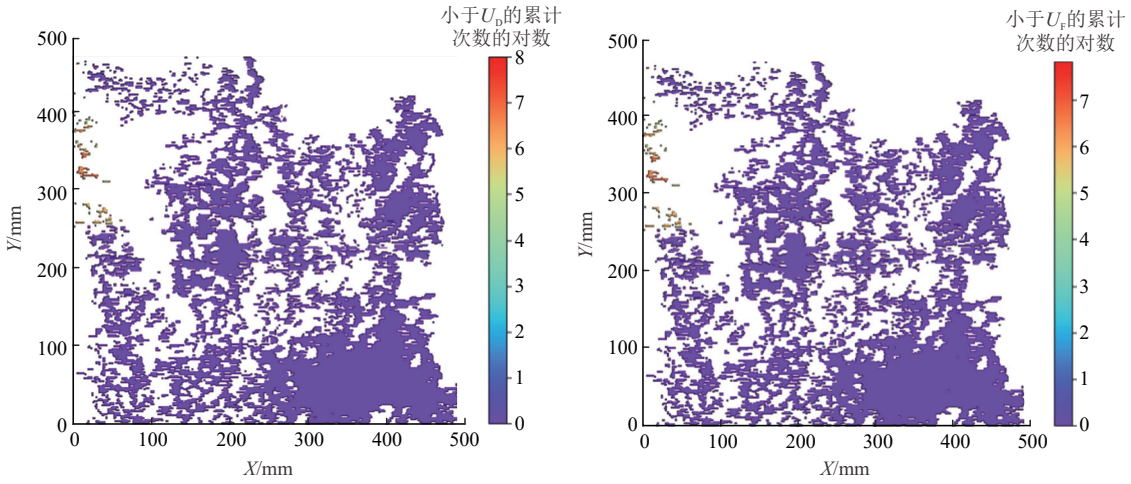
(c) Darcy 流假设下 S2 裂隙的临界连通区域

(c) Critical connected region of S2 fracture under Darcy flow assumption



(d) Forchheimer 流假设下 S2 裂隙的临界连通区域

(d) Critical connected region of S2 fracture under Forchheimer flow assumption



(e) Darcy 流假设下 S3 裂隙的临界连通区域

(e) Critical connected region of S3 fracture under Darcy flow assumption

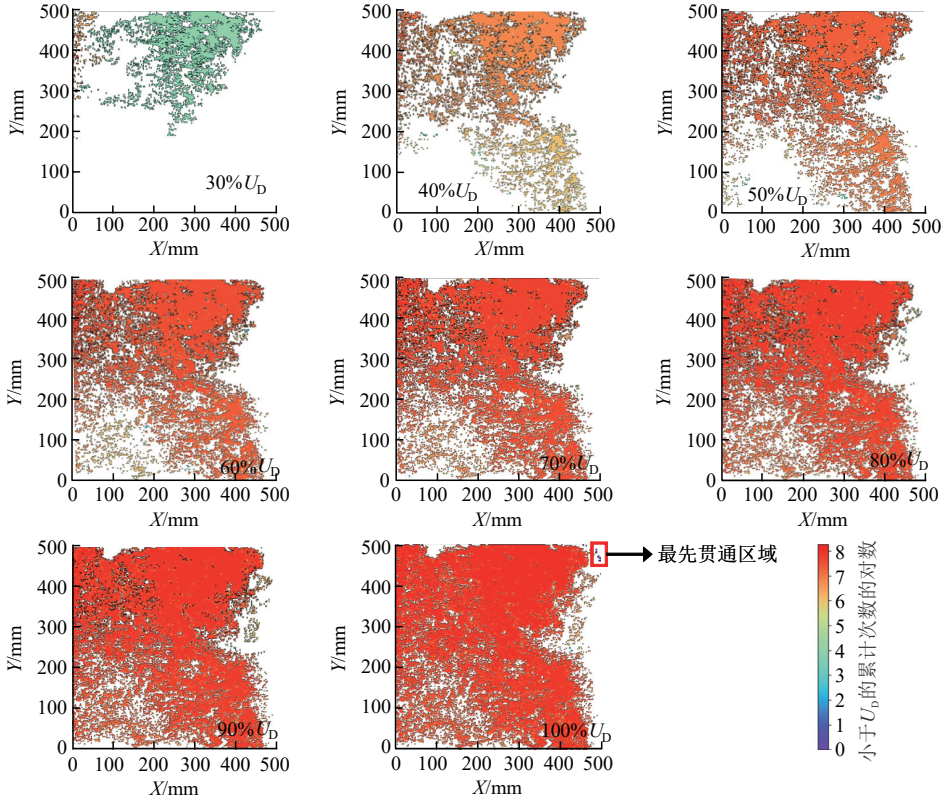
(f) Forchheimer 流假设下 S3 裂隙的临界连通区域

(f) Critical connected region of S3 fracture under Forchheimer flow assumption

图 17　2 种流态假设下的裂隙流体临界连通区域

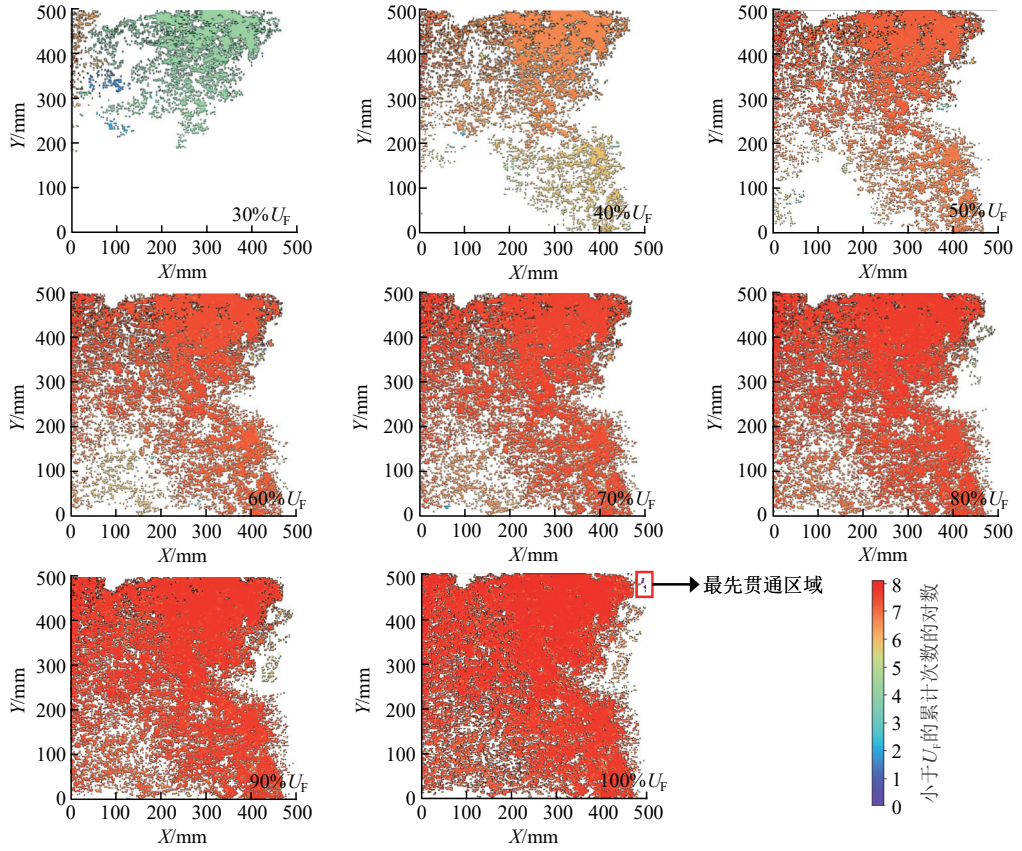
Fig.17　Critical connectivity regions of fracture fluids under dual flow regime hypotheses

2 种流态假设下逾渗前流体的运动过程如图 18 所示。将渗流跨越速率U_D(U_F)作为逾渗相变的分界点，分别从 30%U_D(U_F)，40%U_D(U_F)，50%U_D(U_F)，60%U_D(U_F)，70%U_D(U_F)，80%U_D(U_F)，90%U_D(U_F)和 100%U_D(U_F)共 8 个流体速率阶段表征裂隙内逾渗前流体的运动过程。发现在 2 种流态假设下，与 S2 和 S3 裂隙相比，S1 裂隙在 50%·U_D(U_F)～100%U_D(U_F)区间均表现出明显的流体渗流运动过渡现象，表现为流体前沿不断接近右侧边界，连通区域的面积随着流体速率的增大而增大。而 S2 和 S3 裂隙仅在 100%U_D(U_F)阶段表现出大面积的流体连通现象，反映出流体连通区域内的单元逾渗速率普遍相近且数值偏大。这种差别直观地反映了类似启动压力梯度的渗流特性，即流体速率存在输运逾渗阈值，流体未达到渗流跨越速率前，裂隙出口端通量为 0，逾渗相变不会发生。



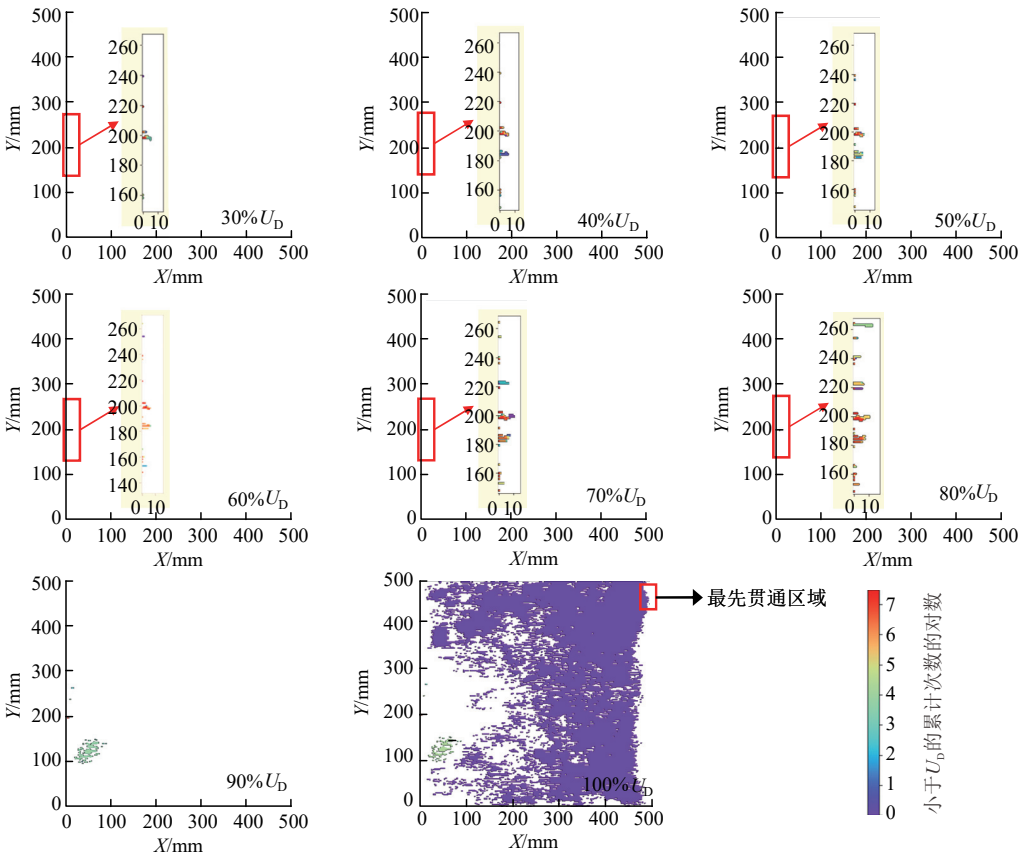
(a) Darcy 流假设下 S1 裂隙的临界连通区域变化

(a) Variation of the critical connected region in S1 fracture under Darcy flow assumption



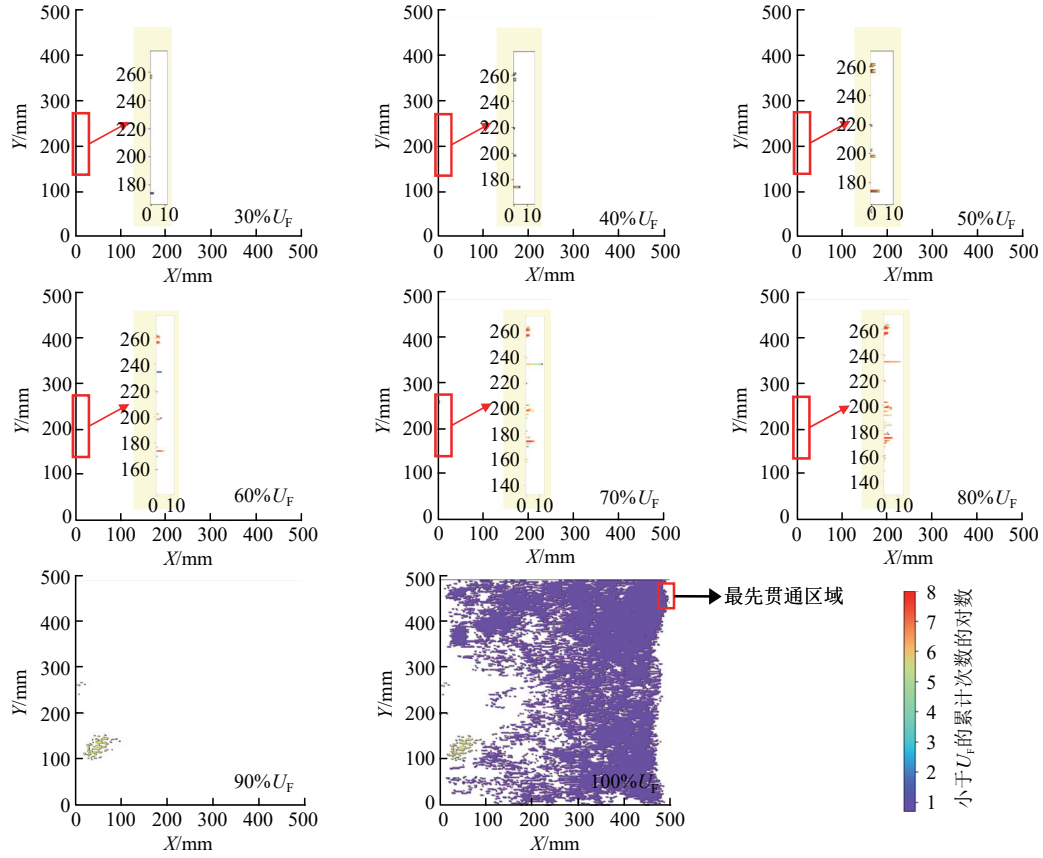
(b) Forchheimer 流假设下 S1 裂隙的临界连通区域变化

(b) Variation of the critical connected region in S1 fracture under Forchheimer flow assumption



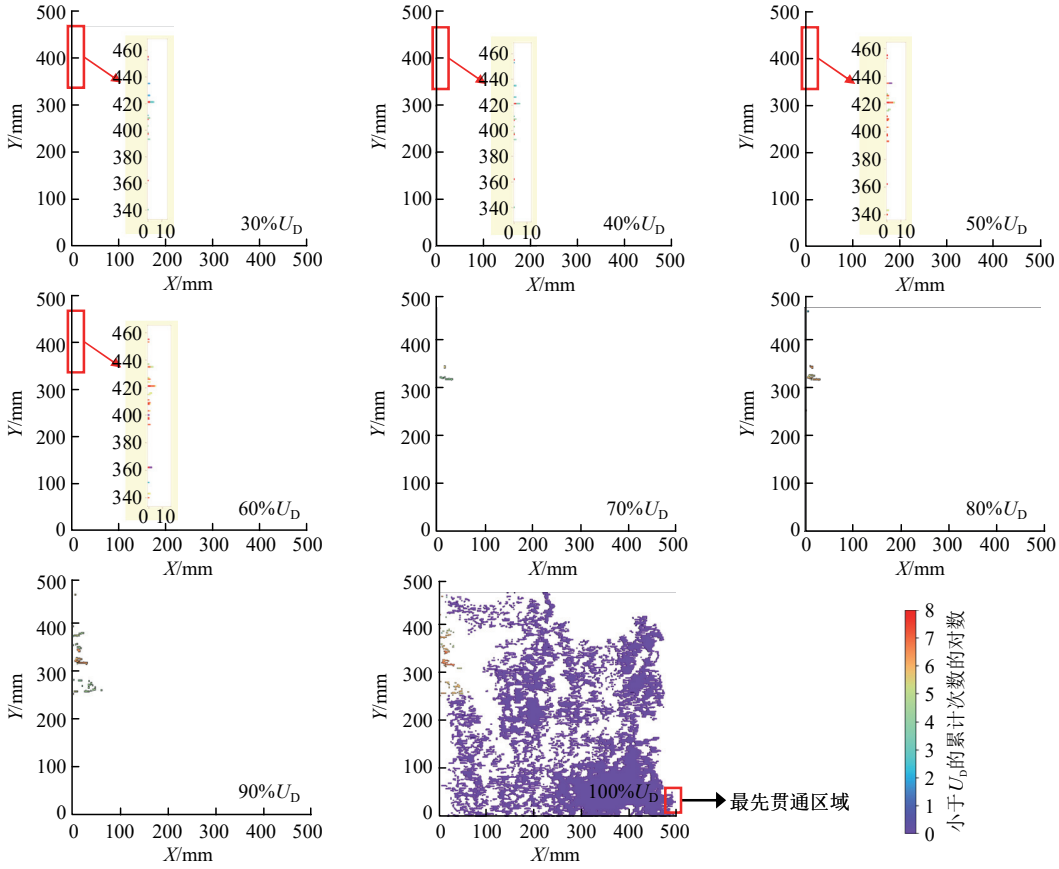
(c) Darcy 流假设下 S2 裂隙的临界连通区域变化

(c) Variation of the critical connected region in S2 fracture under Darcy flow assumption



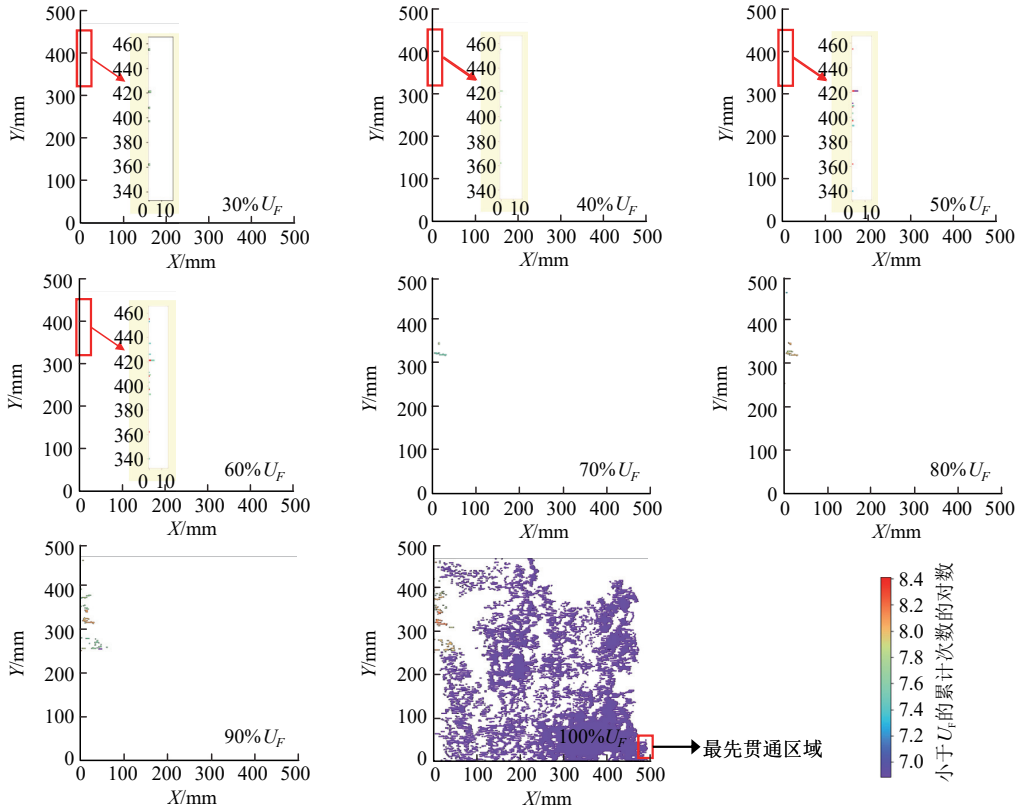
(d) Forchheimer 流假设下 S2 裂隙的临界连通区域变化

(d) Variation of the critical connected region in S2 fracture under Forchheimer flow assumption



(e) Darcy 流假设下 S3 裂隙的临界连通区域变化

(e) Variation of the critical connected region in S3 fracture under Darcy flow assumption



(f) Forchheimer 流假设下 S3 裂隙的临界连通区域变化

(f) Variation of the critical connected region in S3 fracture under Forchheimer flow assumption

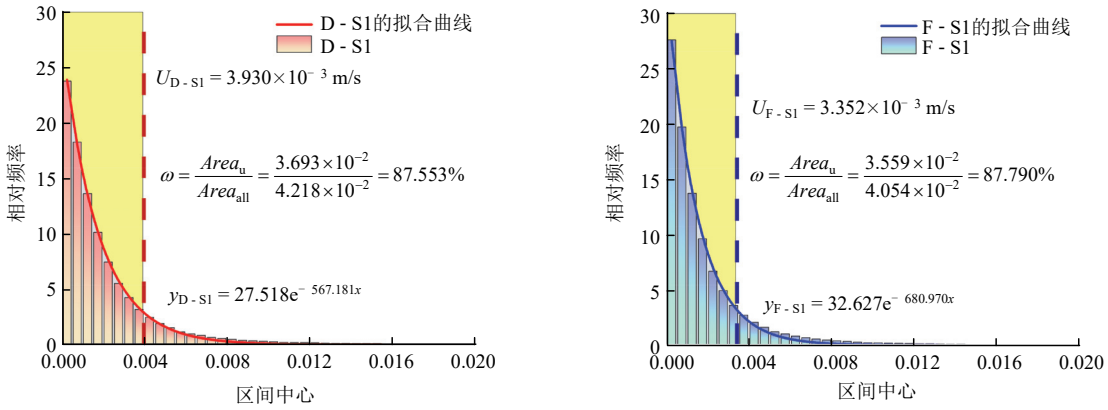
图 18　2 种流态假设下逾渗阶段内的流体运动过程

Fig.18　Fluid transport dynamics during the percolation phase under dual flow regime hypotheses

为了研究渗流跨越速率与全域范围内单元逾渗速率分布的关系，对 3 组裂隙的单元逾渗速率集($[u_{Dij}]$和$[u_{Fij}]$)进行统计分析，以5×10^{-4} m/s 作为频数分布区间，得到了 3 组裂隙在 2 种流态假设下的统计拟合曲线，如图 19 所示。图中，D-S1，D-S2 和 D-S3 表示 Darcy 流假设下单元逾渗速率集$[u_{Dij}]$的分布情况；F-S1，F-S2 和 F-S3 表示 Forchheimer 流假设下单元逾渗速率集$[u_{Fij}]$的分布情况。

可以发现，2 种流态假设下 3 组裂隙的单元逾渗速率集呈指数分布，通过函数 $y_D = be^{-ax}$ 拟合，可使拟合程度最高($R^2 \to 1$)。3 组裂隙的拟合函数如表 2 所示。

考虑到重构后的裂隙表面受限于激光轮廓仪的扫描精度，将本是连续分布的实际粗糙裂隙表面处理为网格式分布。因此，为了尽可能排除激光轮廓仪扫描精度影响，统计真实裂隙表面的单元逾渗速率分布情况，采用求解统计拟合曲线的积分面积的方法获得单元逾渗速率分布特征。

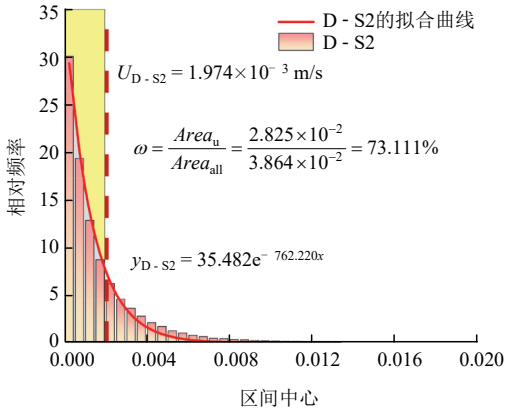


(a) Darcy 流假设，S1 裂隙

(a) Darcy flow assumption，S1 fracture

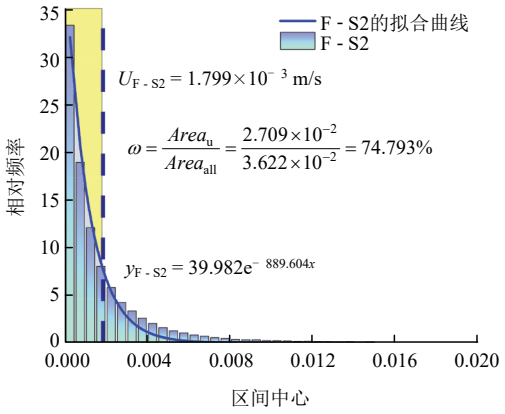
(b) Forchheimer 流假设下 S1 裂隙的单元逾渗速率分布

(b) Forchheimer flow assumption，S1 fracture



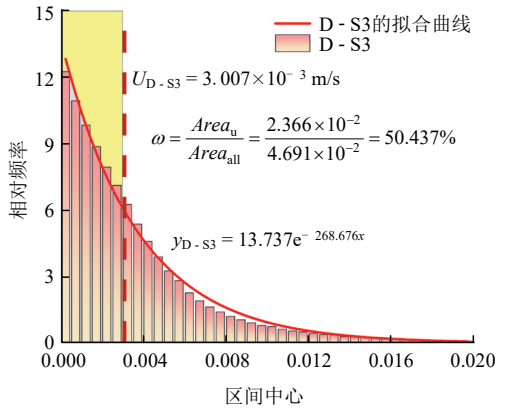
(c) Darcy 流假设，S2 裂隙

(c) Darcy flow assumption，S2 fracture



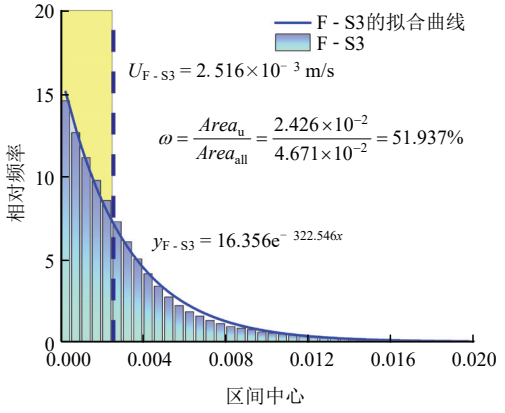
(d) Forchheimer 流假设，S2 裂隙

(d) Forchheimer flow assumption，S2 fracture



(e) Darcy 流假设，S3 裂隙

(e) Darcy flow assumption，S3 fracture



(f) Forchheimer 流假设下 S3 裂隙的单元逾渗速率分布

(f) Forchheimer flow assumption，S3 fracture

图 19　2 种流态假设下裂隙单元逾渗速率统计拟合曲线

Fig.19　Statistical fitting curves of percolation rates in fracture elements under dual flow regime assumptions

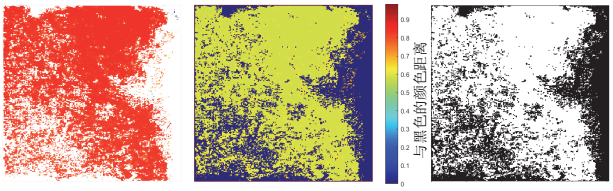
表 2　Darcy 流假设和 Forchheimer 流假设下单元逾渗速率集的拟合函数

Table 2　Fitting functions for unit percolation rate sets under Darcy and Forchheimer flow assumptions

粗糙裂隙(rough fractures)	Darcy 流(Darcy flow)		Forchheimer 流(Forchheimer flow)	
	拟合公式(fitting formula)	R^2	拟合公式(fitting formula)	R^2
S1	$y_{D-S1}=27.518e^{-567.181x}$	0.999 22	$y_{F-S1}=32.627e^{-680.970x}$	0.998 77
S2	$y_{D-S2}=35.482e^{-762.220x}$	0.995 20	$y_{F-S2}=39.982e^{-889.604x}$	0.990 03
S3	$y_{D-S3}=13.737e^{-268.676x}$	0.994 89	$y_{F-S3}=16.356e^{-322.546x}$	0.996 31

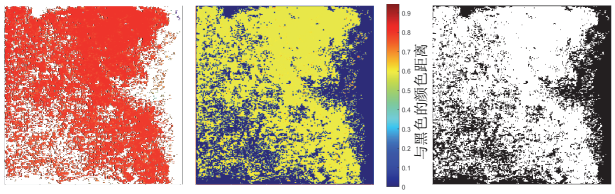
图 19 中虚线左侧的黄色区域代表 0～U_D (U_F) 区间，其中包括流体临界连通区域中覆盖的部分，以及部分单元逾渗速率符合条件但流体未流经的低流速孤立区域，虚线对应渗流跨越速率 U_D (U_F)的值；$Area_u$ 为 0～U_D (U_F)的积分面积；$Area_{all}$ 为全域的积分面积，ω为裂隙内所有单元逾渗速率低于渗流跨越速率的拟合曲线积分占比。在逾渗相变后，随着压力梯度的增大，流体将逐步覆盖所有的孤立区域，直到裂隙内形成饱和流态，这个过程即是低速非线性渗流向达西线性渗流转变的过程。

为了量化实际情况下流体临界连通区域的面积占比，采用 Matlab 软件的“im2double”函数统一数据格式，“ycbcr2rgb”函数处理特殊颜色空间，利用矩阵运算计算颜色距离，生成二值掩膜，完成对图像的处理，结果如图 20 所示，其中左图表示含多种颜色的原始临界连通区域图像，中间图表示将颜色距离阈值设置为 0.12 时的临界连通区域图像，右图表示处理后的二值掩膜图像，仅用黑白两色分别区分闭合与连通区域，白色区域与总面积的比值即为临界流通区域占比。2 种流态假设下的裂隙流体单元逾渗速率拟合曲线积分面积占比，以及临界连通区域面积占比如表 3 所示。



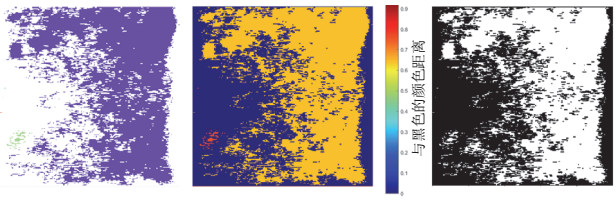
(a) Darcy 流假设，S1 裂隙

(a) Darcy flow assumption，S1 fracture



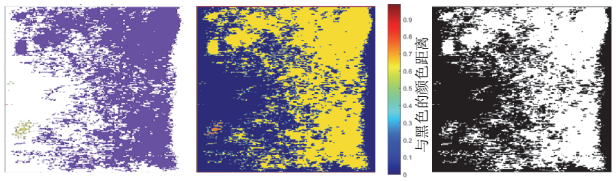
(b) Forchheimer 流假设，S1 裂隙

(b) Forchheimer flow assumption，S1 fracture



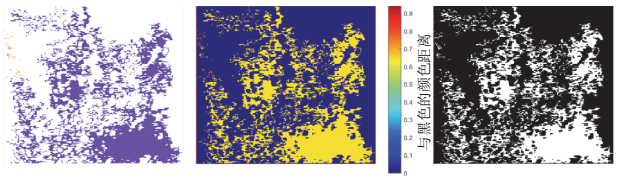
(c) Darcy 流假设，S2 裂隙

(c) Darcy flow assumption，S2 fracture



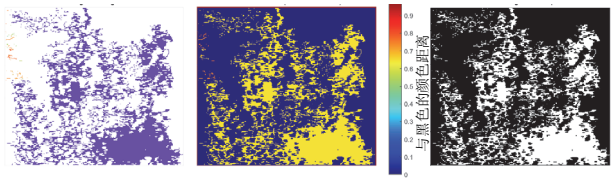
(d) Forchheimer 流假设，S2 裂隙

(d) Forchheimer flow assumption，S2 fracture



(e) Darcy 流假设，S3 裂隙

(e) Darcy flow assumption，S3 fracture



(f) Forchheimer 流假设，S3 裂隙

(f) Forchheimer flow assumption，S3 fracture

图 20　2 种流态假设下流体临界连通区域的面积占比

Fig.20　Area proportion of fluid critical connected regions under dual flow regime assumptions

表 3 中，对于任意一组裂隙，2 种流态假设的拟合曲线面积积分占比均大于临界连通区域面积占比，验证了对图 19 中拟合曲线黄色区域的表述的正确性，且两者的差值即是前文所述流体未流经的低流速孤立区域面积占比。此外，尤为值得注意的是，Forchheimer 流假设下 3 组裂隙的临界连通区域面积占比和拟合曲线积分面积占比均略大于 Darcy 流假设下的。结合图 19 可以发现：相较于 Darcy 流假设，Forchheimer 流假设下的流体覆盖了裂隙更多细微区域。根据经典的渗流流速－压力梯度关系曲线(见图 1)，结合表 1 求解得到的渗流跨越速率，流体速率由相对较低的 U_{F} 过渡至相对较高的 U_{D}，此过程中流体在裂隙内的覆盖面积应逐步增大。因此可以认为：就本文提出的全域渗流逾渗模型而言，Forchheimer 流假设下的单元逾渗模型比 Darcy 流假设下的单元逾渗模型表现出更高的精度，即 Forchheimer 流假设下的单元逾渗模型，其特有的惯性项能够更精确地揭示粗糙角度与水力开度等几何结构逾渗参数对流体逾渗阶段流动路径的影响。

表 3　2 种流态假设下的临界连通区域面积占比和拟合曲线积分面积占比

Table 3　Critical connected regions and integrated area proportions of fitted curves under dual flow regime assumptions

流态假设(flow state assumption)	类型(type)	S1	S2	S3
Darcy 流假设	拟合曲线积分占比	87.553	73.111	50.437
	临界连通区域占比	63.879	49.315	30.467
Forchheimer 流假设	拟合曲线积分占比	87.790	74.793	51.937
	临界连通区域占比	66.435	49.801	30.724

4　结　论

针对粗糙裂隙内达西－非达西渗流的拐点判定问题和非饱和流态条件下输运逾渗阈值求解难题，推导了饱和流条件下分形粗糙裂隙的临界流速，讨论了平行板模型中 Bingham 流体启动压力梯度的存在性。并通过构建单元逾渗模型，基于单元逾渗模型和扩散方程，建立了全域渗流逾渗模型，实现了对粗糙裂隙渗流跨越速率的数值求解。主要结论如下：

(1) 揭示了考虑逾渗阶段的低速－高速裂隙渗流全过程压力梯度与流速演化非连续关系。低速非达西流过渡到达西流时压力梯度和渗流速度存在连续性，是连续状态函数，基本不存在过渡区；达西流过渡到高速非达西流也存在连续性，但绝大多数情形都存在过渡区域，此区域内压力梯度和渗流速度并非单调函数，存在数值跳跃现象，压力梯度主要表现为跳增、渗流速度主要表现为跳减现象，前者是由边界增压引起的内部局部压力骤增，而后者

是由紊流能量消耗引起的平均速度减小。粗糙裂隙低速–高速全过程渗流演化中，压力梯度和渗流速度曲线不连续更合理。

(2) 建立了考虑粗糙裂隙迂曲度分形维数和开度分形维数的 Bingham 流体渗流模型。迂曲度分形维数和开度分形维数只在一定条件下满足幂律分布，开度的跨度分布不超过 2 个数量级时，统计自相似性误差较大，此时更接近平行板流。进一步证实了启动压力梯度的不存在性，以流量速率大于 0 为启动条件，推导了 Bingham 流体启动本质为活塞平移行为，不存在内部剪切运动状态。若流量速率为 0，可推导出“启动压力梯度”正比于初始剪切应力、反比于平均开度。当 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}y=0$ 时，对于流体单元，剪切速率(速度梯度)为 0，启动压力梯度必为 0。也就是说启动压力梯度在科学意义上并不存在，只在理想本构下成立。

(3) 基于单元逾渗速率模型和扩散方程，建立了考虑 Darcy 流和 Forchheimer 流 2 种假设的全域渗流逾渗模型。通过数值求解发现在 2 种流态假设下流体速率存在输运逾渗阈值，流体未达到渗流跨越速率前，裂隙出口端通量为 0，逾渗相变不会发生。而逾渗相变发生时，裂隙出口端的流体速率更可能是基于 Forchheimer 流假设的渗流跨越速率，该结论可以为低速非达西渗流的存在提供有效理论依据。Forchheimer 流假设下的单元逾渗模型对比 Darcy 流假设下的单元逾渗模型表现出了更高的精度，因此就本文提出的全域渗流逾渗模型而言，对比 Darcy 流假设，Forchheimer 流假设下的单元逾渗模型，其特有的惯性项能够更精确地揭示粗糙角度与水力开度等几何结构逾渗参数对流体逾渗阶段流动路径的影响。

参考文献(References)：

[1] QIAN J Z，ZHAN H B，ZHAO W D，et al. Experimental study of turbulent unconfined groundwater flow in a single fracture[J]. Journal of Hydrology，2005，311(1/4)：134–142.

[2] BEAR J. Dynamics of fluids in porous media[M]. New York：Dover，1988：131–210.

[3] KUNDU P，KUMAR V，MISHRA I M，et al. Experimental and numerical investigation of fluid flow hydrodynamics in porous media：Characterization of pre-Darcy，Darcy and non-Darcy flow regimes[J]. Powder Technology，2016，303：278–291.

[4] FINENKO M，KONIETZKY H. Numerical simulation of turbulent fluid flow in rough rock fracture：2D Case[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering，2024，57：451–479.

[5] CHEN Y F，ZHOU J Q，HU S H，et al. Evaluation of Forchheimer equation coefficients for non-Darcy flow in deformable rough-walled fractures[J]. Journal of Hydrology，2015，529(3)：993–1 006.

[6] EL-ZEHAIRY A A，ABDEL-GAWAD H A A. Pore-network modelling of transverse dispersion in porous media under non-Darcy flow conditions[J]. Advances in Water Resources，2024，185：104626.

[7] FAN J W，GUO W J，LV Y J，et al. A nonlinear mathematical model for fluid flow in low-permeability reservoirs and its effect on well production performance[J]. Geoenergy Science and Engineering，2023，231(A)：212349.

[8] BROADBENT S R，HAMMERSLEY J M. Percolation processes[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society，1957，53(3)：629–641.

[9] AHARONY A，STAUFFER D. Introduction to percolation theory[M]. Oxford：Taylor and Francis，1992：63–125.

[10] STAUFFER D，AHARONY A. Introduction to Percolation Theory[J]. Physics Today，1993，46(4)：64.

[11] SHI W H，YANG T H，YU S B. Experimental investigation on non-Darcy flow behavior of granular limestone with different porosity[J]. Journal of Hydrologic Engineering，2020，25(8)：06020004.

[12] YAO C，SHAO Y L，YANG J H，et al. Effects of fracture density，roughness，and percolation of fracture network on heat-flow coupling in hot rock masses with embedded three-dimensional fracture network[J]. Geothermics，2020，87：101846.

[13] TIAN W B，LI A F，REN X X，et al. The threshold pressure gradient effect in the tight sandstone gas reservoirs with high water saturation[J]. Fuel，2018，226：221–229.

[14] HOSSEINI E，SARMADIVALEH M，CHEN Z. Developing a new algorithm for numerical modeling of discrete fracture network (DFN) for anisotropic rock and percolation properties[J]. Journal of Petroleum Exploration and Production Technology，2021，11：839–856.

[15] WANG X H，ZHENG J，SUN H Y. Comparative study on interconnectivity between three-dimensional and two-dimensional discrete fracture networks：A perspective based on percolation theory[J]. Journal of Hydrology，2022，609：127731.

[16] HE C，YAO C，JIN Y Z，et al. Effective permeability of fractured porous media with fracture density near the percolation threshold[J]. Applied Mathematical Modelling，2023，117：592–608.

[17] CHENG H，WANG F G，LI S W，et al. From pre-Darcy flow to Darcy flow in porous media：A simple unified model[J]. Water Resources Research，2024，60(7)：e2023WR036902.

[18] CAI J. A fractal approach to low velocity non-Darcy flow in a low permeability porous medium[J]. Chinese Physics B，2014，23(4)：385–389.

[19] DEJAM M，HASSANZADEH H，CHEN Z. Pre-Darcy flow in porous media[J]. Water Resources Research，2017，53(10)：8 187–8 210.

[20] WANG Q，JIANG R，CUI Y，et al. Pre-Darcy flow behavior of CO_2

Huff-n-Puff development in Fuyu tight formation：Experiment and numerical evaluation[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering，2020，186：106773.

[21] FARMANI Z，FAROKHIAN D，IZADPANAHI A，et al. Pre-Darcy flow and Klinkenberg effect in dense， consolidated carbonate formations[J]. Geotechnical and Geological Engineering，2019，37(4)：3 255－3 270.

[22] DING J C，YANG S L，NIE X R，et al. Dynamic threshold pressure gradient in tight gas reservoir[J]. Journal of Natural Gas Science and Engineering，2014，20：155－160.

[23] SINGH K，CAMULLI H，BRADLEY J. Sediment size effects on non-Darcy flow： Insights from Izbash equation and Forchheimer inertial coefficient analysis[J]. Hydrogeology Journal，2024，32：1 853－1 871.

[24] YOU X C，LI S Y，KANG L，et al. A study of the non-linear seepage problem in porous media via the homotopy analysis method[J]. Energies，2023，16(5)：2 175.

[25] CHAPARIAN E. Yielding to percolation：A universal scale[J]. Journal of Fluid Mechanics，2024，980：A14.

[26] ZAFAR A，SU Y L，LI L，et al. Tight gas production model considering TPG as a function of pore pressure， permeability and water saturation[J]. Petroleum Science，2020，17：1 356－1 369.

[27] ROY S，SINHA S，HANSEN A. Immiscible two-phase flow in porous media：Effective rheology in the continuum limit[J]. Transport in Porous Media，2024，151：1 295－1 311.

[28] OLDENBURG C M，MUKHOPADHYAY S，CIHAN A. On the use of Darcy's law and invasion-percolation approaches for modeling large-scale geologic carbon sequestration[J]. Greenhouse Gases：Science and Technology，2016，6(1)：19－33.

[29] SONI J P，ISLAM N，BASAK P. An experimental evaluation of non-Darcian flow in porous media[J]. Journal of Hydrology，1978，38(3/4)：231－241.

[30] ADLER P M，THOVERT J F，MOURZENKO V V. Fractured porous media[M]. Oxford：Oxford University Press，2012：73－104.

[31] LI L，LI K. Permeability of microcracked solids with random crack networks：role of connectivity and opening aperture[J]. Transport in Porous Media，2015，109(1)：217－237.

[32] ESMAEILPOUR M，GHANBARIAN B，LIANG F，et al. Scale-dependent permeability and formation factor in porous media：Applications of percolation theory[J]. Fuel，2021，301：121090.

[33] KARMAN V T. Progress in the statistical theory of turbulence[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America，1948，34(11)：530－539.

[34] PRANDTL L. Essentials of fluid dynamics[M]. New York：Hafner Publishing Company，1952：206－251.

[35] ZHANG Y，YE J H，LI P X. Flow characteristics in a 3D-printed rough fracture[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering，2022，55：4 329－4 349.

[36] CHANG A L，SUN H G，ZHANG Y，et al. Spatial fractional Darcy′s law to quantify fluid flow in natural reservoirs[J]. Physica A：Statistical Mechanics and its Applications，2019，519：119－126.

[37] WANG X，SHENG J J. Effect of low-velocity non-Darcy flow on well production performance in shale and tight oil reservoirs[J]. Fuel，2017，190：41－46.

[38] CHEN H，XING J P，JIANG D L，et al. A fractal model of low-velocity non-Darcy flow considering viscosity distribution and boundary layer effect[J]. Fractals，2022，30(1)：2250006.

[39] LI L，HAO Y M，LV Y T，et al. Experimental investigation on low-velocity seepage characteristics and influencing factors in a shale oil reservoir[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering，2020，195：107732.

[40] NARASIMHAN A. Essentials of heat and fluid flow in porous media[M]. Cham：Springer Cham，2023：93－150.

[41] ARABJAMALOEI R，RUTH D. Numerical study of inertial effects on permeability of porous media utilizing the Lattice Boltzmann Method[J]. Journal of Natural Gas Science and Engineering，2017，44：22－36.

[42] YAO C S，YANG Y L，HUANG J H，et al. Effects of non-Darcy flow on heat-flow coupling process in complex fractured rock masses[J]. Journal of Natural Gas Science and Engineering，2020，83(1)：103536.

[43] ZHAO C X，ZHANG Z X，WANG S F，et al. Effects of fracture network distribution on excavation-induced coupled responses of pore pressure perturbation and rock mass deformation[J]. Computers and Geotechnics，2022，145：104670.

[44] BLOSHANSKAYA L， IBRAGIMOV A， SIDDIQUI F， et al. Productivity index for Darcy and pre-/post-Darcy flow(Analytical approach)[J]. Journal of Porous Media，2017，20(9)：769－786.

[45] BROWN S R，STOCKMAN H W，REEVES S J. Applicability of the Reynolds Equation for modeling fluid flow between rough surfaces[J]. Geophysical Research Letters，1995，22(18)：2 537－2 540.

[46] FORCHHEIMER P Z. Wasserbewegung durch Boden[J]. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure，1901，45：1 781－1 788.

[47] MOODY L F，PRINCETON N J. Friction factors for pipe flow[J]. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers，1944，66(8)：671－681.

[48] YAO Y D，LI G Z，QIN P F. Seepage features of high-velocity non-Darcy flow in highly productive reservoirs[J]. Journal of Natural Gas Science and Engineering，2015，27(3)：1 732－1 738.

[49] AHMED N，SUNADA D K. Nonlinear flow in porous media[J]. Journal of the Hydraulics Division，1969，95(6)：1 847－1 858.

[50] MIAO T J，YU B M，DUAN Y G，et al. A fractal analysis of permeability for fractured rocks[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer，2015，81(2)：75－80.

[51] WANG F Y，CHENG H. Effect of gravity on spontaneous imbibition of the wetting phase into gas-saturated tortuous fractured porous media：Analytical solution and diagnostic plot[J]. Advances in Water Resources，2020，142(8)：103657.

[52] SCHWIEBERT M K，LEONG W H. Underfill flow as viscous flow between parallel plates driven by capillary action[C]// IEEE Transactions on Components， Packaging and Manufacturing Technology：Part C. Piscataway：IEEE，1996：133－137.

[53] 薛东杰，侯孟冬，程建超，等. 剪切粗糙裂隙渗流多尺度分形表征[J]. 矿业科学学报，2023，8(5)：663－676.(XUE Dongjie，HOU Mengdong，CHENG Jianchao，et al. Fractal model of shear-induced rough fracture flow by cross-scale description of its geometry[J]. Journal of Mining Science and Technology，2023，8(5)：663－676.(in Chinese))

[54] ACUNA J A，ERSHAGHI I，YORTSOS Y C. Practical application of fractal pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs[J]. SPE Formation Evaluation，1995，10(3)：173－179.

[55] HATTON C G，MAIN I G，MEREDITH P G. Non-universal scaling of fracture length and opening displacement[J]. Nature， 1994， 367(6459)：160－162.

[56] CHANG J，YORTSOS Y C. Pressure-transient analysis of fractal reservoirs[J]. SPE Reservoir Evaluation and Engineering，1990，5(1)：31－38.

[57] CHANG J，YORTSOS Y C. A note on pressure-transient analysis of fractal reservoirs[J]. British Journal of Sports Medicine，1993，1(2)：380－386.

[58] LIU G F，ZHANG Z，CAO Y X，et al. An analogical method on fractal dimension for three-dimensional fracture tortuosity in coal based on CT scanning[J]. Fractals，2023，31(7)：2350072.

[59] XU P，CHEN Z，QIU S X，et al. An analytical model for pore and tortuosity fractal dimensions of porous media[J]. Fractals，2021，29(6)：2150156.

[60] 陈文昭，蒋一凡，刘夕奇. 循环扰动荷载作用下花岗岩损伤及破裂特性研究[J]. 南华大学学报：自然科学版，2022，36(3)：47－53.(CHEN Wenzhao，JIANG Yifan，LIU Xiqi. Damage and fracture characteristics of granite under cyclic disturbance loading[J]. Journal of University of South China：Science and Technology，2022，36(3)：47－53.(in Chinese))

[61] XUE D J，LIU Y T，ZHOU H W，et al. Fractal characterization on anisotropy and fractal reconstruction of rough surface of granite under orthogonal shear[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering，2020，53(7)：1 225－1 242.

[62] FANNING J T. A practical treatise on hydraulic and water-supply engineering：Relating to the hydrology，hydrodynamics，and practical construction of water-works，in North America[M]. New York：D. Van Nostrand，1906：582－630.

[63] 李术才，刘人太，张庆松，等. 基于黏度时变性的水泥-玻璃浆液扩散机制研究[J]. 岩石力学与工程学报，2013，32(12)：2 415－2 421.(LI Shucai，LIU Rentai，ZHANG Qingsong，et al. Research on C-S slurry diffusion mechanism with time-dependent behavior of viscosity[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2013，32(12)：2 415－2 421.(in Chinese))

[64] ALKAN H. Percolation model for dilatancy-induced permeability of the excavation damaged zone in rock salt[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences，2009，46(4)：716－724.

[65] XUE D J，ZHOU J，LIU Y T，et al. A strain-based percolation model and triaxial tests to investigate the evolution of permeability and critical dilatancy behavior of coal[J]. Processes，2018，6(8)：1－22.

[66] 薛东杰，张泽朋，周宏伟，等. 采动应力分布逾渗模型[J]. 岩石力学与工程学报，2022，41(2)：319－335.(XUE Dongjie，ZHANG Zepeng， ZHOU Hongwei， et al. Percolation model of stress redistribution under excavation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2022，41(2)：319－335.(in Chinese))

[67] NEUZIL C E. Groundwater flow in low-permeability environments[J]. Water Resources Research，1986，22(8)：1 163－1 195.

[68] PRADA A，CIVAN F. Modification of Darcy′s law for the threshold pressure gradient[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering，1999，22(04)：237－240.

[69] WEISBACH J，COXE E B. Mechanics of engineering. Theoretical mechanics，with an introduction to the calculus[M]. New York：D. Van Nostrand，1885：896－978.

[70] CHEN Y F，HU S H，HU R，et al. Estimating hydraulic conductivity of fractured rocks from high-pressure packer tests with an Izbash′s law-based empirical model[J]. Water Resources Research，2015，51(4)：2 096－2 118.

[71] XING K，QIAN J Z，ZHAO W D，et al. Experimental and numerical study for the inertial dependence of non-Darcy coefficient in rough single fractures[J]. Journal of Hydrology，2021，603：127148.

[72] ZHAO J Y，LIU WT，SHEN J J，et al. Fractal treelike fracture network model for hydraulically and mechanically induced dynamic changes in the non-Darcy coefficient during the process of mine water inrush from collapsed columns[J]. Fractals，2021，29(7)：2150218.

[73] ZHANG S，LIU X H，LIU X L，et al. The friction factor of the fracture-matrix system considering the effects of free flow，seepage flow，and roughness[J]. Journal of Hydrology，2024，628(1)：130602.

[74] FICK A. Ueber Diffusion[J]. Annalen Der Physik，1855，170(1)：59－86.

[75] SØRENSSEN A M. Percolation theory using python[M]. Cham：Springer Cham，2024：195－199.

[76] QIAN J Z，WANG M，ZHANG Y，et al. Experimental study of the transition from non-Darcian to Darcy behavior for flow through a single fracture[J]. Journal of Hydrodynamics，Ser. B，2015，27(5)：679－688.