基于 Powell-Sabin 细分的参数曲面重建方法

杨志飞[1)], 施锡泉[2)], 王伟明[1)], 刘秀平[1)*]

[1)] (大连理工大学数学科学学院 大连 116024)
[2)] (Division of Physics, Engineering, Mathematics, and Computer Science, Delaware State University Dover 19901)
(xpliu@dlut.edu.cn)

摘 要: 将复杂几何体网格转换为参数曲面是 CAD 几何引擎设计中的关键问题. 针对赋予四边形粗剖分结构的三角网格模型, 提出一种基于 Powell-Sabin 细分的参数曲面重建方法. 首先利用均值参数化方法建立每个粗四边形结构 M_{T} 到参数域 D 的映射, 同时得到 D 的三角剖分 Δ; 然后对 Δ 进行一次 Powell-Sabin 细分得到加细三角剖分 Δ^{S}, 并且利用 M_{T} 的几何信息构造二元一次样条函数空间 $S(\Delta^{\mathrm{S}})$ 中的插值函数 S; 对 D 均匀采样之后, 利用插值函数 S 得到规则型值点作为参数曲面表面点的近似; 最后建立具有光顺性质的能量函数, 求解出双三次 B 样条曲面的控制点网格, 完成曲面重建. 实验给出了柱面、鞍面等基础曲面和人头模型等自由曲面的重建结果. 数值结果表明, 与自适应算法相比, 所提方法能够捕获由给定三角网格呈现的几何细节, 重建复杂模型的点距均方误差减小 38%.

关键词: Powell-Sabin 细分; 均值参数化; B 样条曲面重建; 几何光顺
中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2023.2023-00021

A Parameterized Surface Reconstruction Method Based on Powell-Sabin Subdivision

Yang Zhifei[1)], Shi Xiquan[2)], Wang Weiming[1)], and Liu Xiuping[1)*]

[1)] (*School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian* 116024)
[2)] (*Division of Physics, Engineering, Mathematics, and Computer Science, Delaware State University, Dover* 19901)

Abstract: The conversion of complex geometric objects represented by triangular meshes into parametric surfaces is a critical issue in the design of CAD geometric engines. For a triangular mesh model with a coarse quadrilateral partitioning structure, this paper proposes a parameterized surface reconstruction method based on the Powell-Sabin subdivision. This paper first employs the mean value parameterization method to establish a mapping from each coarse quadrilateral structure M_{T} to the parameter domain D, and simultaneously obtains the triangular partitioning Δ of D. Then, a single Powell-Sabin subdivision is applied to Δ to achieve a refined triangular partitioning Δ^{S}. Moreover, using the geometric information of M_{T}, an interpolation function S is constructed in the bivariate spline space $S\left(\Delta^{\mathrm{S}}\right)$. After uniform sampling of D, S is used to approximate regular-valued points as surface points of the parametric surface. Lastly, by establishing an energy function with smoothness properties, the control point grid of the bicubic B-spline surface is solved to complete the surface reconstruction. Experiments present the reconstruction results of basic surfaces like cylindrical and saddle surfaces, as well as freeform surfaces like human head models. Numerical results indicate that, com-

收稿日期: 2023-04-16; 修回日期: 2023-12-15. **基金项目**: 国家重点研发计划(2020YFB1708900). **杨志飞**(1998—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为计算几何、逆向工程; **施锡泉**(1962—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为逆向工程、3D 模型构建、数值分析、NURBS、小波、信号分析和图像处理、特殊函数; **王伟明**(1986—), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为三维打印、数字几何处理、计算机图形学; **刘秀平**(1964—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 论文通信作者, 主要研究方向为计算几何、计算机视觉、机器学习.

pared to adaptive algorithms, the proposed method can capture the geometric details presented by the given triangular meshes, reducing the MSE of vertex distances in complex model reconstruction by 38%.

Key words: Powell-Sabin subdivision; mean value parameterization; B-spline surface reconstruction; geometric smoothness

CAD 软件是工业应用中主流的数字化设计与制造工具, 而 CAD 的基础底层支撑就是通用几何造型平台, 或者称为几何引擎. 将复杂几何体网格转换为参数曲面, 是 CAD 几何引擎设计中的关键问题, 它可以从几何和拓扑的角度解决复杂几何体的重构和连续性等问题, 生成高质量和高精度的几何模型, 减少存储需求和提升计算效率, 已在车身和船体设计、等几何分析[1]和计算机动画中得到广泛应用.

将复杂几何体网格转换为参数曲面是指从离散的网格数据中恢复出连续的 NURBS 曲面, 其基本思想是在保证光顺性和逼近性的条件下, 最小化 NURBS 曲面和原始网格之间的某种距离度量, 通常该方法包含以下步骤:

Step1. 拓扑划分. 将复杂的网格模型分割成更简单、更易于处理的片段.

Step2. 参数化. 为每个片段分配参数化的坐标.

Step3. 曲面拟合. 使用优化算法求解或调整 NURBS 控制点, 使得曲面尽可能地接近原始网格.

Step4. 优化和细化. 对 NURBS 曲面进行优化和细化, 以更精确地匹配原始网格的细节.

如何保持复杂的几何拓扑结构, 如何在有限的计算资源内有效地进行参数曲面重构, 如何保证 NURBS 曲面的质量及其与原始网格的符合度, 涉及计算机图形学、几何建模、数值优化和计算几何等多个领域的知识.

国内外学者已经对复杂几何体网格转换为参数化曲面展开研究, 在过去几十年中, 研究者对网格参数化进行深入探索, 并提出各种方法来解决不同类型的应用和约束问题. Tutte[2]通过将网格的边界顶点固定在某个凸多边形上, 并与凸边界内的内部顶点建立无交叉的直线嵌入来进行网格参数化; Floater[3]提出一种基于重心坐标的参数化方法, 不需要预先指定边界, 并且可以生成角度无失真的参数域, 该方法的优势是其简单性和通用性, 但可能不适用于所有的应用场景, 特别是特定的边界形状或更复杂的网格时; Lévy 等[4]提出基于局部最小化共形映射(least square conformal maps, LSCM)方法, 利用复分析理论很好地处理复杂的边界条件, 并特别适用于保持网格的角度; Sorkine 等[5]进一步扩展了保角参数化这一领域, 提出固定边界形式的参数化, 允许用户直接控制参数化的边界形状. 在处理更复杂的模型时, 防止参数化中的三角形翻转变得尤为重要. Sheffer 等[6]提出一种最小化参数化三角形翻转和失真的方法.

基于分片连续曲面的曲面重构技术能够方便地进行并行化计算, 常用于处理大型复杂数据, 是 Rhino 和 Geomagic 等 CAD 软件的关键技术, 该技术分为单张曲面重构和多张曲面连续拼接 2 个步骤. 早在 20 世纪 70 年代, 曲线曲面拟合的基础就已经形成, 已有许多经典算法, 从早期的 Ferguson 法、Coons 法, 到后来的 Bézier 算法、B 样条算法和 NURBS 算法. 考虑到拼接曲面的复杂性, B 样条曲面由于其良好的连续性和简单的数学描述形式, 特别是具有优良的控制性和局部性, 成为 CAD 造型系统的基本工具. 不少学者研究 Bézier 曲面、B 样条曲面、NURBS 曲面间的参数和几何连续性条件, 提出连续拼接曲面的构造方法. Shi 等[7]提出在经过四边形区域划分后的模型上, 重建收敛到 G^1 连续的双三次 B 样条曲面片的方法, 随着曲面控制顶点的增加, 曲面片间趋向于 G^1 连续; 随后, Shi 等[8]讨论了内部没有重节点的双五次 B 样条曲面片间的 G^1 连续性条件, 给出生成严格的 G^1 连续的双五次样条曲面的局部构造方法; Lin 等[9]通过自适应划分原始网格, 用 G^1 连续拼接双五次 Bézier 曲面片拟合三角形模型; Zhang 等[10]提出多分辨率网格拟合算法, 将粗四边形剖分递归地细分为 4 个子四边形, 扩展了基于自适应补丁的拟合方案. 上述方案[9-10]都是通过边界曲线和法线插值构建四边形面片, 从加细拓扑划分的角度提升拟合精度, 对于曲面内部细节刻画不够.

细分曲面重建与样条曲面重建方法的结合已成为研究热点. Catmull 等[11]和 Velho 等[12]提出将样条参数法推广到任意拓扑网格. Powell 等[13]提出将每个三角形细分为 6 个较小的三角形的细分方法; Halstead 等[14]研究了 Catmull-Clark 细分曲面的顶点和法向插值问题; 针对散乱数据, Hoppe 等[15]提出

基于细分的曲面重建算法; Ma 等[16]还研究 B 样条曲面与 Catmull-Clark 细分曲面相结合的重建技术, 首先通过人工交互方式得到一个四边形拓扑划分; 然后用 Catmull-Clark 细分曲面表示与奇异顶点相连的区域, 而其他区域用 B 样条曲面表示; 最后求解联合 B 样条和 Catmull-Clark 曲面的拟合系统; Karčiauskas 等[17]提出一种引导细分方法来构造双三次、双四次或双五次 C^1 Bézier 曲面, 优化参数曲面的高光线分布; Marsala 等[18]使用光滑掩模逼近 Catmull-Clark 细分曲面的全局 G^1 连续 Bézier 曲面, 为四边形网格构造 G^1 曲面提供新的研究思路. 细分曲面方法能够增强曲面几何特征, 同时 Powell-Sabin 细分构造的插值函数能够近似参数曲面, 从而获得更精确的型值点.

针对赋予四边形粗剖分结构的三角网格, 本文提出一种基于 Powell-Sabin 细分的参数曲面重建方法. 首先利用均值参数化方法和 Powell-Sabin 细分得到参数域 D 和 D 上加细三角剖分 Δ^{S}; 然后构造二元一次样条函数空间 $S_2^1(\Delta^{\mathrm{S}})$ 中的插值函数 S, 并且对 D 均匀采样得到采样点, 利用插值函数 S 计算规则型值点作为参数曲面的近似; 最后构建方程组求解 B 样条曲面的控制点网格. 实际应用中, 需要首先对复杂几何体在拓扑结构上分片, 得到赋予四边形粗剖分结构的三角网格模型; 然后计算四边形粗剖分结构的 NURBS 表示; 最后将分片 NURBS 曲面按照拓扑结构拼接, 得到 NURBS 表示的几何体.

1　预备知识

1.1　平面参数化

参数化指将三维网格曲面映射到一个参数域上(如平面、球面等), 它是大部分几何处理问题的基础, 如纹理映射与合成、细节迁移、网格编辑和压缩、曲面拟合、重网格化等.

如图 1 所示, 一个三角网格 M_{T} 是一组三角形 $T=\{T_1,T_2,\cdots,T_m\}$ 的并集, 它们仅在公共的边缘 $E=\{E_1,E_2,\cdots,E_l\}$ 和顶点 $V=\{\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2\cdots,\boldsymbol{V}_n\}$ 处相交. 具体地, 这些顶点按照一定顺序排列, 其中, 内部顶点的索引为 $I_{\mathrm{i}}=\{1,2,\cdots,m\}$, 边界顶点的索引为 $I_{\mathrm{b}}=\{m+1,m+2,\cdots,n\}$. 通常情况下, M_{T} 的参数化 $f|_{\mathrm{t}}$ 由函数 $g|_{\mathrm{T}}$ 来确定, 即通过指定每个顶点 $\boldsymbol{V}_i\in V$ 的参数点 $\boldsymbol{v}_i=g|_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{V}_i)$, 并要求 $g|_{\mathrm{T}}$ 在每个三角形上满足连续性和线性性. 在这种情况下, $g|_{\mathrm{T}}$ 是从一个表面三角形 T_k 到相应参数三角形 t_k 的线性映射, $f|_{\mathrm{t}}=(g|_{\mathrm{T}})^{-1}$ 是从 t_k 到 T_k 的逆线性映射. 参数域 Ω 是所有参数三角形的并集.

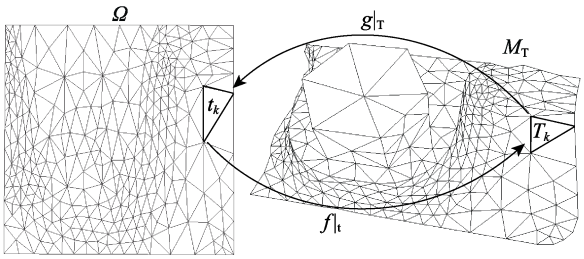


图 1　参数化示意图

定理 1. Tutte 重心映射定理[2].

若一个三角网格和二维圆盘能满足下列条件:

(1) 使得网格边界上顶点的坐标分布在一个凸多边形上;

(2) 使网格每个内部顶点(即非边界顶点)的坐标为其邻接顶点坐标的凸组合.

则一个三角形网格与圆盘同胚. 称这样的二维区域是有效的参数域, 通常设参数域为 $D=[0,1]\times[0,1]$.

设三角网格 M_{T} 在参数域 D 上的参数化坐标记为 $\{(u_1,w_1),(u_2,w_2),\cdots,(u_n,w_n)\}$. 根据凸组合的定义[19], 条件(2)可以写为 $\sum_{j\neq i}a_{ij}\begin{pmatrix}u_j\\w_j\end{pmatrix}-a_{ii}\begin{pmatrix}u_i\\w_i\end{pmatrix}=0.$

其中, $i,j\in I_{\mathrm{i}}$ 且 $j\neq i$, 系数

$$a_{ii}=-\sum_{j\neq i}a_{ij} \tag{1}$$

设 V_i 的邻接点集合为 H_i, 系数

$$\begin{cases}a_{ij}>0, & \text{if } V_j\in H_i\\ a_{ij}=0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{2}$$

假设参数域 D 上有一个预先定义好的凸多边形, 将三角网格 M_{T} 的边界顶点的参数坐标固定在这个凸多边形边界上, 其顶点坐标为 $\{(\overline{u}_{m+1},\overline{w}_{m+1}),(\overline{u}_{m+2},\overline{w}_{m+2}),\cdots,(\overline{u}_n,\overline{w}_n)\}$, 则定理 1 中的条件(1)可以写为

$$a_{ii}\begin{pmatrix}u_i\\w_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{u}_i\\\overline{w}_i\end{pmatrix} \tag{3}$$

根据式(3)可构建线性方程组 $\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\overline{\boldsymbol{y}}\end{cases}$, 其中, $\boldsymbol{x}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $\overline{\boldsymbol{x}}=(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\cdots,\overline{u}_n)$, $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 用来

存放 M_{T} 中全部顶点参数化后的对应坐标, 它们的分量分别记为 u_i 和 w_i, $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, (u_i,w_i) 即为 M_{T} 中的顶点 V_i 参数化后的坐标; $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 用来存放 M_{T} 中边界顶点参数化后的对应坐标. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 表示以系数 a_{ij} 为元素的 n 阶稀疏矩阵. 由式(1)~式(3), $\boldsymbol{A}$ 中非对角元素的取值为

$$\begin{cases} a_{ij}>0, & \text{if } i\in I_{\mathrm{i}}, j\in H_i \\ a_{ij}=0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$\boldsymbol{A}$ 中对角元素的取值为

$$\begin{cases} a_{ii}=-\sum\limits_{j\neq i}a_{ij}, & \text{if } i\in I_{\mathrm{i}} \\ a_{ii}=1, & \text{if } i\in I_{\mathrm{b}} \end{cases}.$$

1.2 Powell-Sabin 细分

1.2.1 二元多项式样条函数空间

设 XY 平面上某个三角形 t_k 如图 2 所示, 当点 $\boldsymbol{c}(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 在 t_k 内部时, $\boldsymbol{c}$ 可以写成三角形顶点坐标的线性组合形式为 $\boldsymbol{c}=\tau_1\boldsymbol{v}_1+\tau_2\boldsymbol{v}_2+\tau_3\boldsymbol{v}_3$. 其中, $\tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ 是点 $\boldsymbol{c}$ 关于 t_k 的重心坐标, 满足 $\tau_1+\tau_2+\tau_3=1$, 且 $\tau_i>0$, $i=1,2,3$.

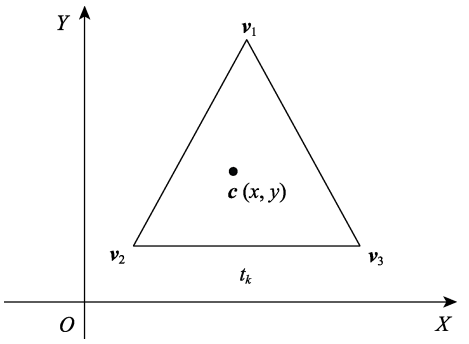


图 2 三角形 t_k 的重心坐标

设 $\Pi_2=\left\{\sum\limits_{i=0}^{2}\sum\limits_{j=0}^{2}a_{i,j}x^iy^j, a_{i,j}\in\mathbb{R},\ i+j\leqslant 2\right\}$,

Π_d 表示总次数小于或等于 d 的二元多项式的线性空间[20]. 其中的任意二元多项式 $p(x,y)$ 可以写成 Bernstein-Bézier 表示形式

$$p(x,y)=\sum_{\substack{i+j+k=2\\ i,j,k\geqslant 0}}b_{i,j,k}B^2_{i,j,k}(\tau_1,\tau_2,\tau_3).$$

其中, $i=1,2,3$; $B^2_{i,j,k}$ 是定义 t_k 在 Bernstein 二次多项式[21], 即

$$B^2_{i,j,k}=\frac{2!}{i!\,j!\,k!}\tau_1^i\tau_2^j\tau_3^k,$$

$i,j,k\geqslant 0$ 且 $i+j+k=2$.

设 D 为 2 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^2$ 中的给定区域, 其边界为 ∂D. $\Delta=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$ 是区域 D 的一个三角剖分. 如图 3 所示, Powell-Sabin 将 Δ 中的每个三角形剖分为 6 个较小的三角形, 得到的加细剖分称为 Δ 的 Powell-Sabin 剖分, 记作 Δ^{S}; 重心位置圆形黑点称为 Δ^{S} 的加细面点, 其余圆形黑点称为 Δ^{S} 的加细边点; Δ^{S} 上具有全局 C^1 连续性的分段二次多项式的空间称为 Powell-Sabin 样条空间, 记为 $S_2^1(\Delta^{\mathrm{S}})$, $S_2^1(\Delta^{\mathrm{S}})=\left\{s\in C^1(D):\ s|_{t_i}\in\Pi_2, t_i\in\Delta^{\mathrm{S}}\right\}$. Speleers 等[22]证明, 插值问题

$$\begin{cases} s(\boldsymbol{V}_l)=f_l, & l=1,2,\cdots,n \\ \dfrac{\partial s}{\partial x}(\boldsymbol{V}_l)=f_{xl}, & l=1,2,\cdots,n \\ \dfrac{\partial s}{\partial y}(\boldsymbol{V}_l)=f_{yl}, & l=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{4}$$

存在且有唯一解 $s(x,y)\in S_2^1(\Delta^{\mathrm{S}})$.

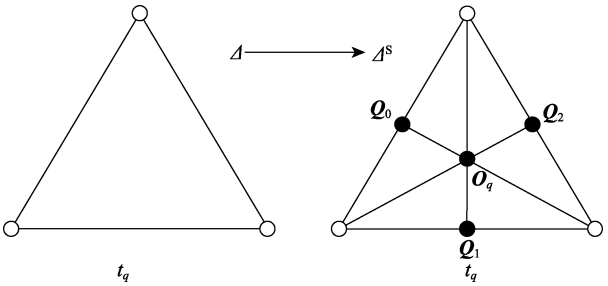


图 3 Powell-Sabin 剖分

进一步, Wang 等[23]给出了式(4)插值条件得到的样条函数是光滑的充要条件, 即每条内网线的加细顶点与其相邻的 2 个三角形的加细顶点是共线的; 每个样条函数空间 $S_2^1(\Delta^{\mathrm{S}})$ 由其在三角形顶点处的值和导数唯一确定, 因此函数空间 $S_2^1(\Delta^{\mathrm{S}})$ 具有维数 $3n$.

定义加细剖分 Δ^{S} 的步骤[7]如下: 首先在每个三角形内部选择一个加细点 $\boldsymbol{O}_k$ 并将其连接到 t_k 的 3 个顶点; 然后对于每对具有一个公共边的三角形 t_p 和三角形 t_q 连接 $\boldsymbol{O}_p$ 和 $\boldsymbol{O}_q$, 如果 t_k 是一个边界三角形, 也将 $\boldsymbol{O}_k$ 连接到边界边上的任意点.

1.2.2 Powell-Sabin 细分规则

Powell-Sabin 细分方法实现面的 1-4 分裂, 即 1 个面细分成 4 个面. 对于给定的三角形网格, 细分过程中每个面、每条边分别计算出一个新的顶点与之对应, 称之为新面点和新边点; 新面点与新边点以及顶点相连, 形成新的网格. 图 4 所示为单个

三角面的分裂规则，其中，圆形白点为旧点，左图圆形黑点为三角形每条边中点，右图圆形黑点为新顶点.

Powell-Sabin 细分实质上是一种中点型细分方法，图 5 所示为该方法的细分效果.

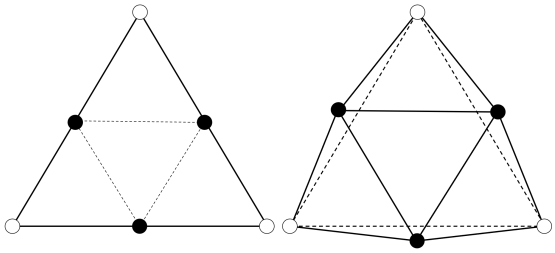


图 4　Powell-Sabin 细分规则

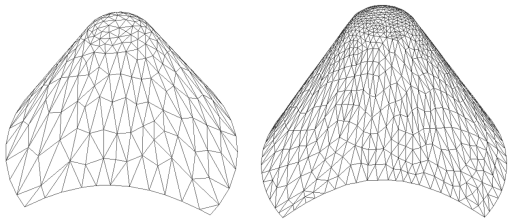


图 5　Powell-Sabin 细分结果

2　本文方法

本文方法整体框架如图 6 所示，分为基于均值权重的网格参数化、基于 Powell-Sabin 细分的重采样和基于光顺能量函数的曲面逼近 3 部分.

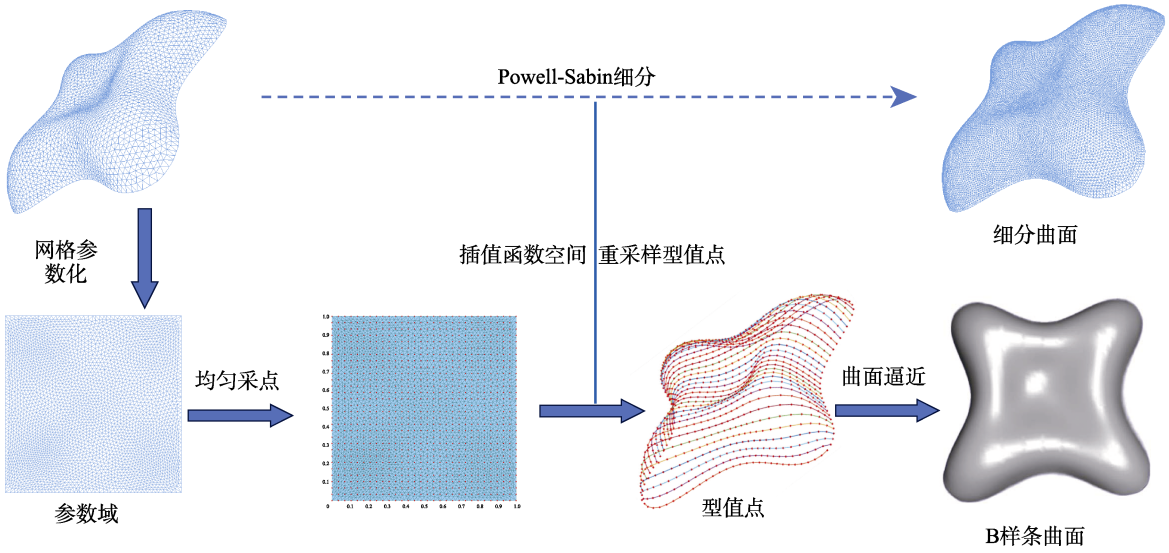


图 6　本文方法框架

2.1　基于均值权重的网格参数化

给定赋予四边形粗剖分结构的三角网格模型，对于每个粗四边形结构 M_{T} 的边界顶点，使用弦长参数化方法将其映射到参数域 D 的边界. 根据第 1.1 节的定义，记矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中描述内部顶点的子矩阵为 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{int}}$，则 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{int}}=\left(a_{ij}\right)_{m\times m}$，其中，$i,j\in\{1,2,\cdots,m\}$. $\boldsymbol{A}_{\mathrm{int}}$ 中非零的非对角线元素 a_{ij}（$j\neq i$ 且 $\left(\boldsymbol{V}_i,\boldsymbol{V}_j\right)\in E$，下同）可以视作 M_{T} 中 2 个邻接点 $\boldsymbol{V}_i$ 和 $\boldsymbol{V}_j$ 之间边 $(\boldsymbol{V}_i,\boldsymbol{V}_j)$ 的权重. 三角形网格中出现钝角的情况下参数化会产生反转三角形，为避免这种情况，Floater[3]提出均值权重方案，对 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{int}}$ 中非零、非对角线元 a_{ij} 和非零对角元 a_{ii} 取值为

$$\begin{cases} a_{ij}=\dfrac{1}{l_{ij}}\left(\tan\dfrac{\delta_{ij}}{2}+\tan\dfrac{\gamma_{ij}}{2}\right) \\ a_{ii}=-\sum\limits_{j}a_{ij} \end{cases}.$$

其中，l_{ij} 表示边 $\left(\boldsymbol{V}_i,\boldsymbol{V}_j\right)$ 的长度，δ_{ij} 和 γ_{ij} 表示位于边 $\left(\boldsymbol{V}_i,\boldsymbol{V}_j\right)$ 两侧 $\boldsymbol{V}_i$ 的邻接角，如图 7 所示.

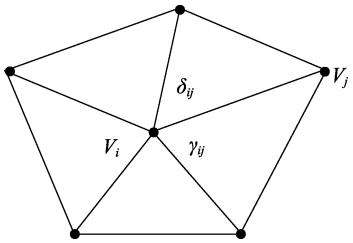
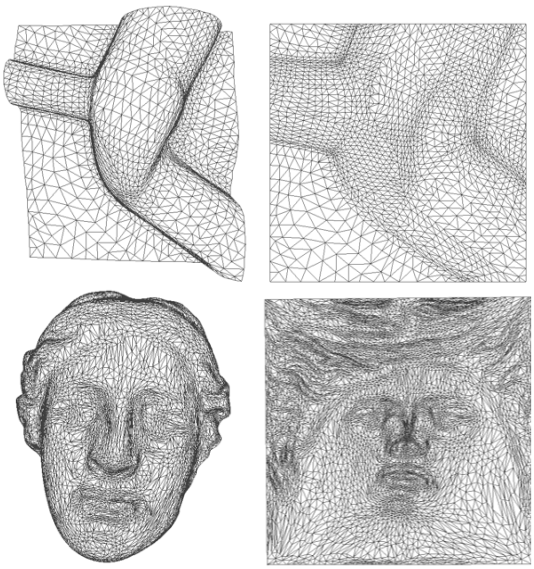


图 7　均值权重示意图

这样，只需求解由均值权重确定的线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\bar{\boldsymbol{X}}$，分别求出向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，即可得到 M_{T} 的参数化结果，如图 8 所示.

2.2　基于 Powell-Sabin 细分的重采样

本节采用基于 Powell-Sabin 细分的重采样方法. 对第 2.1 节 Δ 再进行 Powell-Sabin 细分，得到



a. 三角网格 b. 参数化结果

图 8 均值参数化

加细三角剖分 Δ^{S}，并且利用粗四边形结构 M_{T} 的几何信息构造二元一次样条函数空间 $S_2^1(\Delta^{\mathrm{S}})$ 中的插值函数 S；再对 D 均匀采样后，利用插值函数 S 得到规则型值点作为参数曲面表面点的近似.

为了得到 $S_2^1(\Delta^{\mathrm{S}})$ 中的插值函数 S，每个加细面点可以取为所对应三角形的内心[23]. 对于每条内网线(Δ位于 D 内部的网线)，其加细边点必须取为该网线与其相邻 2 个加细面点之连线的交点. 为了方便起见，本文将加细面点取为三角形重心，而将加细边点取为每条网线的中点. 如此得到的插值函数 S 只是 $S_2^0(\Delta^{\mathrm{S}})$ 中的函数，即使如此，本文结果显示，所得之插值函数 S 能够很好地表示原始曲面.

令三角形 t_q 的重心 $\boldsymbol{O}_q$ 作为 Δ^{S} 内的加细面点，3 条边中点 $\boldsymbol{Q}_i\,(i=0,1,2)$ 为加细边点，如图 3 所示，在三角形 t_q 上构造了二元样条插值函数 $S:D\to\mathbb{R}^3$. 设 $\boldsymbol{O}_q$ 关于 t_q 的重心坐标 $\left(U_q^0,U_q^1,U_q^2\right)$，则有

$$\sum_{j\in\{0,1,2\}}U_q^j\left(\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{O}_q\right)=0.$$

能够推出

$$\sum_{j\in\{0,1,2\}}U_q^jD_{q,j}S\left(\boldsymbol{O}_q\right)=0.$$

定理 2. 设 p 是定义在 $[0,h]$ 上的二次多项式，则多项式 p 满足关系式

$$2p(0)+hp'(0)=2p(h)-hp'(h) \tag{5}$$

由定理 2 可得关系式

$$2S\left(\boldsymbol{O}_q\right)+D_{q,j}S\left(\boldsymbol{O}_q\right)=2S\left(\boldsymbol{v}_j\right)-D_{q,j}S\left(\boldsymbol{v}_j\right) \tag{6}$$

联立式(5)(6)，可得 $D_{q,j}S=\dfrac{\partial S}{\partial\left(\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{O}_q\right)}$. 于是有

$$2S\left(\boldsymbol{O}_q\right)=\sum_{j\in\{0,1,2\}}U_q^j\left(2S\left(\boldsymbol{O}_q\right)+D_{q,j}S\left(\boldsymbol{O}_q\right)\right)=$$
$$\sum_{j\in\{0,1,2\}}U_q^j\left(2S\left(\boldsymbol{v}_j\right)-D_{q,j}S\left(\boldsymbol{v}_j\right)\right) \tag{7}$$

如图 9 所示，插值函数 S 在三角形 t_k 顶点 $\boldsymbol{v}_j$ 处的值为 $S(\boldsymbol{v}_j)=\boldsymbol{V}_j$，利用 M_{T} 的顶点法向量计算方向导数 $D_{q,j}S(\boldsymbol{v}_j)$. 为了得到更光滑的网格曲面，对网格 M_{T} 的顶点 $\boldsymbol{V}_j$ 一环邻域内的 N 个顶点作最小二乘平面拟合(平面过 N 点重心)，所得平面的法向量作为该顶点 $\boldsymbol{V}_j$ 的法向量近似. 法向量在 $\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{O}_q$ 方向的投影作为 $D_{q,j}S$ 的近似. 根据式(7)可以得到 $S\left(\boldsymbol{O}_q\right)$ 和 $S\left(\boldsymbol{Q}_i\right)$ 作为加细网格的顶点.

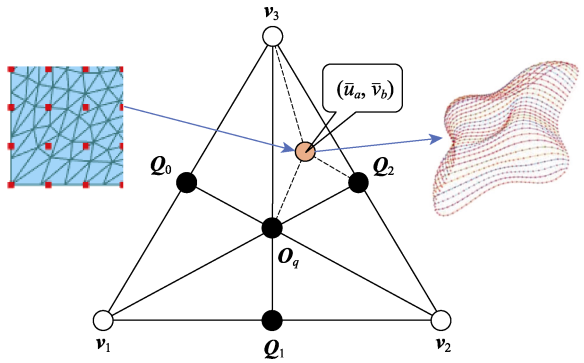


图 9 重采样型值点示意图

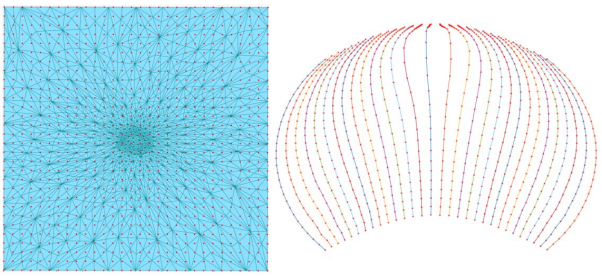
本节得到参数域 D 上 Δ 的 Powell-Sabin 剖分 Δ^{S}，在 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x,y\leqslant 1,x,y\in\mathbb{R}\right\}$ 内均匀采样 $\left(\bar{u}_a,\bar{w}_b\right)$，其中，$a=0,1,\cdots,r$，$b=0,1,\cdots,s$. 且有 $0=\bar{u}_0<\bar{u}_1<\cdots<\bar{u}_r=1$，$0=\bar{w}_0<\bar{w}_1<\cdots<\bar{w}_s=1$.

如图 9 所示，采样点 $\left(\bar{u}_a,\bar{w}_b\right)$ 关于三角形 t_{ab} 的重心坐标为 $\left(U_{ab}^1,U_{ab}^2,U_{ab}^3\right)$. 根据式(7)，可以求出采样点 $\left(\bar{u}_a,\bar{w}_b\right)$ 对应的型值点 $\boldsymbol{O}_{ab}=S\left[\left(\bar{u}_a,\bar{w}_b\right)\right]$. 图 10 所示为重采样型值点示意图.

如果需要在重建过程更好地保持曲面几何特征，可以利用得到的插值函数 S 构造 M_{T} 的一个加细空间三角网格 M_{T}^*. 如果需要进一步保持几何特征，可以重复上述过程.

2.3 基于光顺能量函数的曲面逼近

本节给出从型值点集 $\{\boldsymbol{O}_{ab}\}$ 重构双三次 B 样条曲面 $S(u,w)$ 的方法. 首先由边界型值点逼近边界



a. 参数域上均匀采样 30×30 个点　　b. a 对应的型值点

图 10　重采样型值点示意图

曲线，然后在光顺能量函数最小的意义下逼近整个曲面.

定义在参数域 D 的张量积型 B 样条曲面方程为

$$S(u,w)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{P}_{i,k}N_{i,3}(u)N_{k,3}(w).$$

其中，用 $\boldsymbol{P}_{i,k}\,(i,k=0,1,\cdots,n)$ 表示控制顶点；$N_{i,3}(u)$ 和 $N_{k,3}(w)$ 表示定义在 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{W}$ 上的 3 次 B 样条基函数. 节点向量 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{W}$ 采用准均匀节点向量，即满足端点插值性，公式为

$$\boldsymbol{U}=\left\{\underbrace{0,0,\cdots 0}_{4},u_4,\cdots,u_{r-4},\underbrace{1,\cdots,1}_{4}\right\},$$

$$\boldsymbol{W}=\left\{\underbrace{0,0,\cdots 0}_{4},w_4,\cdots,w_{s-4},\underbrace{1,\cdots,1}_{4}\right\};$$

样条曲面 $S(u,w)$ 满足角点插值，即 $S(0,0)=\boldsymbol{O}_{0,0}$，$S(0,1)=\boldsymbol{O}_{0,s}$，$S(1,0)=\boldsymbol{O}_{r,0}$，$S(1,1)=\boldsymbol{O}_{r,s}$.

记参数采样 $\Delta\bar{u}:0=\bar{u}_0\leqslant\bar{u}_1\leqslant\cdots\leqslant\bar{u}_r=1$，$\Delta\bar{w}:0=\bar{w}_0\leqslant\bar{w}_1\leqslant\cdots\leqslant\bar{w}_s=1$，由第 2.2 节可知，每个型值点 $\boldsymbol{O}_{ab}$ 对应一个参数值 $(\bar{u}_a,\bar{w}_b)$.

本文采取最小二乘拟合算法构造边界曲线. 以边界曲线 C_0 为例，要求边界曲线 C_0 在 $(\bar{u}_a,0)$ 处的点 $\bar{\boldsymbol{O}}_{a,0}$ 与对应的边界型值点距离平方和最小，即

$$\min f(\boldsymbol{P}_{1,0},\cdots,\boldsymbol{P}_{n-1,0})=\sum_{a=0}^{r}\left\|\boldsymbol{O}_{a,0}-\bar{\boldsymbol{O}}_{a,0}\right\|^2.$$

其中，$C_0(u)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_{i,0}N_{i,3}(u)$.

由此求得三次样条曲面的边界控制点 $\boldsymbol{P}_{i,k}$，边界曲线拟合结果如图 11 所示.

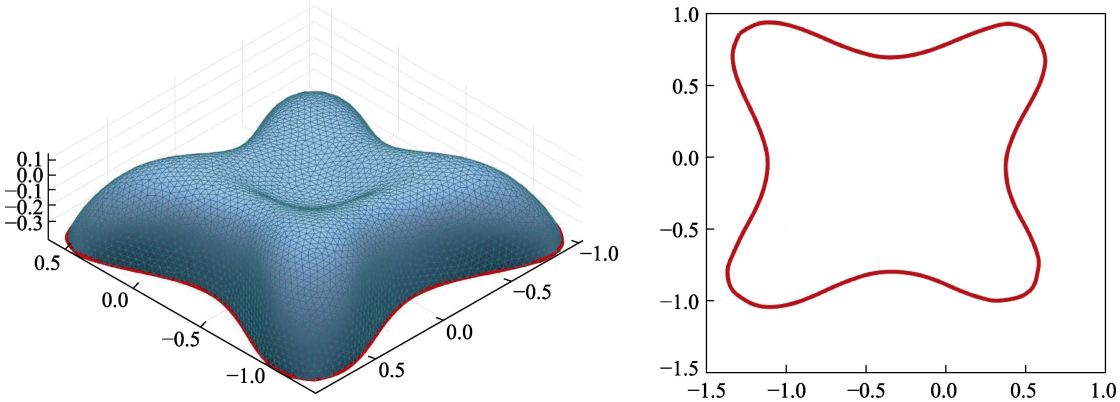


图 11　边界曲线拟合

对于内部的型值点 $\boldsymbol{O}_{ab}$，重构的曲面 $S(u,w)$ 要满足在 $(\bar{u}_a,\bar{w}_b)$ 处的点 $\bar{\boldsymbol{O}}_{ab}$ 与型值点 $\boldsymbol{O}_{ab}$ 距离平方和最小，距离函数记为 E_{ls}，公式为

$$E_{\mathrm{ls}}=\frac{1}{2}\sum_{a=0}^{r}\sum_{b=0}^{s}\left\|\bar{\boldsymbol{O}}_{ab}-\boldsymbol{O}_{ab}\right\|^2.$$

为了满足曲面的光顺性要求，引入光顺能量表示为 E_{fair}，公式为

$$E_{\mathrm{fair}}=\frac{1}{2}\int_{[0,1]^2}\left(\left\|S_{uu}\right\|^2+2\left\|S_{uw}\right\|^2+\left\|S_{ww}\right\|^2\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}w.$$

则总能量函数为 $E=E_{\mathrm{ls}}+\lambda E_{\mathrm{fair}}$，其中，$\lambda>0$ 是一个称为光顺因子的常数. 在最小化能量函数 E 的条件下，求出控制点 $\boldsymbol{P}_{i,k}$.

在 $\dfrac{\partial E_{\mathrm{fair}}}{\partial \boldsymbol{P}_{i,k}}=0$ 和 $\dfrac{\partial E_{\mathrm{ls}}}{\partial \boldsymbol{P}_{i,k}}=0$，$i,k=1,2,\cdots,n-1$ 时，有分块线性方程组表示为

$$\sum_{j=1}^{n-1}(\boldsymbol{F}_{i,j},\boldsymbol{M}_{i,j})\boldsymbol{P}_j=(\boldsymbol{B}_i,\bar{\boldsymbol{B}}_i),\quad i=1,2,\cdots,n-1 \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{P}_j=\left(\boldsymbol{P}_{j,1},\cdots,\boldsymbol{P}_{j,n-1}\right)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{F}_{i,j}=\left(\theta_{i,j;k,l}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n-1}$；$\boldsymbol{M}_{i,j}=\left(\bar{\theta}_{i,j;k,l}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n-1}$；$\boldsymbol{B}_i=\left(\boldsymbol{B}_{i,1},\cdots,\boldsymbol{B}_{i,n-1}\right)^{\mathrm{T}}$；$\bar{\boldsymbol{B}}_i=\left(\bar{\boldsymbol{B}}_{i,1},\cdots,\bar{\boldsymbol{B}}_{i,n-1}\right)^{\mathrm{T}}$；

$$\theta_{i,j;k,l}=\int_0^1 N_{i,3}(u)N_{j,3}(u)\mathrm{d}u\int_0^1 N''_{k,3}(u)N''_{l,3}(u)\mathrm{d}u+2\int_0^1 N'_{i,3}(u)N'_{j,3}(u)\mathrm{d}u\int_0^1 N'_{k,3}(u)N'_{l,3}(u)\mathrm{d}u+\int_0^1 N''_{i,3}(u)N''_{j,3}(u)\mathrm{d}u\int_0^1 N_{k,3}(u)N_{l,3}(u)\mathrm{d}u;$$

$$\overline{\theta}_{i,j;k,l}=\sum_{a=0}^{r}\sum_{b=0}^{s}N_{i,3}(\overline{u}_{a,b})N_{j,3}(\overline{u}_{a,b})N_{k,3}(\overline{w}_{a,b})N_{l,3}(\overline{w}_{a,b});$$

$$\boldsymbol{B}_{i,k}=-\sum_{l=0}^{n}\theta_{i,0;k,l}\boldsymbol{P}_{0,l}-\sum_{l=0}^{n}\theta_{i,n;k,l}\boldsymbol{P}_{n,l}-\sum_{j=1}^{n-1}\theta_{i,j;k,0}\boldsymbol{P}_{j,0}-\sum_{j=1}^{n-1}\theta_{i,j;k,n}\boldsymbol{P}_{j,n};$$

$$\overline{\boldsymbol{B}}_{i,k}=\sum_{a=0}^{r}\sum_{b=0}^{s}\boldsymbol{O}_{a,b}N_{i,3}(\overline{u}_{a,b})N_{k,3}(\overline{w}_{a,b})-\sum_{l=0}^{n}\overline{\theta}_{i,0;k,l}\boldsymbol{P}_{0,l}-\sum_{l=0}^{n}\overline{\theta}_{i,n;k,l}\boldsymbol{P}_{n,l}-\sum_{j=1}^{n-1}\overline{\theta}_{i,j;k,0}\boldsymbol{P}_{j,0}-\sum_{j=1}^{n-1}\overline{\theta}_{i,j;k,n}\boldsymbol{P}_{j,n}.$$

则式(8)可以写为

$$(\boldsymbol{G}_{\mathrm{ls}}+\lambda\boldsymbol{G}_{\mathrm{fair}})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{ls}}+\lambda\boldsymbol{B}_{\mathrm{fair}}.$$

其中，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{P}_{n-1}^{\mathrm{T}})$，$\boldsymbol{G}_{\mathrm{ls}}=(\boldsymbol{M}_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$，$\boldsymbol{G}_{\mathrm{fair}}=(\boldsymbol{F}_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{ls}}=(\overline{\boldsymbol{B}}_1^{\mathrm{T}},\overline{\boldsymbol{B}}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\overline{\boldsymbol{B}}_{n-1}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{fair}}=(\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{B}_{n-1}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. 可以验证，$\boldsymbol{G}_{\mathrm{ls}}$ 和 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{fair}}$ 分别是半正定和正定. 因此，如果 $\lambda>0$，$(\boldsymbol{G}_{\mathrm{ls}}+\lambda\boldsymbol{G}_{\mathrm{fair}})$ 总是正定的，在方程组求解时具有良好的稳定性.

2.4 本文方法步骤

本文方法具体步骤如下:

输入. 粗四边形结构 M_{T}.

输出. 双三次 B 样条曲面 $S(u,w)$.

Step1. 读入粗四边形结构 M_{T}，提取顶点和面片信息，设置角点、采样点个数和控制顶点个数.

Step2. 设定参数域 D 为[0,1]×[0,1]，使用均值参数化算法得到 D 上的三角剖分 Δ 和 M_{T} 上顶点 V 的参数坐标 (u,w):

Step2.1. 对 M_{T} 边界点使用弦长参数化计算边界点参数坐标;

Step2.2. 计算网格顶点均值权重，构建线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\overline{\boldsymbol{X}}$ 并求解，得到内部顶点的参数坐标.

Step3. 重采样规则型值点:

Step3.1. 对 D 使用 Powell-Sabin 细分构造插值函数 S;

Step3.2. 如果需要保持几何特征，则对 M_{T} 使用 Powell-Sabin 细分生成加细的粗四边形 M_{T}^{*}，再进行细分后构造插值函数 S;

Step3.3. 设置采样点个数，在参数域 D 均匀采样，计算采样点集 $\{(\overline{u}_a,\overline{w}_b)\}$ 对应的型值点集 $\{\boldsymbol{O}_{ab}\}$.

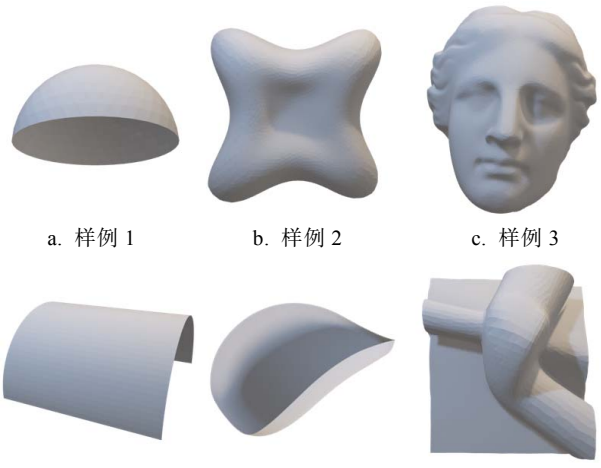
Step4. 设定初始控制点数，对边界型值点使用最小二乘拟合 4 条边界曲线 $C_i(i=0,1,2,3)$，对内部型值点建立光顺条件下双三次 B 样条曲面逼近的能量函数 $E=E_{\mathrm{ls}}+\lambda E_{\mathrm{fair}}$，求出 B 样条曲面的控制点 $\boldsymbol{P}$，重建参数 B 样条曲面 $S(u,w)$.

3 实验及结果分析

3.1 实验平台和实验数据

本文实验基于 Windows 10 操作系统，Intel Core i5-4200H CPU，8 GB 内存，NVIDIA GTX950M GPU 的笔记本电脑进行. 本文方法使用 C++语言，基于 Microsoft Visual Studio 2019 开发实现.

本文实验数据大多数来自现有的开源 CAD 数据集，如 ABC 数据集、Libigl 库测试数据集、TetWild 数据集和斯坦福 3D 扫描资料库. 部分测试样例如图 12 所示. 实验过程中，选择数据集中的流形网格作为实验对象，对网格裁剪得到四边形粗剖分结构.



a. 样例 1　b. 样例 2　c. 样例 3

d. 样例 4　e. 样例 5　f. 样例 6

图 12　测试样例

3.2 参数设置和拟合精度

理论上，选取的控制顶点个数只要小于参数域内采样点个数且保证线性方程组有解即可. 但是，如果控制顶点数选取得过大，拟合的曲面波动也会过大，导致拟合的曲面质量较差；如果控制顶点选取得过小，拟合误差会相应增大. 所以，控制顶点个数的选取原则是：在保证方程组有解、曲面不产生过大波动的基础上尽量多取. 本文默认设置 u,w

方向控制顶点数同为 15. 在实际计算中，控制顶点个数的选取并不绝对，可以根据拟合曲面质量进行调整.

拟合精度指网格与重建的拟合曲面之间的符合程度，本文使用均方误差(mean square error, MSE)作为度量指标. 由第 2.2 节，网格 M_{T} 上顶点 $\boldsymbol{V}_{kl}$ 在参数域 D 上的 MSE 定义为网格顶点 $\boldsymbol{V}_{kl}$ 与对应拟合曲面上点 $\bar{\boldsymbol{O}}_{kl}$ 的距离平方和求平均，表示为

$$\mathrm{MSE}=\frac{1}{L\times N}\sum_{k=0}^{N}\left\|\boldsymbol{V}_{kl}-\bar{\boldsymbol{O}}_{kl}\right\|_2^2.$$

其中，L 表示原始网格包围盒对角线长；N 表示原始网格顶点个数.

3.3　结果分析

采用本文方法对测试样例进行实验的重建效果如图 13 所示. 可以看出，使用光顺能量函数构造的 B 样条曲面，能够理想地展示由给定数据点呈现的几何细节，满足曲面重建的光顺要求. 表 1 所示为 6 个测试样例的结果对比. 图 14 所示为测试样例误差结果对比，其中，采样点为 30×30，控制点为 15×15. 可以看出，由于本文方法在拟合边界时使用了最小二乘能量函数的拟合方法，相比于曲面内部，曲面在边界处的拟合误差明显更大，原因是由于本文在裁剪原始模型时产生锯齿状的边界. 未来考虑使用测地线边界代替原始网格边界或者更精确的边界曲线拟合方法，减小在边界处的误差.

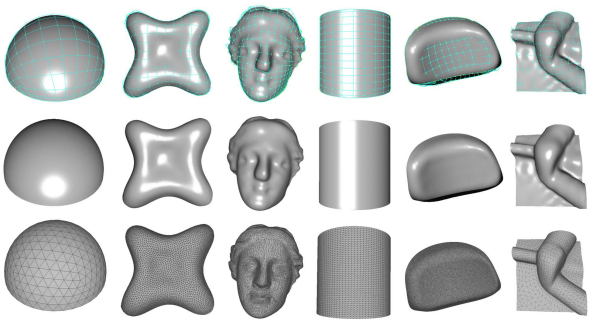
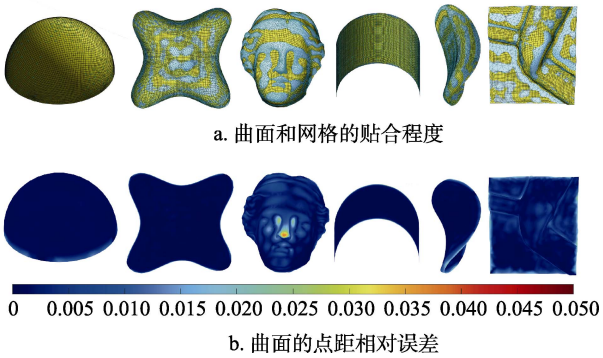


图 13　可视化效果

表 1　6 个测试样例的拟合结果对比

样例	顶点数	面数	拟合误差	内部误差	时间/s
1	341	640	1.9×10^{-3}	1.6×10^{-3}	3.25
2	4344	8414	1.4×10^{-3}	1.1×10^{-3}	19.32
3	5923	11676	4.9×10^{-3}	4.8×10^{-3}	112.45
4	2500	04802	1.9×10^{-3}	9.5×10^{-4}	17.81
5	6230	12201	1.7×10^{-3}	1.0×10^{-3}	34.43
6	1857	3572	3.8×10^{-3}	3.4×10^{-3}	9.12



a. 曲面和网格的贴合程度　b. 曲面的点距相对误差

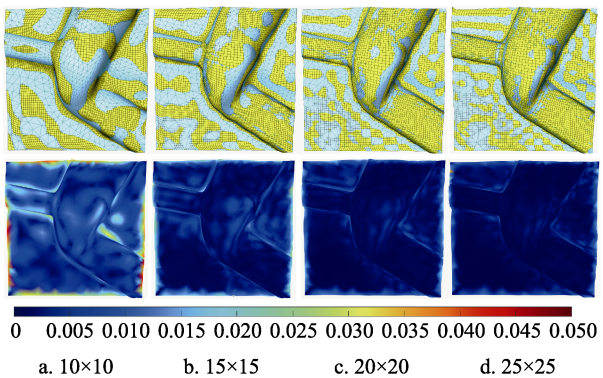
图 14　6 个测试样例误差结果对比

采样点个数和控制点个数是重要参数，其值不同导致拟合结果有很大区别. 图 12f 样例 6 是由 1857 个顶点、3572 个三角面片组成的四边形粗剖分结构，本文将其选为实验对象.

表 2 所示为采样点个数为 30×30 时，不同控制点个数的拟合误差对比. 可以看出，当控制点个数增加时，拟合误差会减小. 图 15 所示为控制点个数不同情况下拟合结果. 可以看出，控制顶点个数从 10 增加到 15 时拟合效果明显变好；控制顶点数从 15 增加到 25 时效果变化不那么明显. 但是，控制点个数的增加会导致第 2.3 节中解方程的维度呈几何倍增，时间开销加大. 因此，本文实验中默认设置控制顶点个数为 15×15.

表 2　不同控制点个数时的拟合误差对比

控制点个数	拟合误差	时间/s
10×10	8.6×10^{-3}	9.01
15×15	3.8×10^{-3}	9.12
20×20	2.3×10^{-3}	9.36
25×25	1.7×10^{-3}	9.45



a. 10×10　b. 15×15　c. 20×20　d. 25×25

图 15　控制点个数不同情况下拟合结果

采样点数量设置也是参数曲面重建的关键，数量过少会影响重建效果，数量过多会浪费计算

资源. 采样点是贴近原始曲面的点云, 控制顶点个数确定时, 过少的采样点不能刻画出原始曲面的特征, 随着采样点的增加, 求解大型方程组花的时间越多. 表 3 所示为控制点个数为 15×15 时, 分别计算采样点取 20, 25, 30, 35, 40, 45 和 50 时的拟合误差. 采样点取 20, 30, 40 和 50 时, 可视化结果如图 16 所示. 为节省计算和储存开销, 在计算时间和重建效果平衡的情况下, 本文设置默认采样点参数 30×30. 图 17 所示为采样点取 50×50, 控制点取 25×25 时的误差结果. 可以看出, 此时曲面拟合的效果较好, 整体误差小.

表 3 不同采样点个数的拟合误差

采样点个数	拟合误差	时间/s
20×20	4.20×10^{-3}	4.71
25×25	3.70×10^{-3}	6.69
30×30	3.80×10^{-3}	9.12
35×35	3.84×10^{-3}	11.86
40×40	3.81×10^{-3}	15.38
45×45	3.83×10^{-3}	19.09
50×50	3.82×10^{-3}	24.15

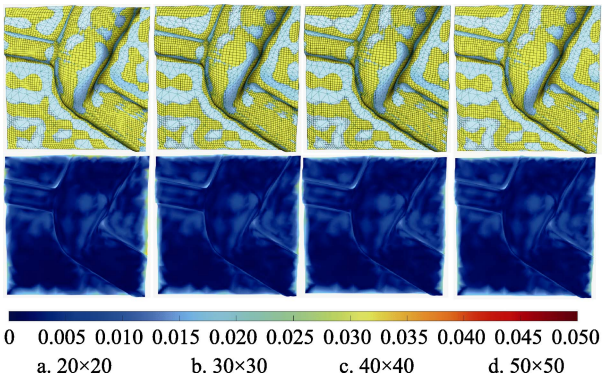


图 16 采样点个数不同情况下拟合结果

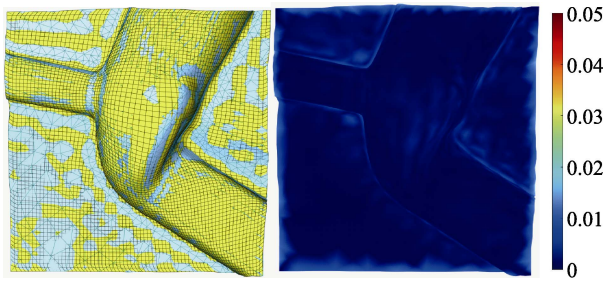
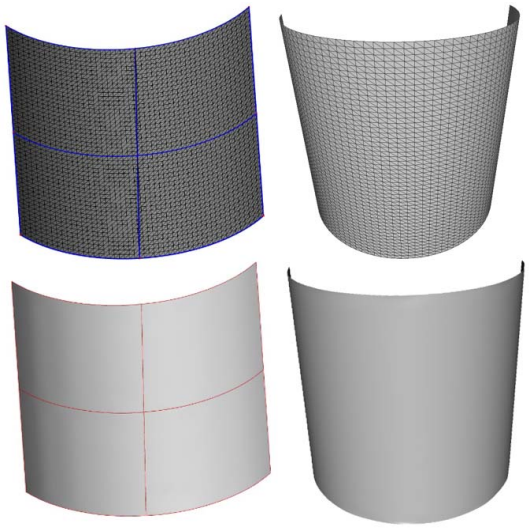


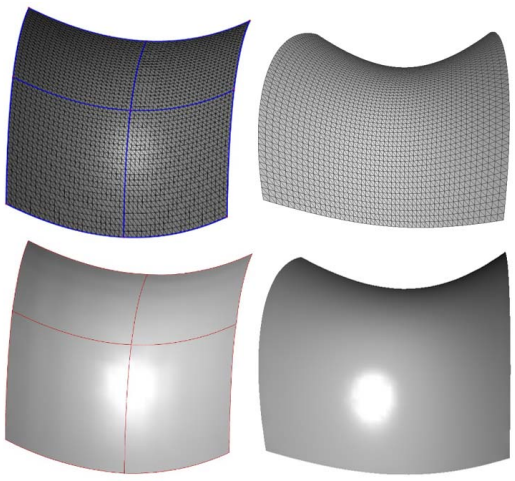
图 17 采样点 50×50, 控制点 25×25 时误差结果

将本文方法与 Zhang 等[10]提出的多分辨率自适应网格拟合算法(简称自适应算法)进行比较. Zhang 等[10]将每个样条曲面片的阶数设置为 4×4, 控制点的数量设置为 9×9, 对模型进行自适应粗四边形剖分, 通过增加曲面片的个数实现对局部细节的补充描述. 柱面、鞍面等基础曲面和 Man-Head 模型拟合结果如图 18~图 20 所示, 其中, 自适应算法是对整个模型进行分割后计算, 本文方法在实验部分只计算内部顶点的误差; 定量对比结果如表 4 所示. 柱面和马鞍面网格模型都是通过常规函数生成的, 设置顶点个数为 2 500, 三角面个数为 4 802; 在自适应算法的实验中, 它们被分割为 4 个粗四边形结构, 本文使用 18×18 的控制点保证控制点个数相同. Man-Head 模型是一个具有 3 302 个顶点和 6 437 个面的三角形网格. 从表 4 可以看出, 自适应算法中, 细分后最终面片数为 16 个, 控制点个数为 9×9×16, 拟合误差达到 1.65×10^{-3}. 在本



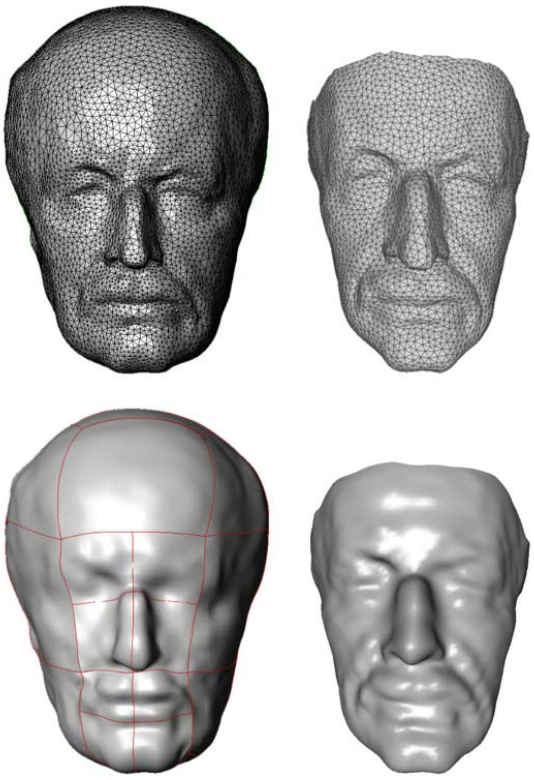
a. 自适应算法[10] b. 本文方法

图 18 不同方法拟合柱面模型结果对比



a. 自适应算法[10] b. 本文方法

图 19 不同方法拟合马鞍面模型结果对比



a. 自适应算法[10]　　b. 本文方法

图 20　不同方法拟合 Man-Head 模型结果对比

表 4　不同方法拟合误差定量对比实验

方法	柱面	马鞍面	Man-Head 模型
自适应[10]	3.74×10^{-4}	4.46×10^{-4}	1.65×10^{-3}
本文	6.36×10^{-4}	6.15×10^{-4}	1.02×10^{-3}

文方法的实验中, 设置控制点为 36×36, 拟合误差为 1.02×10^{-3}. 自适应算法构造边界曲线时引入边界上法线约束, 然后通过边界曲线和法线插值构造拟合曲面, 使得该算法对于边界拟合效果好, 基础曲面拟合精度比本文方法高; 但是对于 Man-Head 这类几何特征明显的自由曲面, 本文方法利用原始网格的局部几何特征构造采样插值函数, 从而得到更好的拟合效果.

4　结　语

围绕复杂几何体网格转换为参数曲面问题, 本文提出基于 Powell-Sabin 细分的参数曲面重建方法. 实验给出了柱面、鞍面等基础曲面和 Man-Head 模型自由曲面的重建结果. 数值结果表明, 与自适应算法相比, 本文方法可以使用更多的原始网格几何信息捕捉物体局部的几何特征, 对复杂模型的拟合效果较好; 但是, 输入网格被划分成粗四边形区域时, 锯齿状边界可能会带来数值不稳定. 未来, 考虑引入法向信息的边界拟合, 同时将 Powell-Sabin 细分方法应用到细分曲面重建领域; 引入自适应细分方法设计重采样模块, 研究新的参数曲面重建方法.

参考文献(References):

[1] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39-41): 4135-4195

[2] Tutte W T. Convex representations of graphs[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1960, s3-10(1): 304-320

[3] Floater M S. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations[J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(3): 231-250

[4] Lévy B, Petitjean S, Ray N, *et al*. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation[J]. Seminal Graphics Papers: Pushing the Boundaries, 2023, 2: Article No.22

[5] Sorkine O, Alexa M. As-rigid-as-possible surface modeling[C] //Proceedings of the 15th Eurographics Symposium on Geometry Processing. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2007: 109-116

[6] Sheffer A, Praun E, Rose K. Mesh parameterization methods and their applications[J]. Foundations and Trends® in Computer Graphics and Vision, 2007, 2(2): 105-171

[7] Shi X Q, Wang T J, Wu P R, *et al*. Reconstruction of convergent G^1 smooth B-spline surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(9): 893-913

[8] Shi X Q, Wang T J, Yu P Q. A practical construction of G^1 smooth biquintic B-spline surfaces over arbitrary topology[J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(5): 413-424

[9] Lin H W, Chen W, Bao H J. Adaptive patch-based mesh fitting for reverse engineering[J]. Computer-Aided Design, 2007, 39(12): 1134-1142

[10] Zhang S, Li Z G, Zhang H, *et al*. Multi-resolution mesh fitting by B-spline surfaces for reverse engineering[C] //Proceedings of the 12th International Conference on Computer-Aided Design and Computer Graphics. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2011: 251-257

[11] Catmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes[J]. Computer-Aided Design, 1978, 10(6): 350-355

[12] Velho L, Perlin K, Biermann H, *et al*. Algorithmic shape modeling with subdivision surfaces[J]. Computers & Graphics, 2002, 26(6): 865-875

[13] Powell M J D, Sabin M A. Piecewise quadratic approximations on triangles[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1977, 3(4): 316-325

[14] Halstead M, Kass M, DeRose T. Efficient, fair interpolation using Catmull-Clark surfaces[C] //Proceedings of the 20th Annual Conference on Computer Graphics and interactive Techniques. New York: ACM Press, 1993: 35-44

[15] Hoppe H, DeRose T, Duchamp T, *et al*. Piecewise smooth surface reconstruction[C] //Proceedings of the 21st Annual Con-

ference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 1994: 295-302

[16] Ma W Y, Zhao N L. Smooth multiple B-spline surface fitting with Catmull-Clark subdivision surfaces for extraordinary corner patches[J]. The Visual Computer, 2002, 18(7): 415-436

[17] Karčiauskas K, Peters J. Improved shape for refinable surfaces with singularly parameterized irregularities[J]. Computer-Aided Design, 2017, 90: 191-198

[18] Marsala M, Mantzaflaris A, Mourrain B. G^1-smooth biquintic approximation of Catmull-Clark subdivision surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2022, 99: Article No.102158

[19] Guan Yanran, van Kaick O, Guan Youqing. Research and implementation of triangle mesh parameterization method based on barycentric mapping[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2019, 42(5): 83-90(in Chinese)
(管焱然, 奥利弗·范凯克, 管有庆. 基于重心映射的三角形网格参数化方法研究与实现[J]. 北京邮电大学学报, 2019, 42(5): 83-90)

[20] Wang Renhong. Multivariate spline functions and their applications[M]. Beijing: Science Press, 1994: 25-39(in Chinese)
(王仁宏. 多元样条函数及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1994: 25-39)

[21] Giorgiani G, Guillard H, Nkonga B. A Powell-Sabin finite element scheme for partial differential equations[J]. ESAIM: Proceedings and Surveys, 2016, 53: 64-76

[22] Speleers H, Dierckx P, Vandewalle S. Local subdivision of Powell-Sabin splines[J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(5): 446-462

[23] Wang R H, Wang W B, Wang S M, *et al.* The C^1 quadratic spline spaces on triangulations[J]. Math. Appl, 1988, 1: 123-131