基于中轴的四边形网格生成算法优化

王昊，郑晓朋*，齐志辉，雷娜，罗钟铉

(大连理工大学软件学院 大连 116024)
(zhengxp@dlut.edu.cn)

摘 要：基于无内点三角网格中轴划分的四边形网格生成算法能够良好地保持模型锐角特征，同时具有流程简洁、计算高效的优点。针对现有算法在处理凹角、倒角和面积剧烈变化区域时，仍存在分块不规则、奇异点难以控制、单元翻转等问题，提出基于中轴的四边形网格生成优化算法。首先分析奇异点分布与无内点三角网格拓扑结构的关系，揭示边界奇异点与顶点邻接Ⅲ类三角形数量的内在联系；然后提出 2 种预处理方案和基于边交换的中轴分块优化算法，提高分块规则性与边界奇异点度的可控性；最后结合边界优先展平算法和整数规划方法，构建适用于复杂 CAD 模型的四边形网格生成流程。在多种模型上和主流方法对比实验的结果表明，所提算法在多边界平面、曲面和特征约束 CAD 模型上均能生成缩放雅可比、最小角等评估指标较高的四边形网格，验证了该算法的有效性。

关键词：中轴；四边形网格；奇异点配置；拓扑操作
中图法分类号：TP391.41 **DOI**：10.3724/SP.J.1089.2025-00374

Optimization of Medial Axis-Based Quadrilateral Mesh Generation

Wang Hao, Zheng Xiaopeng*, Qi Zhihui, Lei Na, and Luo Zhongxuan

(*School of Software, Dalian University of Technology, Dalian* 116024)

Abstract: Quadrilateral mesh generation based on medial-axis partitioning of interior-point-free triangular meshes preserves sharp-angle features with a simple and efficient workflow, yet existing methods still suffer from irregular partitions, unstable singularity placement, and element flips in concave, chamfered, or highly varying regions. This work develops an optimized medial-axis-based framework. By examining the link between singularity distribution and the topology of interior-point-free triangular meshes, the analysis reveals a correspondence between boundary singularities and the number of adjacent type-Ⅲ triangles. Two preprocessing strategies and edge-swapping refinement schemes are introduced to improve partition regularity and control boundary-singularity valence. Integrated with boundary-first flattening and integer programming, the approach forms a complete quadrilateral-mesh generation pipeline for complex CAD models. Experiments on planar, curved, and feature-constrained CAD models, together with comparisons against mainstream techniques, report consistently improved mesh quality in metrics such as scaled Jacobians and minimum angles, confirming the effectiveness of the method.

Key words: medial axis; quadrilateral mesh; singularity configuration; topological operation

收稿日期：2025-09-10；修回日期：2025-11-26。**基金项目**：国家重点研发计划（2024YFC3809502）；国家自然科学基金（62272080）；国家杰出青年科学基金（T2225012）；大连市科技人才创新支持计划（2022RG04）。**王昊**（1994—），男，博士研究生，主要研究方向为四边形网格生成；**郑晓朋**（1987—），男，博士，副教授，硕士生导师，CCF 会员，论文通信作者，主要研究方向为计算共形几何、曲面叶状结构、网格生成；**齐志辉**（1999—），男，博士研究生，主要研究方向为网格生成；**雷娜**（1977—），女，博士，教授，博士生导师，CCF 会员，主要研究方向为计算共形几何、最优传输理论与算法；**罗钟铉**（1966—），男，博士，教授，博士生导师，CCF 会员，主要研究方向为计算几何、计算机视觉、人工智能、水下敏捷机器人。

在某些有限元分析场景中，与三角网格相比，四边形网格在收敛速度、计算稳定性、解精度等方面具有明显优势。在 CAE&CAD 领域，生成满足特征约束的四边形网格至关重要。CAD 模型通常由多个具有不同材料属性的子区域组成，在网格生成过程中保留这些属性对于保持模型的完整性具有重要意义。

在具有原始分块标记的模型中，四边形网格生成流程首先沿着原始特征线将模型划分为若干子区域；然后在每个子区域内分别计算分块，并通过拼接得到模型的整体分块结果；最后通过构造并求解全局整数规划问题[1-2]确定每条分割边界上的离散网格顶点数量，以保证不同子区域之间的格点一致性。在这一过程中，基于中轴的分块算法具有显著的优势：由于分块不会在子区域边界上引入新的顶点，不同子区域的分块结果可以实现无缝拼接，因此该算法特别适用于此类模型的全局四边形布局拓扑划分。值得注意的是，当子区域的几何较为规则时，中轴分块不仅能够生成奇异点数量较少的网格，而且在整体单元质量上也表现出较高的水平。

然而，传统的中轴分块算法的奇异点分布难以控制，导致在复杂特征区域其生成的网格质量显著下降，限制了该算法在实际工程中的应用。例如，在多边界模型的凹角区域，中轴分块可能导致四边形单元出现翻转；在圆弧或倒角区域，难以得到规则的分块结果，同时合理地配置边界处的奇异点也较为困难，如平坦边界可能出现度大于 2 的奇异点，或在凹角处布置度为 2 的规则点。本文对此类问题提出解决方案，并提出针对特征约束复杂的 CAD 模型的四边形网格生成流程，包括如下内容：

（1）定量关系：建立通过中轴分块生成的四边形网格中奇异点配置与无内点三角网格局部结构之间的定量关系，特别是边界顶点周围Ⅲ类三角形的分布情况。

（2）预处理策略：提出 2 种专用的中轴分块前预处理方案，第 1 种用于改善在模型凹角处的奇异点布置，第 2 种使得在缺乏Ⅲ类三角形的模型中依然可以实现有效的分块。

（3）基于边交换的奇异点控制：设计一套基于边交换的拓扑操作，用于调整三角形的类型及其空间排布，最终实现对四边形网格中边界奇异点的精确控制。

（4）面向 CAD 模型的四边形网格生成流程：在现有的表面参数化与网格生成工具，如边界优先展平（boundary first flattening，BFF）算法[3]、整数规划[1-2]和基于模板的四边形网格生成方法[4-5]的基础上，构建一套鲁棒的四边形网格生成流程，能够在复杂且具有特征约束的 CAD 模型上生成高质量的四边形网格。

1 相关工作

Bommes 等[6]对四边形网格生成方法进行了系统的综述，并将四边形网格分为非结构化、半结构化和结构化网格 3 类。其中，半结构化四边形网格因兼顾单元质量与结构化程度，被认为是“在应用中最重要的一类”。基于中轴的四边形网格可以生成半结构化的网格，在相关研究和应用中具有重要的地位。本节介绍当前主流的四边形网格生成方法，包括基于三角网格转化的方法、基于全局参数化的方法和基于分块的方法，并重点讨论基于中轴的四边形网格生成方法。

（1）基于三角网格转化的方法：通过直接将三角网格配对并合并生成四边形网格[7-8]，该类方法实现思路较为直观，并能够有效地保留尖锐特征。为了减少四边形网格中的奇异点数目并提升结构化程度，研究人员提出了多种优化策略，包括基于拓扑操作的组合[9]和模板驱动的方法[10-11]。Gao 等[12]利用 Blossom-Quad 算法[13]生成四边形网格，并结合拓扑优化提升网格的结构化程度，在复杂模型上获得了较好的结果。然而，这类方法生成的网格整体上仍属于非结构化类型，奇异点数量较多。

（2）基于全局参数化的方法：代表性的工作包括 QuadCover[14]和 MIQ[15]，它们通过标架场计算全局无缝参数化，生成四边形网格。后续的研究提出了量化的全局参数化方法[16-19]，将无缝参数化转化为四边形网格。这类方法理论体系完整，且能够生成较高质量的四边形网格，但在实际应用中往往依赖于高质量的标架场[20-22]，而标架场的稳定性取决于输入三角网格的密度与质量。此外，全局参数化的计算通常需要额外的求解器，计算开销较大，并在高度凹陷或多边界模型上的参数化计算可能产生非双射问题。

Lei 等[23-25]和 Zheng 等[26]从共形几何的角度，严格证明了四边形网格与亚纯微分之间的等价关系。基于这一理论框架，可以避免依赖额外求解器直接构造参数化。然而，这类方法在处理复杂特征约束的 CAD 模型时仍然存在一定局限性，实际应用范围尚需要进一步拓展。

（3）基于分块的方法：Campen 等[27]对基于分块方法进行了综述，此类方法通过将模型划分为多个多边形区域，并在每个区域内部生成四边形网格，在网格结构性与单元质量之间取得了良好的折中。当前许多稳定的分块算法依赖标架场，从而对输入网格质量要求较高。Pietroni 等[1]是较为鲁棒的基于分块的四边形网格生成方法，其综合应用对偶环（dual loops）[28]、标架场方法[29]和 LoopyCuts[30]，并结合整数规划与模板方法[5]在不同模型上生成高质量的四边形网格，并提供了开源平台与数据集；然而，其在多边界模型和多特征线约束的 CAD 模型上的表现尚未得到充分验证。蒋鹏等[2]提出一种基于分片的保特征四边形网格生成方法，通过二面角特征将复杂模型划分为多个子区域，并结合交叉场分块与整数规划生成四边形网格，但不同子区域之间的拼接仍然依赖启发式优化与光顺。与文献[2]不同，本文方法在子区域分块时保留原始三角网格顶点信息，在全局范围内构建无缝拼接的四边形网格布局，并通过整数规划保证分区之间格点的一致性。

（4）基于中轴的方法：TopMaker[31]首次将中轴点分类并用于分块，但生成的结构难以直接应用于四边形网格。Frey 等[32]探讨了约束 Delaunay 三角剖分（constrained Delaunay triangulation，CDT）与中轴之间的关系，并提出基于无内点三角网格的中轴分块算法，能够天然地保持模型边界特征，并且在尖锐特征模型上表现良好，但在圆弧、倒角和凹角区域仍然有明显的局限。增强中轴方法[33]结合中轴角，在分块中引入度为 3 的奇异点缓解分块不均匀问题，然而该方法并未揭示奇异点产生的根本原因，且仍然对输入网格质量敏感。Yang 等[34]提出一种保边界的中轴分块方法，通过改进平面分块并结合模板生成四边形网格，但其内部奇异点的数量依赖所选模板，难以严格地控制。

综上所述，三角网格转四边形网格的方法实现简洁但奇异点较多；全局参数化方法体系完整，但计算代价高且鲁棒性不足；分块方法可以在网格的结构化程度与网格单元质量之间取得平衡；中轴算法具有天然地保持边界特征和顶点数不变的优势，但是在奇异点可控性和复杂区域的质量保持上仍有不足。本文针对基于无内点三角网格的中轴分块算法所存在的问题提出改进方案，提出 2 种预处理方案和基于无内点三角网格边交换的奇异点优化策略，有效地提升了中轴分块的规则性与边界奇异点度的可控性，为生成复杂 CAD 模型的高质量四边形网格提供支持。

2　中轴分块奇异点配置

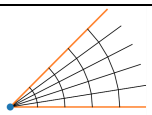
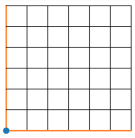
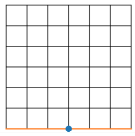
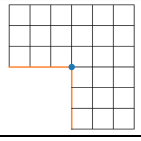
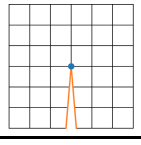
2.1　四边形网格基础

（1）四边形网格：设 Σ 是一个拓扑曲面，Q 是 Σ 的单元划分，若 Q 中所有单元均为四边形单元，则称 $M(\Sigma,Q)$ 是一个四边形网格。设 Q 中的顶点数、边数与面数分别为 V、E 和 F，则欧拉公式 $V-E+F=\chi(\Sigma)$ 成立；其中，$\chi(\Sigma)$ 表示曲面 Σ 的欧拉示性数。在四边形网格中，某个顶点的拓扑度指其邻接的四边形单元的个数。

（2）奇异点：设 $M(\Sigma,Q)$ 为一个四边形网格，若某内部顶点被恰好 4 个四边形单元围绕，则称其为规则点；否则，称其为奇异点。若某个边界顶点恰好邻接 2 个四边形单元，则该顶点为规则点；否则，为奇异点。

四边形网格中奇异点越少，其结构化程度越高。然而由于拓扑限制，并非所有平面模型都能生成完全结构化（即无奇异点）的四边形网格。此外，少量奇异点的引入有助于提升网格质量，因此，调整奇异点的度与位置尤为关键。已知一个边界顶点 v 的最优度 $D(v)$ 可由其相邻 2 条边之间的夹角 θ 决定，如表 1 所示。特别地，当 $\theta(v)<\pi/4$ 时，为生

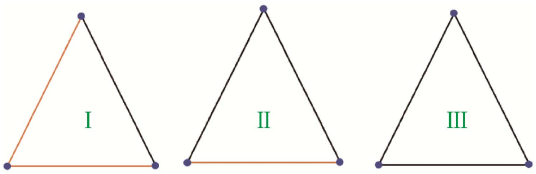
表 1　四边形网格边界顶点的最优度配置

$\theta(v)$	$D(v)$	对应四边形网格
$(0,\pi/4]$	0	
$(\pi/4,3\pi/4]$	1	
$(3\pi/4,5\pi/4]$	2	
$(5\pi/4,7\pi/4]$	3	
$(7\pi/4,2\pi]$	4	

成纯四边形网格，需要在该位置放置一个四边形单元。为了统一术语，定义如下顶点分类方式：（1）若期望在顶点 v（$\theta(v)\in(0,3\pi/4]$）放置一个四边形单元，则称 v 为锐角顶点；（2）若期望布置 2 个四边形单元（$\theta(v)\in(3\pi/4,5\pi/4]$），称为平角顶点；（3）若需要布置 3 个及以上四边形单元（$\theta(v)\in(5\pi/4,2\pi]$），称为凹角顶点。

2.2 基于无内点三角网格的中轴划分

中轴基于无内点的三角网格计算，首先按照三角形拥有的边界边数将其划分为 Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ这 3 类，如图 1 所示。其中，黑色的边表示内部边，橙色的边表示边界边，拥有 2 条边界边的三角形被归类为 Ⅰ 类三角形，拥有 1 条边界边的为 Ⅱ 类三角形，不含边界边的为Ⅲ类三角形。



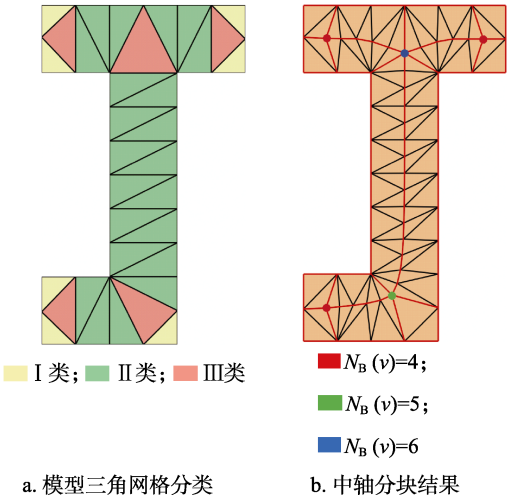
a. Ⅰ类 b. Ⅱ类 c. Ⅲ类

图 1 平面无内点三角剖分中的三角形分类

在中轴计算过程中，首先将所有Ⅲ类三角形细分为 3 个三角形，产生 3 条新的内部分割边，将其视作初始的分割线；然后对于Ⅲ类三角形的每条边执行一次追踪操作，该三角形沿边进入相邻三角形，若相邻的三角形为 Ⅱ 类三角形，则记录进入的边，并通过识别当前 Ⅱ 类三角形中的另一条内边进入与该边相邻的三角形。该过程持续迭代，直到满足以下任一终止条件：（1）若追踪路径到达另一个Ⅲ类三角形，则将记录的所有边在中点处进行切分，形成一条连接 2 个Ⅲ类三角形重心的中轴追踪线；（2）若路径到达 Ⅰ 类三角形，则不再添加新的中轴线段，此时，切分Ⅲ类三角形的 3 条分割边与模型边界自然围成一个子分块。图 2 所示为中轴分块示意图，展示了网格的三角形分类及其诱导的中轴分块结构。

2.3 中轴分块中的奇异点配置

使用中轴分块生成四边形网格的过程中，通常在每个分块的角点处放置一个四边形单元，每个分块可以是三边形至六边形。因此，围绕某个顶点的分块数量（记作 $N_B(v)$）等于该顶点在生成的四边形网格中的度。基于这一观察，进一步分析中轴方法生成四边形网格时的奇异点配置。



a. 模型三角网格分类 b. 中轴分块结果

图 2 中轴分块示意图

（1）内部奇异点：在中轴追踪过程中，当从一个Ⅲ类三角形重心出发的追踪路径连接到另一个Ⅲ类三角形的重心时，在 2 个重心之间形成一条分割线，该中轴连接使得每个重心周围的分块数增加 2。若一个Ⅲ类三角形的 3 条追踪路径均连接到其他Ⅲ类三角形，则在其重心处形成一个度为 6 的奇异点；若仅有 2 条路径连接到Ⅲ类三角形，则形成度为 5 的奇异点；若仅有 1 条路径连接至Ⅲ类三角形，则其重心处为一个度为 4 的规则点。中轴分块算法无法生成度小于 4 的奇异点，可能导致网格单元尺寸分布不均匀，这是制约基于中轴的四边形网格生成算法的主要缺陷之一。

（2）边界奇异点：在计算中轴时，若某个边界顶点 v 是一个 Ⅰ 类三角形的角点，即恰好连接 2 条边界边的顶点，则该顶点仅被一个分块包围，因而在最终生成的四边形网格中对应一个度为 1 的奇异点。如果 v 属于一个或多个Ⅲ类三角形，在分块过程中，每个与 v 相邻的Ⅲ类三角形都将引入一条从 v 到该三角形重心的分割线，每增加一个Ⅲ类三角形就会增加一个包围 v 的分块。因此，若某边界顶点 v 相邻 $N_{\text{typeIII}}(v)$ 个Ⅲ类三角形，则围绕 v 的分块总数为 $N_B(v)=N_{\text{typeIII}}(v)+1$。需要注意的是，若顶点 v 不作为任意Ⅲ类三角形的顶点，则该顶点在中轴分块中将不会被任何分块包围，意味着该顶点的位置将在后续的四边形网格采样过程中被忽略。该分析建立了无内点三角剖分中某顶点的相邻Ⅲ类三角形数量与其在中轴分块中所对应的分块数（即 $N_B(v)$）之间的直接关系，该关系表示为

$$N_B(v)=\begin{cases}1, & \text{if } v\text{是I类三角形的角点}\\ N_{\text{typeIII}}(v)+1, & \text{if } v\text{是相邻III类三角形}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \quad (1)$$

图 3 所示为将无内点平面三角网格中三角形的顶点与中轴分块结果中对应的顶点进行对应匹配的结果。

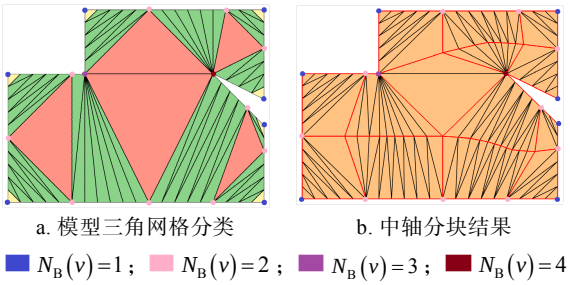
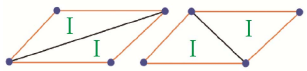
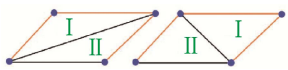
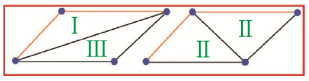
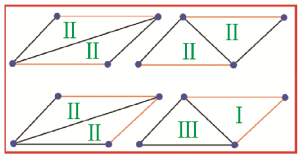


图 3　三角网格与分块结果的顶点对应关系

2.4　无内点三角网格上的边交换操作

中轴算法根据三角形拥有的边界边的数量将其分为 3 类。进一步，根据某条内部边两侧三角形的类型，以及该边两端顶点周围边界边的分布，可枚举出 9 种不同类型的内部边。本文对边交换操作如何影响共享内部边两侧三角形的分类进行分析，如表 2 所示。可以观察到以下规律：（1）当相邻三角形为 I 类和III类时，对它们的共享边执行边交换操作，可将其转换为 2 个 II 类三角形；反之则不一定成立，如红色框标注的 2 个例子所示。（2）其他类型的边交换操作不会改变共享边两侧三角形的类型，但会改变顶点周围三角形类别的分布。因此，在一个无内点平面三角网格上，通过组合边交换操作可以实现以下功能：（1）在 I 类和III类三角形之间的 II 类三角形上进行边交换操作，可同时消除这 2 个 I 类和III类三角形；（2）在顶点邻域内对 II 类三角形的内部边进行边交换操作，调控边界顶点周围三角形类型分布。这种基于边交换的操作机制，为基于中轴的四边形网格生成中的边界奇异点控制提供了可能。

表 2　边交换对三角形分类的影响

分类	分类 I	分类 II	分类 III
I			
II			
III			

3　分块优化算法

本节介绍 2 类中轴划分前的预处理操作：伪凸分解预处理和针对无III类三角形三角网格的预处理；然后针对传统中轴分块可能存在的 3 个典型问题提出相应的改进方案，包括无法有效地处理圆弧与倒角模型、在平坦区域可能产生度大于 2 的奇异点，以及凹角处奇异点的度难以控制。

3.1　伪凸分解预处理

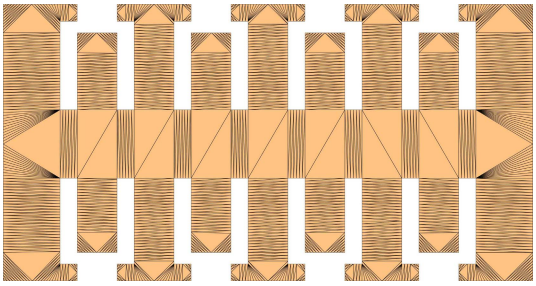
中轴分块算法无法生成度小于 4 的内部奇异点，当输入模型包含面积变化显著的区域时，该限制可能导致生成翻转的四边形单元；此外，传统的中轴算法在保留模型中凹角特征方面也存在固有的困难。为了缓解这些问题，本文利用无内点平面三角剖分的结构特性提出一种伪凸分解策略，在选定的凹角处引入切割边，不是将区域完全凸化，而是隔离面积变化显著的区域，促使更为规则的中轴分块生成，本文将其称为伪凸分解策略。

对于给定的无内点平面三角剖分 M，首先识别出凹角点（满足 $\theta(v)\in(5\pi/4,2\pi]$）。对于每个凹角顶点 v_c，遍历所有非边界相邻边 $e(v_c,v_p)$。若 v_p 也是凹角顶点，则直接将 $e(v_c,v_p)$ 作为分割边，并将这 2 个凹角顶点转化为凸角顶点；若 v_p 不是凹角点，则该候选边 e 在 v_p 处分别与其左右两侧的边界边构成角度 θ_L 和 θ_R，最优的分割边选择原则是尽可能靠近平角（垂直）方向，即

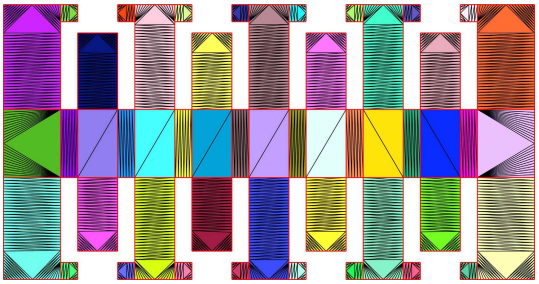
$$\min\left(|\theta_L-\pi/2|+|\theta_R-\pi/2|\right)。$$

上述方法可以实现对模型的简洁凸性分解，并作为无内点三角网格中轴计算的预处理步骤。平面模型的伪凸分解结果如图 4 所示。可以看出，通过

引入这些分割边，可以将几何结构复杂的模型进一步分解为多个子区域，并在每个子区域上独立地执行中轴分块操作，有助于缓解传统中轴算法在处理凹角与面积变化区域方面的局限性。



a. 平面三角网格剖分



b. 伪凸分解结果

图 4 平面模型的伪凸分解

需要注意的是，每条插入的分割边都将成为子网格的边界之一。为了保证每个子域都可以进行有效的中轴划分，建议将新增边进一步细分，使其长度尽可能地接近原始边界边的平均长度。此外，对得到的子网格应用 Lawson 边交换操作[35-36]，以满足 Delaunay 条件并提升三角剖分的质量，为中轴计算提供更优的基础。由于在伪凸分解过程中仅选择内部边作为分割边界，因此该方法不会在原始边界上引入新的顶点；然而，这种分割会将一个凹角拆解为 2 个凸角，而在分割角度误差引入的凹点处目标奇异点的度会发生变化。例如，当某一顶点的周角和为 $3\pi/2$ 时，按照表 1 中的规则应在该顶点放置一个度为 3 的奇异点，但是若该凹角被分割为 2 个 $3\pi/4$ 的凸角，则在后续的网格生成中，该分割边的左右两侧会分别放置度为 1 的奇异点。为了避免此类角度分割引入的奇异点度偏差，后续算法中将顶点处的奇异点度作为强约束条件，限制后续凹角处顶点的边交换操作。

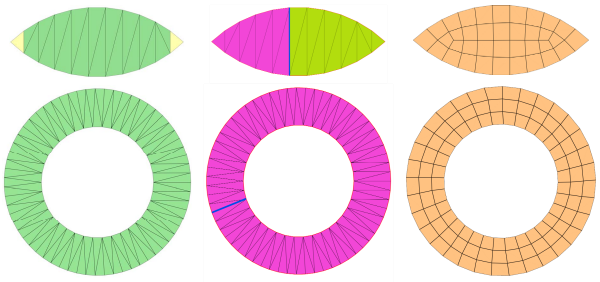
3.2 无Ⅲ类三角形三角网格的预处理

对于不包含内部Ⅲ类三角形的平面模型（如环形结构或楔形结构），本文提出一种基于“选取最垂直于边界的内部边”的分割策略，所选边能够自然地将环形模型划分为拓扑圆盘，将楔形模型划分为 2 个三角形。

为了量化边与边界之间的垂直性，定义一个度量函数 $\delta(e)$，表示候选边 e 与相邻边界边之间的角度偏差，候选边与其两端顶点处相邻边界边形成的 4 个夹角 θ_i 与 $\pi/2$ 的平均差值为

$$\delta(e)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\left|\theta_i-\frac{\pi}{2}\right|。$$

最优的分割边应当最小化 $\delta(e)$，以保证其在 2 个方向上尽可能垂直于边界。无内部Ⅲ类三角形模型的分割结果，以及通过整数规划与模板方法相结合生成的四边形网格结果如图 5 所示，其中，蓝色边表示插入的分割线。



a. 三角网格分类 b. 分块结果 c. 四边形网格

图 5 针对无内部Ⅲ类三角形模型的分割结果

3.3 圆弧与倒角区域的边交换

当前，现有的中轴算法在处理带有圆弧或倒角特征的模型时难以生成令人满意的分块结果，原因是无内点网格上的 CDT 遵循“最大化最小角”的原则，在只有边界顶点、无内部采样时，这一特性容易在边界处生成边界角超过 $3\pi/4$ 的Ⅰ类三角形，而这类钝角配置往往在边界顶点处诱导出度为 1 的奇异点，严重影响中轴分块的规则性和后续四边形网格的质量。为此，需要在分块阶段移除这些Ⅰ类钝角三角形。结合第 2.4 节的分析可知，当从一个Ⅰ类三角形的内部边出发执行边交换操作时，操作会沿着Ⅱ类三角形的内部边逐步传递，直至另一端遇到一个Ⅲ类三角形的内部边。该情形下，可以同时消除Ⅰ类与Ⅲ类三角形，而路径上仅有的Ⅱ类三角形连接关系被更新。由于Ⅱ类三角形的数量是有限的，且每次操作都会消除 1 个Ⅰ类三角形和 1 个Ⅲ类三角形，因此该过程必然在有限步内终止，并且不会影响其他区域的三角形类型分布，保证了操作的收敛性与局部性。

在圆弧形状模型中，删除钝角Ⅰ类三角形的处理过程如图 6 所示。其中，图 6a 中包含钝角Ⅰ类

三角形的圆弧几何结构，红色边表示待执行边交换的边；图 6b 所示为通过边交换删除钝角 I 类三角形后的结果。移除 I 类三角形的方法的步骤如下：

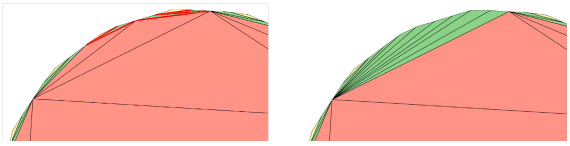
输入：平面无内点三角网格。

输出：边交换之后的平面无内点三角网格。

Step1：对于一个 I 类三角形，若其由 2 条边界边构成的顶点角为钝角，则选取其内部边 e。

Step2：从 e 出发向外遍历相邻三角形，直至遇到某条属于III类三角形的边；并记录遍历路径上的所有内部边。

Step3：对记录的边执行边交换操作。



a. 边交换前的网格剖分　　b. 边交换后的网格剖分

图 6　弧形模型中消除钝角 I 类三角形的处理过程

通过上述步骤可逐步移除钝角 I 类三角形。每当一个 I 类三角形被移除时，通常也会相应地移除一个III类三角形。因此在处理包含圆弧和倒角特征的无内点平面三角网格时，当仅剩 2 个III类三角形时即终止移除操作，此时已足以支持中轴追踪的正常进行。

此外，移除 I 类三角形的方法也可能产生某条边两侧均为III类三角形的情况，此时直接对该边进行边分割操作，生成的 4 条新边作为模型中的分割线，在后续四边形网格生成过程中，钝角 I 类三角形的顶点不再被当作分块的角点，因此圆弧或倒角部分被看作具有 3 个角点的扇形，分块结果如图 7c 所示，其四边形网格结果如图 7d 所示。

3.4　平角边界顶点的边交换

使用中轴生成四边形网格的过程中，在平角顶点（$\theta(v)\in(3\pi/4,5\pi/4]$）处应放置度为 2 的规则点，然而，仅依靠 CDT 无法保证在平角顶点处的III类三角形数量不超过 1。因此，当某个平角边界点被 2 个及以上III类三角形包围时，需要通过拓扑操作移除多余的III类三角形。该过程可以通过对相关III类三角形的内部边执行边交换，从而改变其顶点的连接关系来实现。针对平角顶点，移除多余III类三角形方法的步骤如下：

输入：平面无内点三角网格。

输出：边交换之后的平面无内点三角网格。

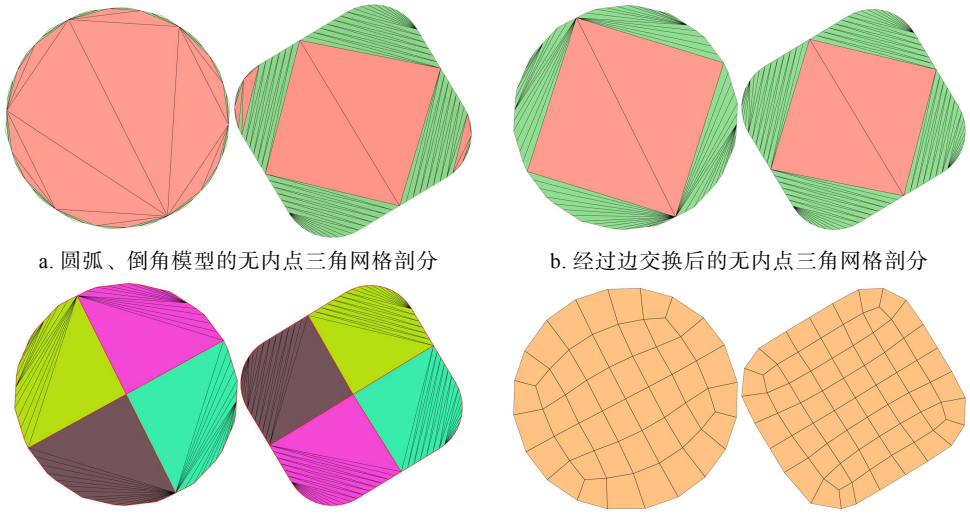
Step1：沿逆时针（或顺时针）方向遍历与 v_f 相连的所有内部边，直至找到一条属于III类三角形的最逆时针（或最顺时针）边 e。

Step2：找到目标内部边 e 之后，对遍历路径上逆时针（或顺时针）位于 e 之后的所有内部边依次执行边交换操作，直至到达边界。

移除平角边界顶点附近多余III类三角形的步骤如图 8 所示，其中，红色的边表示需要被交换的边。该操作前后在无内点平面三角网格上的中轴分块结果如图 9 所示，可以看出，图 9a 所示红框处，平角边界顶点被 3 个分块包围。

3.5　凹角边界顶点的边交换

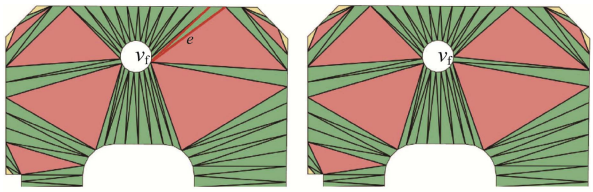
根据式（1），在基于中轴的四边形网格生成过程中，若需要在某个凹角处放置一个度为 $N(N>1)$ 的顶点，则必须在该凹角顶点处聚集 $N-1$ 个III类



a. 圆弧、倒角模型的无内点三角网格剖分　　b. 经过边交换后的无内点三角网格剖分

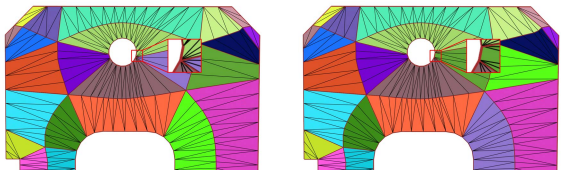
c. 模型分块结果　　d. 四边形网格生成结果

图 7　针对含圆弧与倒角特征模型的分块过程



a. 边交换前的网格剖分　　b. 边交换的后网格剖分

图 8　平角边界顶点处移除多余III类三角形



a. 边交换前　　b. 边交换后

图 9　平面三角网格的中轴分块结果

三角形。在凹角顶点处聚集III类三角形的方法的步骤如下：

输入：平面无内点三角网格。

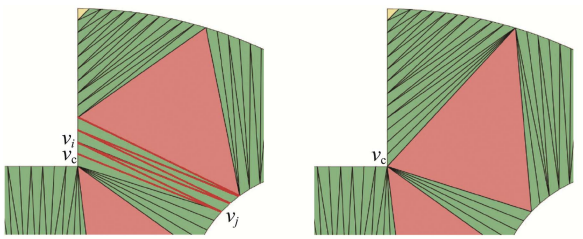
输出：边交换之后的平面无内点三角网格。

Step1：从凹角点 v_c 出发，沿边界两侧依次遍历顶点 v_i，并分别记录两侧的候选边。当遇到一个 v_i 为 II 类三角形的顶点时，将对应的边 $e(v_i,v_j)$ 记录到对应方向的候选边集合；持续该过程，直至遇到一个属于III类三角形的顶点。

Step2：根据希望在凹角 v_c 处设置的邻接III类三角形的个数，从候选边集合中选择并执行边交换操作。

在凹角顶点处聚集III类三角形的过程图 10 所示，图 10a 中，红色标记的边表示需要进行边交换的边。该操作可以视为第 3.4 节方法的一种逆操作，不同的是，本节方法是针对位于 2 个III类三角形之间的 II 类三角形，其内部边被作为交换对象，而第 3.4 节的方法则是对III类三角形最外侧边及其相邻边进行交换（如图 8 中的边 e 所示）。需要指出的是，这 2 种方法并不相互矛盾，而是互为补充；同时，它们仅影响交换路径上 II 类三角形的连接关系与对应III类三角形的形状与顶点连接方式，不会对其他区域的III类三角形分布产生影响。

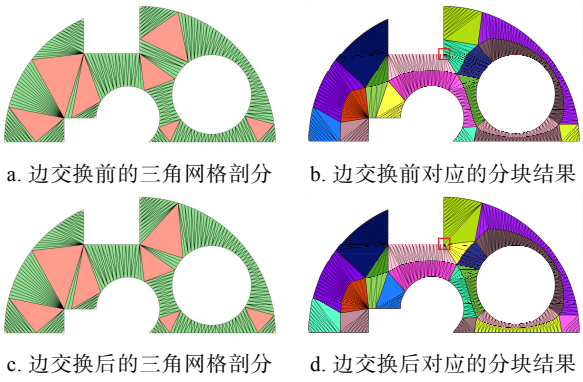
在凹角附近聚集III类三角形前后，三角形类型



a. 边交换前的三角网格剖分　　b. 边交换后的三角网格剖分

图 10　在凹角顶点处聚集III类三角形示意图

及其对应的中轴分块结果如图 11 所示。可以看出，图 11b 的红框部分，原始的无内点三角剖分在该凹角处生成了一个度为 2 的顶点；本文算法则在相同位置引入一个度为 3 的奇异点，如图 11d 中红框部分所示。



a. 边交换前的三角网格剖分　　b. 边交换前对应的分块结果

c. 边交换后的三角网格剖分　　d. 边交换后对应的分块结果

图 11　在凹角处聚集III类三角形对中轴分块的影响

4　四边形网格生成流程

本文利用 BFF 算法将平面中轴推广到曲面，并构建面向特征约束 CAD 模型的四边形网格生成流程。

4.1　从平面中轴推广到曲面

中轴算法最初是为无内点的平面三角网格设计的。为了在曲面模型上计算中轴分割，一个直观的思路是：首先在保持原始曲面拐角特征的前提下将其映射到平面，然后在平面域中计算中轴，最后通过逆映射将平面中轴分割结果投影回原始曲面。目前，已有多种针对多边界曲面的共形映射方法，其中常用的线性方法有最小二乘共形映射（least squares conformal mapping，LSCM）算法[37]和 BFF 算法。然而在实际应用中，如果面片的曲率变化较大，LSCM 算法可能生成非双射的参数化结果。在原始曲面三角网格无翻转的前提下，与 LSCM 算法相比，BFF 算法能够稳定地将此类模型映射到平面，因此本文使用 BFF 算法作为映射方法。

为了实现曲面的中轴分块计算，首先对输入网格 M（可能具有多个边界）应用 BFF 算法[37]，将其展平到平面参数域 M_{BFF} 上；然后基于 M_{BFF} 的边界顶点和边构造 M_{CDT}，并在该无内点三角网格上应用改进的中轴算法，计算出中轴分块 M_{seg}。为了保留原始曲面上的几何信息，将计算得到的 M_{seg} 投影到 M_{BFF} 上，再通过 BFF 算法的逆映射将其投影回原始曲面网格上，最终得到与曲面几何保

持一致的中轴分块结构。从平面中轴分块扩展到曲面模型的完整流程如图 12 所示。

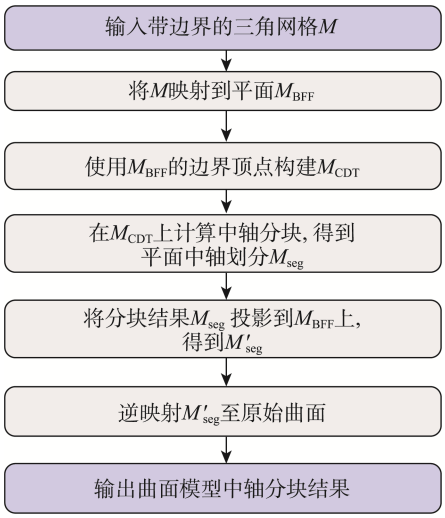


图 12　将平面中轴分块扩展至曲面模型的流程

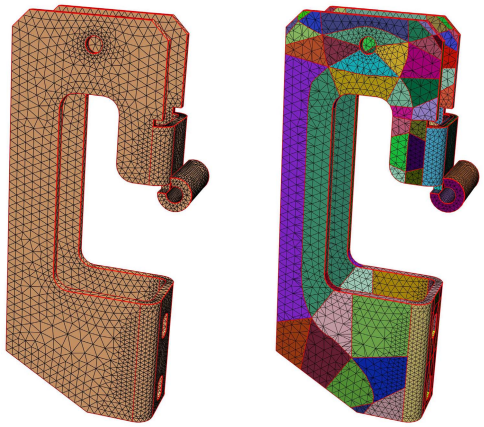
4.2　四边形网格的生成流程

对于由样条曲面生成的三角网格，可以保留原始 CAD 模型中的区域划分特征。据此，四边形网格的生成流程如下。

Step1：将输入网格划分为多个子区域，每个子区域对应一个样条面片，且可能包含多个边界，可以通过三角面片的广度优先遍历算法实现。当原始模型中不存在 CAD 模型的分块信息时，可以根据三角网格中的二面角提取模型的初始分块，如蒋鹏等[2]提出的特征提取算法。

Step2：对每个子区域分别应用第 4.1 节的中轴分块流程：保留每个子区域的边界顶点，同时保留不同子区域边界顶点的关联信息，而中轴分块算法保证不会在子模型的边界上引入额外的顶点。因此分块完成后，子区域分块之间的拼接复杂度为 $O(1)$，且不同子域上分割后的模型可以无缝拼接，得到模型的全局划分结果。该分块流程在 CAD 模型上的应用结果如图 13 所示。值得注意的是，如果某个区域不包含凹角且恰好具有四个凸边界顶点，则该区域被判定为一个四边形区域，此时无需执行额外的分块操作。

在整体框架中，本文方法首先通过构造并求解整数规划问题，得到尽可能接近原始模型度量的四边形顶点数目，在保证不同子分块之间全局格点划分一致性的同时有效地降低生成四边形网格的面积畸变；然后将中轴分块得到的每个子分块通过调和映射[38]映射到平面。由于调和映射是一个线性的映射方法，计算过程高效，因此不会带来过多的额外开销。在平面上，采用模板驱动的四边形网格生成方法[4-5]为每个子分块生成网格，再将平面分块结果逆映射回曲面，并在全局范围内进行无缝拼接，最终得到满足特征约束的高质量四边形网格。关于四边形网格边界采样与整数规划方法的更多细节详见文献[1-2]。



a. 输入三角网格　　b. 模型分块结果

图 13　CAD 模型的中轴分块结果

5　实验及结果分析

本文在多种模型上开展实验。（1）在若干具有复杂特征平面的模型上，将本文算法与 Pietroni 等[1]方法生成的四边形网格结果，以及基于本文提出的分块策略生成的四边形网格与基于传统中轴分块算法生成的四边形网格在网格质量方面的表现进行实验。（2）在多边界曲面模型上对本文算法的有效性进行实验。（3）在特征约束 CAD 模型上展示本文算法的四边形网格生成结果。采用最小缩放雅可比值 $J_{\min}$、最小角度 $\theta_{\min}$、最大长宽比 $\delta_{\max}$ 和奇异点个数 $\#s$ 作为四边形网格质量的评估指标。所有实验均在一台配备 Intel i7-8750H CPU、32 GB 内存的笔记本电脑上完成。

5.1　对比实验

为了验证改进的中轴分块算法相较传统算法的提升效果，采用传统中轴分块算法生成测试模型的四边形网格；进一步，将本文算法与 Pietroni 等[1]方法生成四边形网格进行对比实验。3 种方法生成四边形网格的结果对比如表 3 所示，为了排除网格密度对网格质量的影响，均生成了其单元数目规模相当（$\#F$ 表示面数）的四边形网格，量化对比结果如表 4 所示。

从表 4 可以看出：（1）传统中轴算法在模型 4 和模型 5 中生成的四边形网格虽然奇异点数量最少，但是由于无法在凹角处引入合适的奇异点来保持几何特征，网格质量明显下降，在某些模型中甚

表 3　3 种方法生成四边形网格结果对比

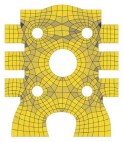
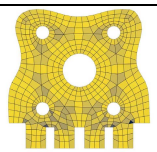
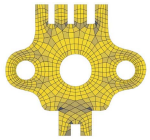
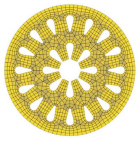
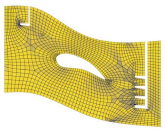
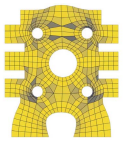
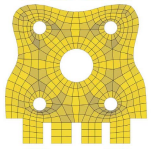
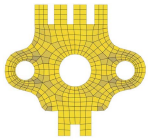
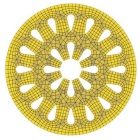
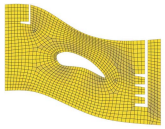
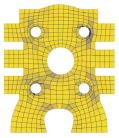
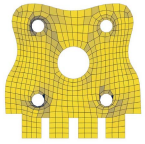
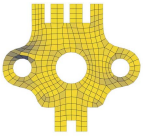
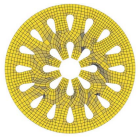
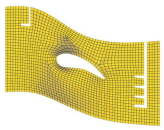
方法	模型 1	2	3	4	5	6
传统中轴法[32]						
本文						
Pietroni 等[1]						



表 4　3 种方法生成四边形网格质量对比

模型	传统中轴算法[32]					本文					Pietroni 等[1]				
	$\#F$	$J_{\min}$	$\theta_{\min}$	$\delta_{\max}$	$\#s$	$\#F$	$J_{\min}$	$\theta_{\min}$	$\delta_{\max}$	$\#s$	$\#F$	$J_{\min}$	$\theta_{\min}$	$\delta_{\max}$	$\#s$
1	217	0.55	46.3	3.5	17	238	**0.75**	**49.9**	4.5	19	205	0.55	36.4	**3.3**	**16**
2	612	0.18	**39.4**	**2.3**	**42**	535	**0.33**	28.5	3.4	**42**	525	–0.41	1.1	55.3	52
3	519	–0.17	38.3	2.3	**32**	427	**0.69**	**45.9**	**1.9**	**32**	558	–0.42	6.3	41.2	40
4	655	0.29	40.9	2.3	**28**	417	**0.75**	**48.7**	**2.2**	32	338	0.30	30.0	2.3	36
5	1292	0.71	50.3	1.8	**56**	1451	**0.76**	**51.9**	**1.5**	96	1377	0.29	32.2	2.6	107
6	1598	–0.20	26.5	2.6	37	1393	**0.78**	**53.7**	2.1	36	1709	0.65	43.5	**1.6**	**34**

注：粗体表示最优值。

至出现了负的雅可比值（如模型 3 的 $J_{\min}=-0.17$，模型 6 的 $J_{\min}=-0.2$），对应网格中存在翻转或退化单元；本文算法在拐角处主动引入度为 3 或 4 的边界奇异点，改善凹角区域的分块结构，显著地提升了整体网格的质量。需要指出的是，根据高斯-伯纳特定理，在边界凹角处引入度为 3 或 4 的奇异点时，必然会在内部区域引入若干度为 3 奇异点。因此，与传统方法相比，本文算法在提升网格单元质量的同时也增加了奇异点的数量。(2)与 Pietroni 等[1]的方法相比，本文算法在网格单元质量方面更具优势；Pietroni 等[1]的方法由于在圆弧或曲率变化较大的区域分块大小不均匀，生成的四边形网格中容易产生重畸变单元，如模型 2 和模型 3 中，该方法生成的网格出现了负的雅可比值（分别为–0.41 和–0.42），表明局部存在翻转单元；本文算法在相同条件下均保证 $J_{\min}>0$，网格单元的整体质量更稳定。

5.2　带边界约束的曲面模型

在多边界曲面模型上进行实验，验证第 4.1 节中提出的将平面中轴分块扩展至曲面模型的流程。（1）利用 BFF 算法将曲面映射至平面，在平面上执行优化后的中轴分块操作，并将分块结果映射回曲面以生成四边形网格。以汽车曲面模型为例，该模型包含多个表面积变化显著的区域（如 A 柱附近），四边形网格生成结果如图 14 所示。可以看出，本文提出的伪凸分解策略能够有效地对这些区域进行合理分块，其中，四边形单元数为 5957，$J_{\min}=0.72$。（2）将该方法推广应用于 220 个边界的曲面模型，并成功地生成了对应的四边形网格，其 $J_{\min}=0.47$，如图 15 所示。

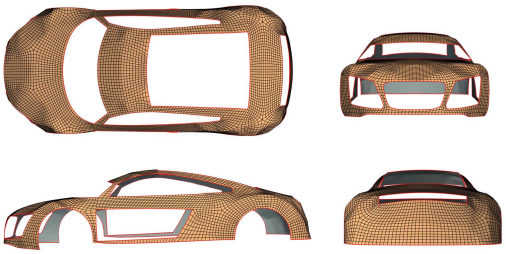


图 14　多边界汽车曲面四边形网格生成结果

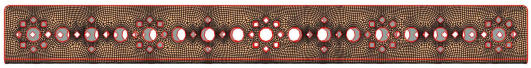


图 15　220 个边界曲面模型的四边形网格生成结果

5.3　带特征约束的 CAD 模型

在一组带有特征约束的 CAD 模型以及复杂的平面模型上，评估中轴分块与四边形网格生成方法的有效性和鲁棒性，结果如图 16 所示。进一步，对图 16 中每个模型的性能进行实验，包括每个模型的 $\#F$ 、中轴分块时间 T_{seg} 、四边形网格生成时间 T_{quad} 和总计算时间 T_{total} ，网格质量通过 $J_{\min}$ 和平均缩放雅可比值 J_{avg} 评估，结果如表 5 所示。可以看出，在网格质量方面，所有模型的 J_{avg} 均高于 0.91，部分模型（如模型 8、模型 9 和模型 12）甚至超过 0.98，说明整体网格变形较小，单元质量较高，有效地避免了极度压缩或翻转单元的出现。实验结果表明，本文算法在多种规模与复杂结构 CAD 模型上均表现出稳定的生成效率和较高的四边形网格质量，体现出良好的鲁棒性和实用性。



a. 模型 7　b. 模型 8　c. 模型 9　d. 模型 10

e. 模型 11　f. 模型 12　g. 模型 13　h. 模型 14

i. 模型 15　j. 模型 16　k. 模型 17　l. 模型 18

图 16　特征约束 CAD 模型的四边形网格生成结果

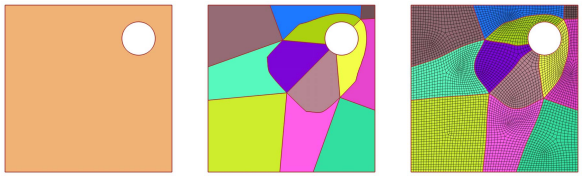
表 5　图 16 中 12 个模型四边形网格性能对比

模型	$\#F$	T_{seg}/s	T_{quad}/s	T_{total}/s	$J_{\min}$	J_{avg}
7	12428	1.44	10.11	11.55	0.64	0.95
8	15062	2.03	5.90	7.93	0.72	0.99
9	14155	3.24	57.60	60.84	0.54	0.98
10	11453	7.23	46.82	54.05	0.58	0.91
11	3038	1.07	18.51	19.58	0.73	0.92
12	28870	12.01	11.63	23.64	0.65	0.99
13	24193	11.03	32.64	43.67	0.58	0.96
14	82306	3.24	27.64	30.88	0.67	0.97
15	2854	5.46	35.56	41.02	0.62	0.95
16	10239	7.36	55.21	62.57	0.67	0.94
17	13574	9.21	43.37	52.58	0.71	0.95
18	19303	13.37	72.40	85.77	0.66	0.94

6 结 语

针对传统基于中轴分块的四边形网格生成算法存在的结构不规则、奇异点难以控制等问题，本文从理论上分析了奇异点配置与无内点三角网格之间的对应关系，提出伪凸分解等预处理策略和基于边交换的中轴优化策略，实现了分块结构的稳定化与边界奇异点的可控性；在此基础上，构建一套面向复杂 CAD 模型的特征约束四边形网格生成流程，通过整数规划确保全局格点划分一致性，并结合调和映射和模板方法生成四边形网格。

尽管本文算法在奇异点控制和网格质量方面取得了较好的效果，但是仍然存在一些局限性：(1)伪凸分解策略虽然能够有效地分割大面积区域，但是在如图 17 所示的几何分布高度不均匀的模型中，中轴分块仍然难以精确地控制内部奇异点的位置，不同分块之间尺寸差异显著；即使结合模板方法能够在一定程度上缓解面积畸变问题，也会引入更多奇异点，削弱整体网格的结构化程度与质量。(2)当原始模型的三角网格中存在翻转或模型具有较大曲率变化时，BFF 参数化可能会在映射过程中产生翻转或自交，参数域失效，影响整个方法的稳健性。



a. 输入模型几何 b. 分块结果 c. 四边形网格

图 17 几何分布不均匀模型的分块与四边形网格生成

未来，将改进分块策略，使本文算法能够在降低分块个数的同时，提升不同分块大小之间的均衡性，并降低单个分块长宽比，进一步提升整体四边形网格的质量。

参考文献（References）：

[1] Pietroni N, Nuvoli S, Alderighi T, *et al*. Reliable feature-line driven quad-remeshing[J]. ACM Transactions on Graphics, 2021, 40(4): Article No.155

[2] Jiang Peng, Qi Long, Wu Haiyan, *et al*. Feature-preserving structured mesh generation method based on patch-wise parameterization[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2024, 36(8): 1286-1297(in Chinese)
(蒋鹏, 齐龙, 吴海燕, 等. 基于分片参数化的保特征结构化网格生成方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2024, 36(8): 1286-1297)

[3] Sawhney R, Crane K. Boundary first flattening[J]. ACM Transactions on Graphics, 2018, 37(1): Article No.5

[4] Tarini M. Closed-form quadrangulation of *n*-sided patches[J]. Computers & Graphics, 2022, 107: 60-65

[5] Takayama K, Panozzo D, Sorkine-Hornung O. Pattern-based quadrangulation for *N*-sided patches[J]. Computer Graphics Forum, 2014, 33(5): 177-184

[6] Bommes D, Lévy B, Pietroni N, *et al*. Quad-mesh generation and processing: a survey[J]. Computer Graphics Forum, 2013, 32(6): 51-76

[7] Lee Y K, Lee C K. Automatic generation of anisotropic quadrilateral meshes on three-dimensional surfaces using metric specifications[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53(12): 2673-2700

[8] Owen S J, Staten M L, Canann S A, *et al*. Q-Morph: an indirect approach to advancing front quad meshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 44(9): 1317-1340

[9] Feng L M, Tong Y Y, Desbrun M. Q-zip: singularity editing primitive for quad meshes[J]. ACM Transactions on Graphics, 2021, 40(6): Article No.258

[10] Verma C S, Suresh K. A robust combinatorial approach to reduce singularities in quadrilateral meshes[J]. Computer-Aided Design, 2017, 85: 99-110

[11] Verma C S, Suresh K. αMST: a robust unified algorithm for quadrilateral mesh adaptation in 2D and 3D[J]. Computer-Aided Design, 2018, 103: 47-60

[12] Gao J C, Xiao Z F, Xu C H, *et al*. Quadrilateral surface mesh generation with improved quality by combination of triangles[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2024, 125(16): Article No.e7539

[13] Remacle J F, Lambrechts J, Seny B, *et al*. Blossom-Quad: a non-uniform quadrilateral mesh generator using a minimum-cost perfect-matching algorithm[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2012, 89(9): 1102-1119

[14] Kälberer F, Nieser M, Polthier K. QuadCover - Surface parameterization using branched coverings[J]. Computer Graphics Forum, 2007, 26(3): 375-384

[15] Bommes D, Zimmer H, Kobbelt L. Mixed-integer quadrangulation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2009, 28(3): Article No.77

[16] Bommes D, Campen M, Ebke H C, *et al*. Integer-grid maps for reliable quad meshing[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(4): Article No.98

[17] Campen M, Bommes D, Kobbelt L. Quantized global parametrization[J]. ACM Transactions on Graphics, 2015, 34(6): Article No.192

[18] Lyon M, Campen M, Kobbelt L. Quad layouts via constrained T-mesh quantization[J]. Computer Graphics Forum, 2021, 40(2): 305-314

[19] Coudert-Osmont Y, Desobry D, Heistermann M, *et al*. Quad mesh quantization without a T-mesh[J]. Computer Graphics Forum, 2024, 43(1): Article No.e14928

[20] Lai Y K, Jin M, Xie X X, *et al*. Metric-driven RoSy field design and remeshing[J]. IEEE Transactions on Visualization and

Computer Graphics, 2010, 16(1): 95-108

[21] Palacios J, Zhang E. Rotational symmetry field design on surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics, 2007, 26(3): Article No.55

[22] Kowalski N, Ledoux F, Frey P. A PDE based approach to multidomain partitioning and quadrilateral meshing[C] //Proceedings of the 21st International Meshing Roundtable. Heidelberg: Springer, 2013: 137-154

[23] Lei N, Zheng X P, Jiang J, *et al*. Quadrilateral and hexahedral mesh generation based on surface foliation theory[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 316: 758-781

[24] Lei N, Zheng X P, Luo Z X, *et al*. Quadrilateral and hexahedral mesh generation based on surface foliation theory II[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 321: 406-426

[25] Lei N, Zheng X P, Luo Z X, *et al*. Quadrilateral mesh generation II: meromorphic quartic differentials and Abel–Jacobi condition[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 366: Article No.112980

[26] Zheng X P, Zhu Y M, Chen W, *et al*. Quadrilateral mesh generation Ⅲ: optimizing singularity configuration based on Abel–Jacobi theory[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 387: Article No.114146

[27] Campen M. Partitioning surfaces into quadrilateral patches: a survey[J]. Computer Graphics Forum, 2017, 36(8): 567-588

[28] Campen M, Bommes D, Kobbelt L. Dual loops meshing: quality quad layouts on manifolds[J]. ACM Transactions on Graphics, 2012, 31(4): Article No.110

[29] Diamanti O, Vaxman A, Panozzo D, *et al*. Designing N-PolyVector fields with complex polynomials[J]. Computer Graphics Forum, 2014, 33(5): 1-11

[30] Livesu M, Pietroni N, Puppo E, *et al*. LoopyCuts: practical feature-preserving block decomposition for strongly hex-dominant meshing[J]. ACM Transactions on Graphics, 2020, 39(4): Article No.121

[31] Rigby D. TopMaker: a technique for automatic multi-block topology generation using the medial axis[C] //Proceedings of the 4th Joint Fluids Summer Engineering Conference. New York: ASME Press, 2003: 1991-1997

[32] Frey P J, George P L. Mesh generation: application to finite elements[M]. 2nd ed. London: ISTE & Wiley, 2008

[33] Fogg H J, Armstrong C G, Robinson T T. Enhanced medial-axis-based block-structured meshing in 2-D[J]. Computer-Aided Design, 2016, 72: 87-101

[34] Yang X, Shan J L, Yu F, *et al*. Boundary constrained quadrilateral mesh generation based on domain decomposition and templates[J]. Computers & Structures, 2024, 295: Article No. 107275

[35] Guibas L, Stolfi J. Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams[J]. ACM Transactions on Graphics, 1985, 4(2): 74-123

[36] Lawson C L. Software for C1 surface interpolation[M] //Rice J R. Mathematical Software. New York: Academic Press, 1977: 161-194

[37] Lévy B, Petitjean S, Ray N, *et al*. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2002, 21(3): 362-371

[38] Schoen R, Yau S T. Lectures on harmonic maps[M]. Cambridge: International Press, 1997: 1-150