球谐算子驱动三维激光 SLAM 闭环检测

李子宽[1)], 魏明强[1)], 吴巧云[2)], 郭延文[3)], 徐凯[4)], 李嘉[5)], 汪俊[1)*]

[1)] (南京航空航天大学计算机科学与技术学院 南京 211106)
[2)] (安徽大学人工智能学院 合肥 230601)
[3)] (南京大学计算机软件新技术国家重点实验室 南京 210016)
[4)] (国防科技大学计算机学院 长沙 410073)
[5)] (河海大学地球科学与工程学院 南京 211100)
(wjun@nuaa.edu.cn)

摘 要: 闭环检测是三维激光 SLAM 实现自主定位和导航的核心环节. 针对目前闭环检测存在高复杂度及低准确度的难题, 提出具有旋转不变性的球谐算子(spherical harmonic energy, SHE)与绕 Z 轴旋转不变的球谐算子(spherical harmonic Z-energy, SHZE); 结合 SHE 和 SHZE 的优势, 通过两步搜索提出一种三维激光 SLAM 闭环检测算法 SH-LCD, 在提高信息丰富度的同时降低了闭环检测计算的复杂度, 具有较强的特征提取能力与普适性. 在 KITTI, NCLT 和 Complex Urban 这 3 个公共基准数据集上的闭环检测实验结果表明, SH-LCD 算法的闭环检测精度优于最新的闭环检测方法, 包括 Scan Context, M2DP, OverlapNet 等; 此外, 该算法闭环检测效率高, 计算算子与算子匹配消耗的时间仅需约 12.0 ms 和 2.3 ms, 满足 SLAM 实时性的要求.

关键词: 三维激光 SLAM; 闭环检测; 全局算子; 球谐函数; 球谐变换
中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2023.19748

Loop Closure Detection in 3D Laser-Based SLAM Using Spherical Harmonics Descriptors

Li Zikuan[1)], Wei Mingqiang[1)], Wu Qiaoyun[2)], Guo Yanwen[3)], Xu Kai[4)], Li Jia[5)], and Wang Jun[1)*]

[1)] (*College of Computer Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing* 211106)
[2)] (*School of Artificial Intelligence, Anhui University, Hefei* 230601)
[3)] (*State Key Laboratory for Novel Software Technology, Nanjing University, Nanjing* 210016)
[4)] (*College of Computer Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha* 410073)
[5)] (*School of Earth Sciences and Engineering, Hohai University, Nanjing* 211100)

Abstract: Loop closure detection is the core of 3D laser-based SLAM to realize autonomous positioning and naviga-tion. Aiming at the problems of high complexity and low accuracy in current loop closure detection, a spherical harmonic energy with rotation invariance (SHE) and a spherical harmonic energy with the Z-axis rotation invariance (SHZE) are first proposed in this paper. Combining the advantages of SHE and SHZE via a "two-step search", a novel loop closure detection algorithm for 3D laser-based SLAM, denoted as SH-LCD, is proposed. SH-LCD not only improves the richness of information extraction, but also reduces the computation complexity of loop closure detection, thus characterized by strong feature extraction ability

收稿日期: 2022-06-08; 修回日期: 2022-08-03. **基金项目**: 国家自然科学基金重点项目(62032011); 国家自然科学基金(62172218); 江苏省重点研发计划产业前瞻与关键核心技术项目(2021057). **李子宽**(1995—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为 3D 视觉; **魏明强**(1985—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为计算机图形学; **吴巧云**(1993—), 女, 博士, 讲师, 主要研究方向为计算机图形学; **郭延文**(1980—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为计算机图形学; **徐凯**(1982—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为 3D 视觉、机器人感知与导航; **李嘉**(1979—), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为计算机视觉测量; **汪俊**(1981—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 论文通信作者, CCF 会员, 主要研究方向为数字几何处理.

and universality. Extensive loop closure detection evaluations on benchmark datasets including KITTI, NCLT, and Complex Urban, demonstrate that the detection accuracy of SH-LCD significantly outperforms the current state-of-the-art methods including Scan Context, M2DP, OverlapNet, etc. In addition, the efficiency of SH-LCD is high, and the time for operator calculation and operator matching are about 12.0 ms and 2.3 ms, respectively. This meets the real-time requirements of SLAM.

Key words: 3D laser SLAM; loop closure detection; global descriptor; spherical harmonics; spherical harmonic transforms

3D 激光同步定位与地图绘制(simultaneous localization and mapping, SLAM)是自动驾驶实现自主导航定位的重要环节. 闭环检测可以提升 3D 激光SLAM的性能, 一方面, 关系到智能移动机器人估计的轨迹和地图在长时间运行下的正确性; 另一方面, 由于闭环检测提供了当前数据与所有历史数据的关联, 在智能移动机器人重新启动时, 能够利用闭环检测确定平台在地图中所在的位置[1], 特别是在大规模复杂场景中, 闭环检测可以降低累积误差对建图定位的影响.

基于3D激光的闭环检测方法可以分为基于局部算子、基于全局算子和深度学习的技术[2]这 3 类.

基于局部算子的方法一般从单次扫描点云中提取局部算子, 再结合词袋进行闭环检测. Steder 等[3]提出一种基于距离图像的位置识别系统, 其结合词袋和 NARF 特征[4]进行相对姿势估计; 还有 PFH[5], SHOT[6], Shape Context[7], Spin Image[8]等其他类型的局部算子. 这些局部算子最初是为 3D 模型或CAD零件设计的, 由于3D激光雷达数据往往较为稀疏, 精度较低, 因此这些算子难以适用于 3D 激光雷达的闭环检测.

与基于局部算子的闭环检测方法不同, 基于全局算子的方法不需要进行局部关键点检测, 计算效率更高, 更适用于室外智能驾驶场景. 该方法通过构建每帧点云的全局算子并进行相似性度量, 实现闭环检测. Rusu 等[9]提出一种视点特征直方图(viewpoint feature histogram, VFH)算法, 由视点方向分量和拓展 FPFH[10]的表面性质分类组成. 为了提高 VFH 在物体局部遮挡情况下的性能, Aldoma 等[11]提出聚簇 VFH 算法(clustered VFH, CVFH), 通过创建稳定的集群区域, 使用区域的平均法线和质心来计算 VFH 算子. Muhammad 等[12]提出 Z-projection算法, 通过构建法矢直方图, 使用2个距离函数的双阈值来判断闭环. 上述 VFH, CVFH, Z-projection 算法都需要预先计算点云的法线. Wohlkinger 等[13]提出形状函数集合(ensemble of shape functions, ESF)算法, 在定义算子时使用距离、角度和面积 3 种形状属性而不是常规特征; 该算子不需要任何预处理, 对噪声和不完整的表面具有鲁棒性. He 等[14]提出 M2DP 算法, 其将整个 3D 点云投影到多个 2D 平面上并提取了 192 维向量的全局特征, 该算法在实际使用过程中表现出较高的性能, 以及对噪声和分辨率变化的鲁棒性. 上述方法都是将点云进行划分进而转化为直方图的形式, 但由于直方图是一种基于统计的特征, 会丢失点云的内部结构, 无法描述场景的详细结构信息, 存在潜在的误报. Kim 等[15]提出 Scan Context 算法, 采用非直方图的方式将 3D 点云投影到柱坐标系下作为全局算子; Scan Context 的匹配仅需要逐元素相乘, 能够高效地检测闭环, 但在复杂数据集中精度不高. 除以上使用纯点云几何信息的方法外, Wang 等[16]在几何信息的基础上考虑强度信息, 提出全局算子 ISC(intensity scan context), 与仅使用几何信息的方法相比, 具有更好的性能.

近年来, 研究人员提出基于深度学习的闭环检测方法. Uy 等[17]提出 PointNetVLAD 网络生成 3D 点云的全局算子, 将 PointNet[18]和 NetVLAD[19]组合, 生成具有置换不变性的点云算子, 取得了较好的效果; Kim 等[20]提出 SCI(scan context image)算子, 在 Scan Context 的基础上使用卷积神经网络(convolution neural network, CNN), 将位置识别问题公式化为位置分类问题, 能够解决长时间的定位问题; Sun 等[21]的方法结合蒙特卡洛定位技术, 能够实现大规模环境下的快速全局定位; Chen 等[22]将深度图、法向图、强度图和语义图多模态数据融合提出 OverlapNet, 无需先验位姿, 能够使用神经网络直接估计 2 帧激光雷达扫描的重叠率和相对偏航角. 虽然深度学习方法表现出较大潜力, 但是该类技术具有较高复杂度, 训练模型需要大量数据以防模型过拟合. 当对具有不同地形或在不同条件下获取的数据进行训练和应用时, 深度学习模型难以有较好的泛化能力.

球谐是一种球坐标系统下的时频域分析技术，可以快速解析球面特征，具有旋转不变性．虽然 3D 激光雷达点云数据是在球坐标系下通过旋转扫描得到的，但由于球谐函数本身数学理论的复杂性，目前鲜有将球谐应用于 3D 激光 SLAM 领域．

针对目前 3D 激光 SLAM 中闭环检测方法存在的高复杂度以及低准确度的难题，本文提出一种基于球谐算子的闭环检测方法(spherical harmonic loop closure detection, SH-LCD)．针对 3D 激光雷达数据和室外场景的特点，设计具有旋转不变性的球谐算子(spherical harmonic energy, SHE)与绕 Z 轴旋转不变的球谐算子(spherical harmonic Z-energy, SHZE)；并从傅里叶变换、勒让德变换、消除南北极空值运算等方面对球谐函数展开方法进行优化．为了兼顾闭环检测的效率和精度，结合 SHE 和 SHZE 这 2 个球谐算子的优点，采用“两步搜索”方案，提出 SH-LCD 算法，在提高信息丰富度的同时降低了计算复杂度．在室内外以及城市等复杂场景的实验结果表明，SH-LCD 具有较强的特征提取能力与普适性，闭环检测精度优于对比的方法；该算法闭环检测效率高，计算算子与算子匹配消耗的时间仅需约 12.0 ms 和 2.3 ms，满足 SLAM 实时性的要求．

1　SH-LCD 算法概述

闭环检测是 3D 激光 SLAM 的关键环节，针对 3D 激光雷达数据特点，本文提出 2 种球谐算子 SHE 与 SHZE，球谐算子结构简洁且具有旋转不变性，能够克服噪声的干扰．基于 2 种球谐算子提出 SH-LCD 算法，其输入为当前扫描点云，当找到闭环时，输出该闭环的索引．SH-LCD 可以作为一个单独的模块灵活地集成于主流的 3D 激光 SLAM 框架中，图 1 所示为将 SH-LCD 集成于 LeGO-LOAM 框架[23]的流程．为便于研究人员评估和使用，SH-LCD 算法已开源: https://github.com/Miraclelzk/SH-LCD.

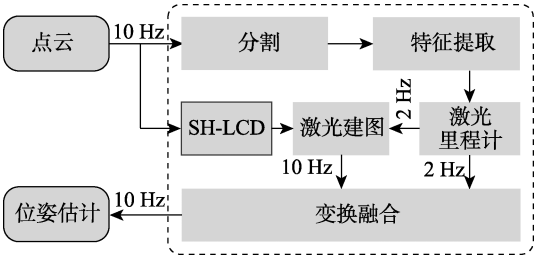


图 1　SH-LCD 算法集成于 LeGO-LOAM 框架

2　基于球谐的点云特征算子

与地基或者手持激光扫描仪数据相比，3D 激光雷达数据精度较低，扫描的垂直方向与水平方向点云分布不均匀，点云的分辨率会随着距离变化而变化，进而导致有些区域信息冗余，而有些区域信息稀疏．因此，一些针对地基或者手持激光扫描仪的点云处理算法并不适用于 3D 激光雷达数据，如 Spin Image[8]，ESF[13]等算子由于点云的稀疏性而缺乏空间信息，无法有效地进行特征描述；一些算子[9,11-12]利用点的法向量来提高信息丰富度，但在实际应用中，3D 激光雷达数据稀疏且伴有嘈杂噪声，难以计算点的准确法向，而且计算法向通常很耗时；还有一些方法将 3D 激光雷达数据投影为深度图，而 3D 激光雷达数据是在球坐标系下的扫描，将点云投影到平面上进行处理将不可避免地产生球面到平面的畸变，导致潜在的匹配问题．

球谐函数具有旋转不变性和多频率描述能力，适合球坐标系下的 3D 激光雷达数据处理．针对 3D 激光雷达数据和复杂场景的特点，本文提出一种球谐算子计算方法．与现有的大多数方法不同，该算法使用球面时频域分析技术将激光雷达数据转换到频率域，提取得到频率域特征．以球谐函数的旋转不变性作为理论基础，提出 2 种适合于 3D 激光雷达单帧数据的算子 SHE 和 SHZE，它们都由球谐各频段能量组成，具有旋转不变性且表达形式简洁，在仅使用点云几何信息的条件下，能够高效地从不均匀的 3D 激光雷达点云中提取到有效信息．同时，由于球谐具有的多频率描述能力，算子使用有限的频段就能够克服噪声干扰，具有较强的鲁棒性．

2.1　球谐函数展开方法

目前，对于球坐标系下对象的常规操作是将其进行平面投影．然而如图 2 所示，对球面信号的平面投影都会产生畸变，球面信号的旋转无法用平面投影来模仿其旋转效果．平面与球面有着重要的区别，平面的运动主要是二维平移，而球面的运动是 3D 旋转，球面的运动空间被称为 3D 流形空间 SO(3)[24]．球面对象是 SO(3)的信号，而不是平面信号．本文采用针对球面的球谐函数对激光雷达数据进行处理．

3D 激光雷达扫描得到的每帧点云数据 (x,y,z) 都以激光雷达中心作为坐标原点，将 3D 激光雷达扫描投影到球面进行球谐函数展开，将点

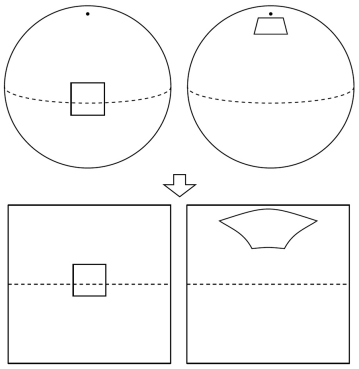


图 2 从球面投影到平面产生的畸变

云从笛卡儿坐标系转换到球坐标系下为

$$(\theta,\phi,r)=\left(\arccos\frac{z}{r},\arctan\frac{y}{x},\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \quad (1)$$

其中，θ 和 ϕ 分别表示天顶角和方位角. 为将点云实现球谐函数展开，需将点云转化为一个球面模型，即将点云转化为一个球面投影. 对球面采用等角网格划分的形式，即通过等角划分天顶角 θ 与方位角 ϕ 来创建网格. 假设天顶角方向划分 m 份，方位角方向划分 n 份，则每个格子中心为

$$B_{j,k}=\left[\frac{\pi(2j-1)}{2m},\frac{2\pi k}{n}\right] \quad (2)$$

其中，j 和 k 表示格子的索引，$j\in 0,1,\cdots,m-1;$. $k\in 0,1,\cdots,n-1$. 通过球面等角网格划分得到 mn 个格子，可以直接计算点云中每个点的所属区间，无需复杂搜索.

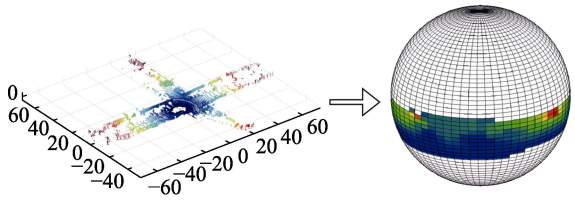
将天顶角方向第 j 个方位角方向、第 k 个格子中所有点的集合用 B_{jk} 表示. 在对点云进行划分之后，通过使用每个格子集合中的点，将一个实数分配给每个格子，$\gamma:B_{jk}\to\mathbb{R}$. 将每个格子中传感器中心到扫描点的距离的平均值赋予每个格子作为单帧扫描的特征，公式为

$$\gamma(B_{jk})=\underset{p\in B_{jk}}{\text{mean}}\, r(p) \quad (3)$$

其中，$r(\cdot)$ 表示返回球坐标系下 r 坐标值的函数. 对于没有点云的格子，分配 0 作为该格子的值. 根据上述过程，最终将点云构建为球面模型

$$g(\theta_i,\phi_i)=\gamma(B_{jk}) \quad (4)$$

图 3 所示为点云数据到球面模型的构建过程，图中的点云和球面模型依据传感器中心到扫描点距离从小到大按蓝—绿—红的顺序渐变附色，没有点的位置为白色. 图 3a 所示为 KITTI 00 第 94 帧扫描点云，点云数据采用 HDL-64E 扫描得到，HDL-64E的水平视场为360°，但垂直视场很小，只有 26.8°(+2°~−24.8°)，共 64 线，垂直视角的分辨率约为 0.4°，水平视角的分辨率约为 0.08°；图 3b 所示为构建得到的球面模型.



a. 一帧3D 激光雷达数据　　b. 球面模型

图 3 点云数据到球面模型的构建过程

原始 3D 激光雷达数据垂直方向分辨率较低且视场角较小，而水平方向分辨率较高. 从球坐标系下看，有效的数据主要集中在赤道附近，而南北极附近有大量空值. 因此，实际使用过程中，在进行等角网格划分时，要与使用的激光雷达垂直与水平方向分辨率相适应.

球谐函数 $Y(\theta,\phi)$ 可定义为

$$Y_l^m(\theta,\phi)=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \quad (5)$$

其中，$P_l^m(x)$ 为连带勒让德多项式，$l=0,1,2,\cdots$；$m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$；$(-1)^m$ 是归一化常数的相角；l 称为球谐函数的次，也称为球谐函数的频率，l 越大表示频率越高；m 称为球谐函数的阶.

假设球函数模型的带限为 B，意味着球谐系数仅在有限频率范围内是非零的，而该频率之外的其他系数为零. 根据 Shannon-Nyquist 采样定理[25]，经纬度方向的采样必须大于等于 $2B$，这样才能有效地表示带限为 B 的球函数模型. 反过来，进行球谐正变换时，能够恢复的球函数模型带限由采样少的方向的采样数决定，且为采样数的一半. 因此，可以根据 3D 激光雷达的特点增加水平方向的采样，既能够增加提取的特征，又不会影响球谐函数展开的正交完备性.

为了简化球谐函数展开，在算法描述时对经纬度方向进行等角 $2B\times2B$ 的网格划分，根据式(4)，假设计算得到球面模型为 $g(\theta_j,\phi_k)\in(0,\pi)\times[0,2\pi)$，其中，$\theta_j=\pi(2j+1)/4B$，$j=0,1,\cdots,2B-1$，$\phi_k=\pi k/B$，$k=0,1,\cdots,2B-1$. 利用球谐函数展开来计算带限球面模型下的球谐系数为

$$\hat{g}_l^m=\frac{\sqrt{2\pi}}{2B}\sum_{j=0}^{2B-1}\sum_{k=0}^{2B-1}w_j g(\theta_j,\phi_k)e^{-im\phi_k}P_l^m(\cos\theta_j) \quad (6)$$

其中，满足 $0<l<B$ 与 $|m|<l$，P_l^m 表示连带勒让德函数，函数区间为 $[-1,1]$；球谐系数 $\hat{g}_l^m$ 即为 3D 激光雷达数据转换得到的频率域特征.

2.2　旋转不变的算子 SHE

经过球谐函数展开后，可以获得 3D 激光雷达每帧扫描数据的球谐系数，即球谐频率域特征. 根据球谐函数的旋转不变性构建球谐能量不变算子 SHE，该算子不会随着旋转而变换.

球谐基是根据整数 l 与 m 进行索引的，满足 $l\in\mathbb{N}, -l\leqslant m\leqslant l$ 的约束，因此 l 次的球谐函数共有 $2l+1$ 个不同的函数，且相互独立. 在量子力学中[26]认为，l 确定基础频率，而 m 确定球谐函数的状态. 从量子力学的角度来说，总角动量是与方向无关的，只与角动量在某方向的分量有关，对于给定 l 的 $(2l+1)$ 维子空间的基底，在旋转操作下不改变，可以表述为

$$Y_l(\theta+\theta_0,\phi+\phi_0)=\boldsymbol{o}_l(\theta_0,\phi_0)Y_l(\theta,\phi) \tag{7}$$

其中，$\boldsymbol{o}_l$ 是 3D 旋转组 SO(3)的第 l 个表示的酉矩阵. 此外，这个子空间是不可约的，即它不能被分割成在旋转组下不变的更小子空间. 因此，每个频率上的能量不会随着姿态的改变而转移到其他频率上[27]. 根据球谐函数旋转不变的特性，可以得到

$$\begin{aligned}&Y(R(f))=\{Y_0(R(f)),Y_1(R(f)),\cdots\}=\\&\{R(Y_0(f)),R(Y_1(f)),\cdots\}=\\&\{Y_0(f),Y_1(f),\cdots\}=Y(f)\end{aligned} \tag{8}$$

式(8)展示了旋转应用于球谐函数并不会改变球谐函数每次能量的表示形式. 将 l 次中的 $2l+1$ 个球谐系数组成一个向量

$$\boldsymbol{\mu}_l=\{\hat{g}_l^m : m=-l,\cdots,0,\cdots,l\} \tag{9}$$

以 l 次频率的 L_2 范数 $\boldsymbol{\mu}_l$ 作为模型 g 的能量，将 B 次的球面模型 g 的能量不变算子 SHE 定义为

$$\mathrm{SHE}(g,B)=\{\boldsymbol{\mu}_l : l=0,1,\cdots,B-1\} \tag{10}$$

用球谐不同频率下的总能量来描述球面模型，无论移动平台如何旋转，球谐各频段上的能量都是恒定的，因此 SHE 算子也是旋转不变的. 当计算到 B 次球谐系数时，算子 SHE 的特征数为 B 个.

2.3　绕 Z 轴旋转不变的算子 SHZE

车载的3D激光雷达一般只会绕 Z 轴进行姿态的变化，即使遇到上坡和下坡，俯仰角方向的旋转也是非常小的. 如果仅用任意方向旋转不变的算子 SHE，将会损失很多特征. 因此，根据球谐理论，设计了绕 Z 轴旋转不变的算子 SHZE.

移动平台绕 Z 轴方向旋转实际上仅改变 ϕ 的角度，即只影响经度方向的变化. 根据式(5)，经度方向的变化只是一个简单的傅里叶变化 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$，而绕 Z 轴方向旋转并不会影响球谐整体能量. 同时，正阶球谐与负阶球谐是对应存在的，是复共轭的关系，正负阶球谐的能量实际上是一样的. 因此，将正负阶球谐系数组合，得到

$$\boldsymbol{\tau}_l^m=\begin{cases}\{\hat{g}_l^0\}, & \text{if } m=0\\ \{\hat{g}_l^m,\hat{g}_l^{-m}\}, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{11}$$

然后将其 L_2 范数 τ_l^m 作为模型 g 的能量，将 B 次的模型 g 的能量不变算子 SHZE 定义为

$$\mathrm{SHZE}(g,B)=\{\boldsymbol{\tau}_l^m : l=0,\cdots,B-1; m=0,\cdots,l\} \tag{12}$$

用球面谐波正负 m 阶相加的能量描述球面模型，无论移动平台如何绕 Z 轴旋转，SHZE 上的能量都是相对恒定的，因此算子 SHZE 也是绕 Z 轴旋转不变的. 当计算到 B 次球谐系数时，算子 SHZE的特征数为 $(n+1)n/2$ 个. 算子SHZE仅绕 Z 轴方向的旋转不变，虽然牺牲了一定的旋转不变性，但能够提取得到更多的频率域能量特征.

2.4　算子相似性度量方法

第 2.2 节和第 2.3 节中，利用球谐的旋转不变性，推导得到了算子 SHE 和算子 SHZE，它们采用各频率能量的形式表示，各个能量之间没有几何位置的相关关系，因此采用余弦相似性进行相似性度量. 假设 D_a 和 D_b 分别表示从查询点云和候选点云获取的球谐算子，使用余弦相似性进行算子的相似性度量，球谐算子的相似性度量公式为

$$d(D_a,D_b)=1-\frac{D_aD_b}{D_aD_b} \tag{13}$$

式(13)将度量范围调整为 $[0,1]$，当 d 越趋近于 0 时，表示越相似，以此来度量算子的相似性.

2.5　球谐函数展开计算优化

虽然球谐算子具有优秀的性能，但其计算量巨大，球谐函数展开的计算复杂度高达 $O(B^4)$，计算的消耗主要集中在傅里叶变换和勒让德变换中，而且随着采样和计算阶次的变多，消耗的时间也越多；同时，针对激光雷达数据垂直方向的特点，只有赤道附近的一定范围内有值，而南北极附近都是空值，也会造成很大的计算资源浪费. 本文从傅里叶变换、勒让德变换、消除南北极空值运算等方面对球谐函数展开进行优化.

如式(6)所示, 球谐函数展开由傅里叶变换和勒让德变换组成. 球谐展开的计算首先在经度方向进行离散傅里叶变换(discrete Fourier transform, DFT), 然后在纬度方向进行离散勒让德变换[28]. 使用经典的快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)进行 DFT 的效率优化. 采用 Healy 等[29]的方法优化勒让德变换的效率, 将高阶勒让德函数分解为低阶勒让德函数表示, 然后组合所有相关低阶连带勒让德多项式的离散勒让德变换(discrete Legendre transform, DLT)结果[30]. 在余弦域中完成 DLT 的处理既稳定又快速[31], 使用该算法进行球谐函数展开, 其时间复杂性为 $O\left(N\log^2 N\right)$, 能够很大程度地提高计算效率.

如图 3b 所示, 激光雷达数据进行网格采样之后, 南北极附近有大量的空值, 即南北极附近的 $g(\theta,\phi)$ 都为 0, 有效值主要集中在赤道附近. 假设纬度方向有值的区间为 $v\sim h$, 根据式(6), 将计算精简到 $v\sim h$ 的范围, 即

$$\hat{g}_l^m=\frac{\sqrt{2\pi}}{2B}\sum_{j=v}^{h}\sum_{k=0}^{2B-1}w_j g\left(\theta_j,\phi_k\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi_k}P_l^m\left(\cos\theta_j\right) \tag{14}$$

式(14)消除了空值位置的运算, 不会影响球谐函数展开的正交性, 同时提高了球谐函数展开的计算效率.

经过计算优化后, SHE 和 SHZE 的计算效率得到很大程度的提升, 且随着点云数据规模增加与计算球谐阶次的增多, 优势将更加明显.

3 SH-LCD 算法

虽然 SHE 具有全局旋转不变性, 但相对而言提取得到的频率域能量特征较少, 原因是其为了保证旋转不变性舍弃了一定程度的细节特征, 导致一些场景难以分辨. 本文设计了算子 SHE 的变种算子 SHZE, 只有绕 Z 轴方向的旋转不会影响该算子, 能够提取到更多的频率域特征. 算子 SHZE 虽然在一定程度上牺牲了旋转不变性, 但换取了更多的特征, 具有更强的特征表达能力. 当球谐计算到 B 次时, 算子 SHE 特征数为 B, 而算子 SHZE 的特征数为 $\left(B+1\right)B/2$ 个. 但是, SHZE 在特征数变多的同时也会导致相似性度量计算量的上升, 在室外环境下不可避免地会有上坡和下坡的情况, 存在着潜在的错误识别.

SHE 和 SHZE 这 2 种球谐算子是同源的, 都是频率域特征, 都具有分频表达能力, 得到的特征是类似的, 只是在特征丰富度、计算效率上有一些区别. 本文结合这 2 种球谐算子的优点, 提出 SH-LCD 算法, 分为球谐算子计算和两步闭环搜索 2 个流程, 如图 4 所示. 当 3D 激光 SLAM 系统开始工作后, 将传感器获取的每帧点云投影到球坐标系下, 采用球谐函数展开将其计算为球谐系数的形式, 根据球谐系数计算得到算子 SHE 与 SHZE; 将球谐系数存储到历史数据库中作为闭环搜索的候选库, 使用算子 SHE 和 SHZE 进行两步搜索确定闭环, 将检测到的闭环帧索引输入到后端优化模块.

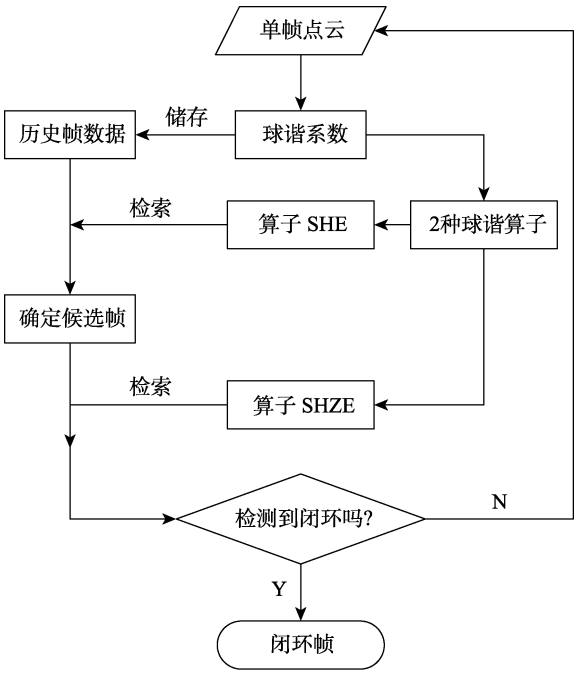


图 4 SH-LCD 算法流程

SH-LCD 算法的核心思想是使用球谐算子的频率域特征进行闭环搜索. 算子 SHE 具有旋转不变性、特征数少、描述能力较弱和匹配效率高的特点, 能够粗略地表示扫描帧之间的相似性, 使用其进行第 1 遍检索, 可以快速找到排名靠前的相似帧作为候选帧; 算子 SHZE 具有绕 Z 轴旋转不变性、特征数多、描述能力强和匹配效率较低的特点, 能够更加细致地表示扫描帧之间的相似性, 使用其进行详细的搜索, 以确定最终的闭环帧. 这种两阶段搜索的方式能够兼顾 2 种算子的优点, 克服各自的缺点, 在提高特征丰富度的同时降低了计算的复杂度.

SH-LCD 算法采用两步搜索闭环方案, 达到搜索精度和效率的平衡. 假设 q 为被搜索帧, C 为候选帧集, 首先使用算子 SHE 对候选帧集 C 进行快

速搜索，查询得到 k 个最相似的帧作为候选帧集 C'，其中，检索得到最相似的帧的数量 k 由用户确定；然后使用算子 SHZE 对候选帧集 C' 进行搜索，选择与查询最接近且符合接受阈值的候选者作为重新访问的位置

$$c^* = \underset{c_k \in C'}{\operatorname{argmin}}\, d\left(\mathrm{SHZE}^q, \mathrm{SHZE}^{c_k}\right), d < \tau \qquad (15)$$

其中，C' 表示根据 SHE 搜索得到的候选帧集；τ 表示给定的接受阈值；$d(\cdot)$ 为该式的相似性度量方法；c^* 表示搜索得到的回环帧. 为了防止相邻帧的干扰和无意义的搜索，不搜索被搜索帧 q 的附近帧.

4　实验及结果分析

从多方面对 SH-LCD 算法进行评价，在选择数据集时考虑了传感器类型、行驶的环境、闭环类型(正向闭环或反向闭环)等方面数据的多样性，并与最新的算法进行比较，验证 SH-LCD 的有效性和准确性.

4.1　数据集与实验设置

4.1.1　数据集

选取 KITTI 数据集[32]，NCLT 数据集[33]和 Complex Urban 数据集[34]来验证 SH-LCD 算法. 如表 1 所示，为了综合评定 SH-LCD 算法，从 3 个数据集中选取 9 个有代表性的激光雷达序列进行实验，包含不同类型激光雷达的实测数据. 其中，KITTI 数据集 08 序列具有反向闭环帧; NCLT 数据集同时包括室内外场景; Complex Urban 数据集包括复杂城市的数据，行驶路线上具有较多的车与人，路况复杂.

表 1　实验选用的数据集序列

数据集	序列	总长度/m	节点数	闭环数
KITTI	00	3 714	4 541	788
	02	4 268	4 661	309
	08	3 225	4 071	332
NCLT	20120526	6 300	3 162	814
	20120820	6 000	2 999	527
	20130405	4 500	2 258	276
Complex Urban	00	10 540	3 303	151
	01	11 720	3 475	458
	04	3 060	5 140	378

4.1.2　实验设置

为了验证 SH-LCD 算法中两步搜索的性能与合理性，对仅使用 SHE 算子的闭环检测方法和仅使用 SHZE 算子的闭环检测方法进行对比，这 2 种方法采用单个球谐算子进行直接搜索；同时，还与 Scan Context[15], M2DP[14], Z-projection[12]和 OverlapNet[22] 这 4 种全局算子的闭环检测方法进行对比.

Scan Context 是 2018 年提出的一种基于非直方图的全局算子，通过划分扇形网格并用最高点作为特征，在 KITTI 数据集中表现出最高效的性能. 本文采用文献[15]中提供的代码实现；参数采用推荐值，设置为 $N_s = 60$，$N_r = 20$，$L_{max} = 80$.

M2DP 是 2016 年提出的一种使用直方图的方法，表现出较高的性能以及对噪声和分辨率变化的鲁棒性. 本文采用该文献[14]中提供的代码实现.

Z-projection 方法将所有法向投影到 Z 轴上构建直方图作为特征，由于需要估计法向，效率比较低. 本文自行实现该方法，将直方图划分设置为 101 个.

OverlapNet 是 2020 年提出的一种基于深度学习的方法，通过估计 2 帧点云的重叠率来检测闭环. 本文采用文献[22]中提供的代码和预训练模型进行实验. 为公平对比，输入只采用基于几何信息的深度图和法向图；同时，由于网络结构和输入的限制，仅在使用 64 线雷达的 KITTI 数据集中进行实验.

本文提出的 SH-LCD, SHE 和 SHZE 均采用 100×120 网格划分并计算到 50 次球谐系数. SH-LCD 算法在第 1 阶段候选帧查询中，设置 $k = 10$，即查询最相近的 10 个候选帧; SHE 直接使用 SHE 算子进行逐帧查询；而 SHZE 直接使用 SHZE 算子进行逐帧查询.

所有实验均采用真实原始点云进行计算. 实验中，相邻帧的距离一般在 4 m 以内，所以如果查询帧与匹配得到的闭环帧之间的真实距离小于 4 m，就认为正确查询到闭环；为了避免对相邻节点进行错误查询，在查询时排除相邻的 50 个节点. 实验均在 Intel i7-4790K 4.00 GHz CPU, GTX 1060 GPU 和 16 GB 内存的计算机上进行.

4.2　闭环检测实验评估

采用准确率-召回率曲线[15]评估闭环检测实验结果，如图 5 所示. 在 3 个数据集共 9 组实验序列中，对比 3 种基于球谐算子以及另外 4 种全局算子的闭环检测方法.

4.2.1　KITTI 数据集

图 5a~图 5c 所示为在 KITTI 数据集上的实验结果. 可以看出，与 SHZE 和 SH-LCD 相比，SHE 明显性能较差，原因是其算子特征数相对较少，特

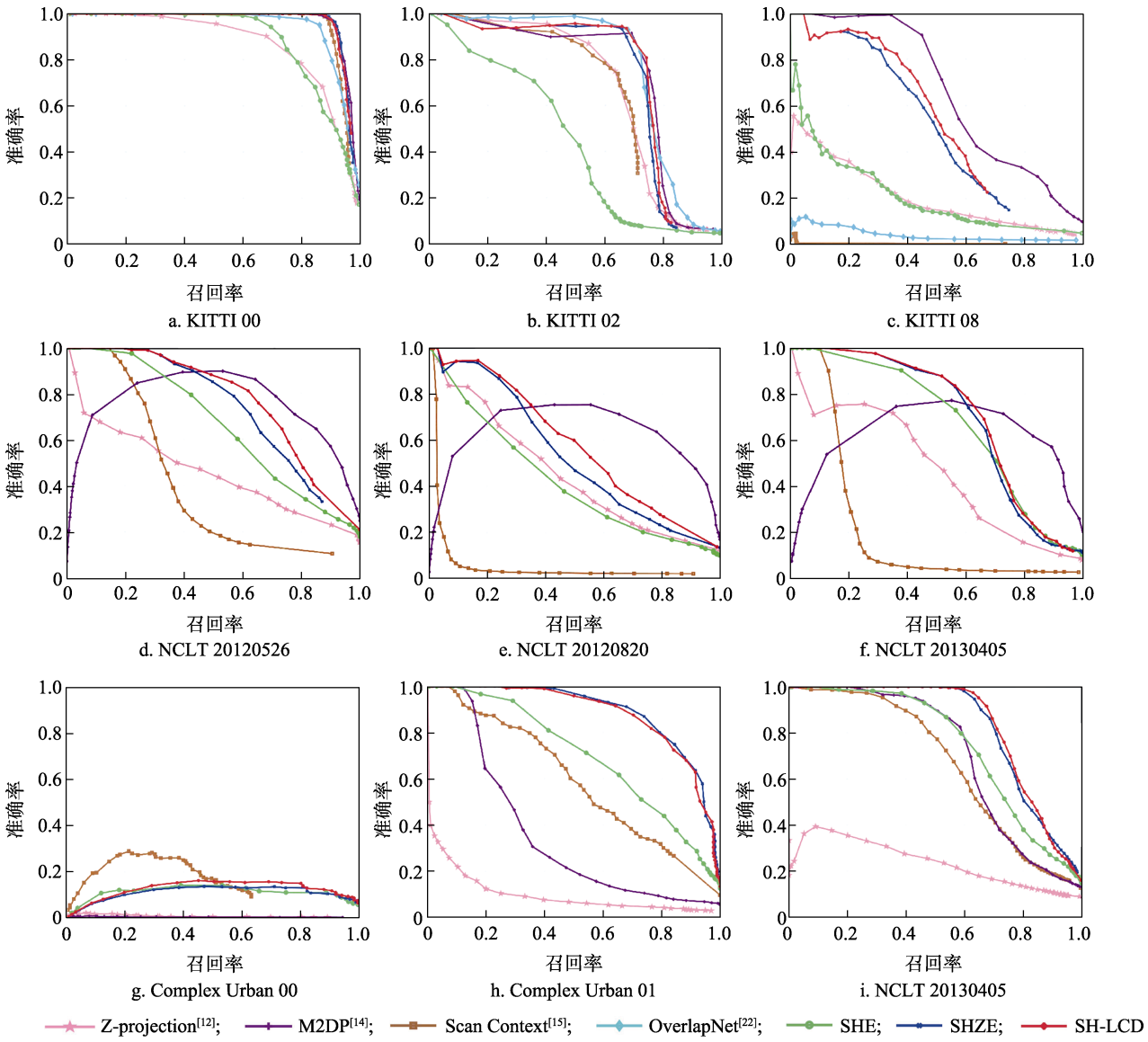


图 5 评估数据集的闭环检测结果

征分辨能力较差; Z-projection 的性能排名整体比较靠后; M2DP 在图 5a, 图 5b 中表现出相对较好的性能, 但在图 5c 中性能很差, 原因是图 5c 具有反向闭环帧, 根据 M2DP 算法的特点, 它无法有效地检测到反向闭环帧; Scan Context 是 KITTI 数据集上最好的方法, 在 3 个序列中都表现出很好的性能; OverlapNet 在图 5a, 图 5b 中表现出很好的性能, 但在图 5c 中性能很差; SH-LCD 使用 SHE 与 SHZE 两步搜索, 在一定程度上融合了 2 种算子的优势, 获得更好的性能, 基本可以赶上目前最好的 Scan Context, 尤其在图 5a, 图 5b 中有超过 Scan Context 的趋势.

4.2.2 NCLT 数据集

图 5d~图 5f 所示为在 NCLT 数据集上的实验结果, 该数据集非常具有挑战性, 具有大规模、长距离、路况复杂等特点, 同时包括室内室外的数据. 可以看出, Z-projection 的性能同样排名相对靠后; M2DP 表现出比较差的性能, 在低召回率时表现出高精度, 且曲线斜率迅速较小, 原因是 NCLT 数据集同时具有正向闭环和反向闭环, M2DP 只正确检出了正向闭环而错过了反向闭环; Scan Context 数据集应用在 KITTI 数据集的室外场景表现出最优的性能, 但应用于 NCLT 数据集时, 准确率-召回率曲线呈现低召回率时低精度, 呈拱形的曲线, 说明在检索得到排名靠前的闭环基本都是错误的, 原因是 NCLT 数据集包括狭窄的室内环境, 而 Scan Context 依赖高度信息, 导致准确率-召回率曲线低召回率时表现出很低的性能; SHE, SHZE 和 SH-LCD 都呈现出很好的性能, 虽然 SHE 特征数较少, 但性能依然比其他方法好, SH-LCD 在大规

模、长距离的 NCLT 数据集中表现出最优的特性，比单独使用 SHE 与 SHZE 表现出更好的性能，说明 SH-LCD 对复杂场景具有较强的特征提取能力，不受反向回环以及室内室外场景转换的影响，具有普适性.

4.2.3　Complex Urban 数据集

图 5g~图 5i 所示为在 Complex Urban 数据集上的实验结果，其是高度多样化的城市环境的数据集，同样是非常具有挑战性的数据集，包括大都市区，复杂建筑和居民区. 该数据集采用 2 个 16 线雷达扫描得到，获取点云比较稀疏. 可以看出，在图 5g 中，该序列具有狭窄的道路和重复的结构，高楼的特征十分相近，是最具挑战性的案例，所有方法的性能都较差，Scan Context 与 Z-projection 甚至接近于一条直线；在图 5h，图 5i 中，SH-LCD 最优，尤其在图 5h 中远远好于其他方法；SHE，SHZE 和 SH-LCD 整体都呈现出较好的性能，SHZE 和 SH-LCD 始终都优于 SHE；Z-projection 性能较差，原因是其依赖于直方图并采用较为嘈杂的法向信息，仅在空间结构显著不同时才能有效区分；Scan Context 与 M2DP 在较为复杂的环境中性能有限.

4.2.4　讨　论

基于直方图的 Z-projection 方法整体性能较差；M2DP 在 KITTI 数据集具有正向闭环的序列表现出较好的性能，但无法检测反向闭环，在很多场景不适用；Scan Context 是目前性能相对较好的方法，但在如室内和城市环境等复杂场景中性能明显下降，尤其对于缺少高程的室内场景性能很差；Overlap-Net 只在特定场景表现出很好的性能，其泛化能力较差，由于网络结构的限制，文献[22]中提供的预训练模型无法应用于 NCLT 与 Complex Urban 数据集；而 SH-LCD 在 3 个数据集中都表现出较好的性能，在 KITTI 数据集中性能基本能赶上最优的 Scan Context 方法，在具有挑战性的 NCLT，Complex Urban 数据集中远远好于其他方法，说明该算法具有较强的鲁棒性，在室内和城市等复杂场景中都有较好的性能，具有很强的闭环检测能力. 从整体上看，SH-LCD 结合 SHE 与 SHZE 这 2 种算子的方法优于单独使用 SHE 或 SHZE 的方法；SH-LCD 两阶段搜索的方法在第 1 阶段利用 SHE 全局旋转不变性，第 2 阶段在全局旋转不变候选帧的基础上使用 SHZE 精细搜索. 因此，SH-LCD 能够综合 2 种算子的优势，表现出更好的性能.

4.3　3D 激光 SLAM 框架中的应用

本文将 SH-LCD 作为一个单独模块加入到 LeGO-LOAM 框架[23]中，在真实场景下进行 SLAM.

实验采用含有动态障碍物的道路场景 KITTI 数据集 00 序列，其是非常具有代表性的道路场景，采用 Velodyne HDL-64E 激光雷达扫描得到，KITTI 数据集 00 序列的行驶距离共 3 714 m，约 7.5 min 的行驶时间，激光雷达扫描数据为 4 541 帧，闭环节点数有 788 帧. 将 LeGO-LOAM 框架作为前端和后端，在闭环检测模块分别采用无闭环、LeGO-LOAM 原有闭环方法和 SH-LCD 的闭环方法. 算法的实现与可视化均在 ROS 平台下进行.

只采用前端匹配的方式进行定位时，由于累积误差的存在导致长期估计的结果不可靠，闭环检测能利用检测得到的闭环进行约束，进而优化地图. 图 6 所示为 3 种方法在 KITTI 数据集 00 序列终点位置的建图效果. 可以看出，图 6b 中只使用前端匹配，发生了明显的漂移现象；图 6c 成功寻找到闭环，对全局地图也进行了修正；图 6d 成功寻找到闭环，并且矫正点云地图的偏移，修正了全局地图.

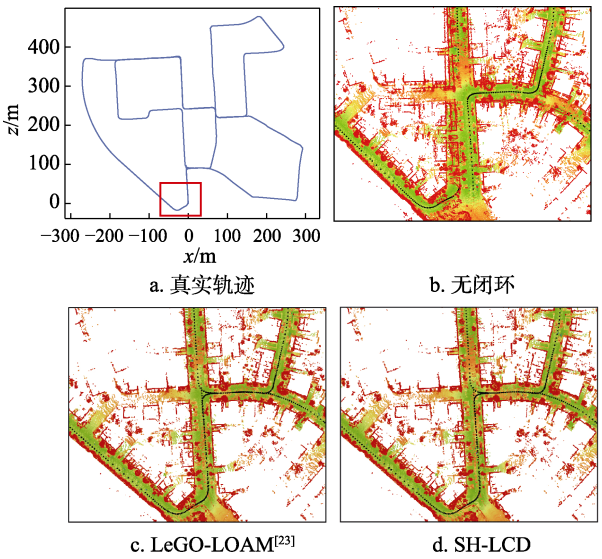


图 6　KITTI 数据集 00 序列终点位置的建图效果

与 LeGO-LOAM 原有闭环方法相比，SH-LCD 具有更强的闭环检测能力. 图 7 所示为 3 种方法在 KITTI 数据集 00 序列十字路口的闭环检测情况. 可以看出，图 7a 中，轨迹没有重叠，扫描点云也只有部分重合，2 帧数据采集的实际位置有一定的偏差，这对于闭环检测方法具有一定的挑战性；图 7b 中，误差累计导致了地图发生了一定的偏移；图 7c 中没有成功找到回环，与图 7b 的结果一致，点云地图发生了偏移；图 7d 中正确找到了回环，并调整到正确的位置，说明 SH-LCD 的性能更强，能够更准确地找到更多的闭环，优化得到更精准的地图.

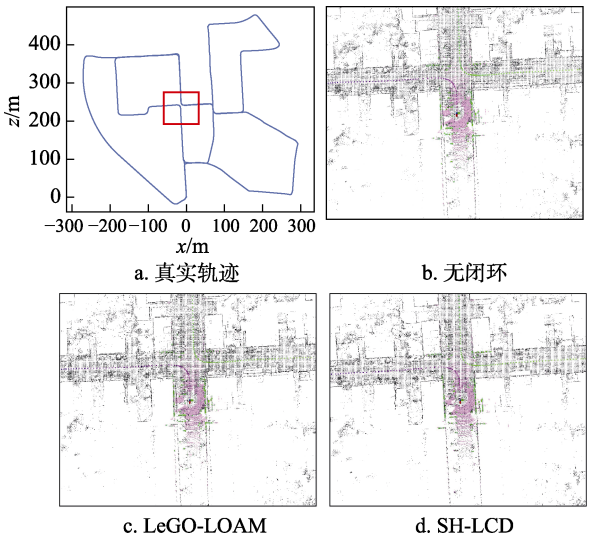


图 7 KITTI 数据集 00 序列十字路口位置的闭环检测情况

绝对轨迹误差(absolute trajectory error, ATE)是通过比较估计轨迹和地面真实轨迹之间的绝对距离来评估全局精度一致性的指标. 表 2 所示为水平方向的 ATE, 可以看出, SH-LCD 的轨迹误差均小于其他 2 种方法. 图 8 所示为水平方向的轨迹偏差. 可以看出, 随着时间的推移, 无闭环方法的偏差逐渐扩大; 由于闭环检测的约束, LeGO-LOAM 和 SH-LCD 的轨迹偏差始终保持比较低的水平; 在约第 1 600 帧的位置, 由于闭环检测的约束导致误差较快下降, SH-LCD 轨迹偏差低于 LeGO-LOAM, 具有更强的闭环检测能力.

表 2 KITTI 数据集 00 序列水平方向的绝对轨迹误差 m

方法	最大值	平均值	RMSE
无闭环[23]	13.494	3.096	4.322
LeGO-LOAM[23]	4.405	1.681	2.009
SH-LCD	**3.524**	**1.193**	**1.439**

注. 粗体表示最优值.

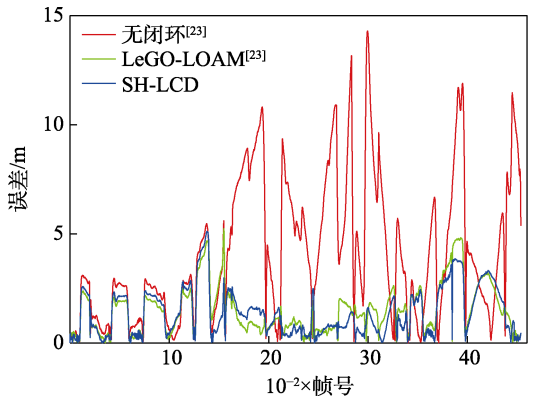


图 8 KITTI 数据集 00 序列水平方向的轨迹偏差

4.4 时间性能

在 KITTI 数据集 00 序列实验时, 计算算子消耗的平均时间和计算相似性度量消耗的平均时间. 表 3 所示为闭环检测方法的时间性能对比, 总体来说, 计算算子时, OverlapNet 的时间最长, 本文的 SH-LCD, SHE 和 SHZE 的时间最短; 计算相似性度量时, Scan Context 的时间最长, SHE 的时间最短.

表 3 闭环检测方法的时间性能 ms

方法	计算算子	相似性度量
Scan Context[15]	32.7	47.7
M2DP[14]	293.6	1.2
Z-projection[12]	1 133.5	2.5
OverlapNet[22]	1 213.6	496.3
SHE	12.0	0.5
SHZE	12.0	4.6
SH-LCD	12.0	2.3

从表 3 可以看出: OverlapNet 和 Z-projection 计算算子时都需要估计法向, 消耗时间超过 1 s, 无法满足 SLAM 实时性的需求; 然而 Z-projection 构建的算子简单, 相似性度量速度很快; OverlapNet 采用网络进行相似性度量, 耗时最长, 且在训练过程也消耗了大量的时间; Scan Context 采用圆环扇形的方法算子构建很快, 但是得到的是二维图特征, 即使加入了 *k*D-tree 进行优化, 2 帧算子相似性度量仍需要 47.7 ms; M2DP 构建算子时间相对较长, 但构建的算子比较简单, 相似性度量耗时很短. SH-LCD, SHE 和 SHZE 计算算子时, 消耗的主要时间都是球谐函数展开, 从球谐系数到球谐算子的计算时间可以忽略不计. 虽然球谐函数展开是一个复杂的累加计算, 但在经过计算优化后计算效率大幅度提升. 一个球谐算子的构建仅需要 12.0 ms, 而球谐算子是高度概括的频率域特征, 形式比较简单, 相似性度量速度很快. 由于 SHZE 比 SHE 算子特征更多, 因此相似性度量时间消耗也比 SHE 多; SH-LCD 结合算子 SHE 与 SHZE 采用 2 步搜索后, 在不降低检索性能的前提下, 相似性度量时间是 SHZE 的一半, 提高了检测效率.

通常, 计算算子消耗时间较长的方法相似性度量时间较短, 而算子消耗时间较短的方法相似性度量时间较长. 实验结果表明, SH-LCD 计算算子消耗时间与算子匹配消耗时间都很短, 能够满足 SLAM 实时性的需求.

5 结 语

本文采用球谐理论提出 SH-LCD 算法. 针对

目前3D激光SLAM中闭环检测方法存在的高复杂度及准确度不足的难题，通过对球谐函数相关数学理论的深入研究，提出 2 种球谐特征算子 SHE 与 SHZE，将球谐特征算子应用于 3D 激光 SLAM 中闭环检测中. 实验结果表明，SH-LCD 具有较强的特征提取能力与普适性，尤其在室内以及城市等复杂场景都有较好的性能；同时，该算法计算算子的消耗时间与算子匹配消耗时间较少，闭环检测效率高于大部分现有方法，能够满足 SLAM 实时的需求.

SH-LCD 算法的局限性是采用球谐函数对球心位置的依赖，即球谐算子不具有平移不变性，当球心位置偏移过大时会影响闭环检测的匹配精度. 球谐算子对球面信息具有多频率描述能力，针对一般的点云同样能够通过构建球面模型来计算球谐算子. 球谐算子的旋转不变性对于匹配类的三维几何问题具有广阔的应用前景.

参考文献(References):

[1] Hu Xiangyan. Research on closed-loop detection method of SLAM based on particle swarm optimization[D]. Xi'an: Xidian University, 2018(in Chinese)
(呼香艳. 基于粒子群优化算法的 SLAM 闭环检测方法研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2018)

[2] Wei Shuangfeng, Pang Fan, Liu Zhenbin, *et al*. Survey of LiDAR-based SLAM algorithm[J]. Application Research of Computers, 2020, 37(2): 327-332(in Chinese)
(危双丰, 庞帆, 刘振彬, 等. 基于激光雷达的同时定位与地图构建方法综述[J]. 计算机应用研究, 2020, 37(2): 327-332)

[3] Steder B, Ruhnke M, Grzonka S, *et al*. Place recognition in 3D scans using a combination of bag of words and point feature based relative pose estimation[C] //Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2011: 1249-1255

[4] Steder B, Rusu R B, Konolige K, *et al*. NARF: 3D range image features for object recognition[OL]. [2022-06-08]. https:// citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=e0701662a370622a1cdbb7c6a83bbede3d0e6c23

[5] Rusu R B, Blodow N, Marton Z C, *et al*. Aligning point cloud views using persistent feature histograms[C] //Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2008: 3384-3391

[6] Salti S, Tombari F, Di Stefano L. SHOT: unique signatures of histograms for surface and texture description[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2014, 125: 251-264

[7] Belongie S, Malik J, Puzicha J. Shape matching and object recognition using shape contexts[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(4): 509-522

[8] Johnson A E, Hebert M. Using spin images for efficient object recognition in cluttered 3D scenes[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(5): 433-449

[9] Rusu R B, Bradski G, Thibaux R, *et al*. Fast 3D recognition and pose using the viewpoint feature histogram[C] //Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2010: 2155-2162

[10] Rusu R B, Blodow N, Beetz M. Fast point feature histograms (FPFH) for 3D registration[C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2009: 3212-3217

[11] Aldoma A, Vincze M, Blodow N, *et al*. CAD-model recognition and 6DOF pose estimation using 3D cues[C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision Workshops. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2011: 585-592

[12] Muhammad N, Lacroix S. Loop closure detection using small-sized signatures from 3D LIDAR data[C] //Proceedings of the IEEE International Symposium on Safety, Security, and Rescue Robotics. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2011: 333-338

[13] Wohlkinger W, Vincze M. Ensemble of shape functions for 3D object classification[C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2011: 2987-2992

[14] He L, Wang X L, Zhang H. M2DP: a novel 3D point cloud descriptor and its application in loop closure detection[C] //Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2016: 231-237

[15] Kim G, Kim A. Scan context: egocentric spatial descriptor for place recognition within 3D point cloud map[C] //Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2018: 4802-4809

[16] Wang H, Wang C, Xie L H. Intensity scan context: coding intensity and geometry relations for loop closure detection[C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2020: 2095-2101

[17] Uy M A, Lee G H. PointNetVLAD: deep point cloud based retrieval for large-scale place recognition[C] //Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2018: 4470-4479

[18] Charles R Q, Hao S, Mo K C, *et al*. PointNet: deep learning on point sets for 3D classification and segmentation[C] //Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2017: 77-85

[19] Arandjelović R, Gronat P, Torii A, *et al*. NetVLAD: CNN architecture for weakly supervised place recognition[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2018, 40(6): 1437-1451

[20] Kim G, Park B, Kim A. 1-day learning, 1-year localization:

long-term LiDAR localization using scan context image[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2019, 4(2): 1948-1955

[21] Sun L, Adolfsson D, Magnusson M, *et al*. Localising faster: efficient and precise Lidar-based robot localisation in large-scale environments[C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2020: 4386-4392

[22] Chen X Y L, Läbe T, Milioto A, *et al*. OverlapNet: loop closing for LiDAR-based SLAM[OL]. [2022-06-08]. https://arxiv.org/abs/2105.11344

[23] Shan T X, Englot B. LeGO-LOAM: lightweight and ground-optimized Lidar odometry and mapping on variable terrain[C] //Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2018: 4758-4765

[24] Cohen T S, Geiger M, Köhler J, *et al*. Spherical CNNs[OL]. [2022-06-08]. https://arxiv.org/abs/1801.10130

[25] Driscoll J R, Healy D M. Computing Fourier transforms and convolutions on the 2-sphere[J]. Advances in Applied Mathematics, 1994, 15(2): 202-250

[26] Kazhdan M, Funkhouser T, Rusinkiewicz S. Rotation invariant spherical harmonic representation of 3D shape descriptors[C] //Proceedings of the Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2003: 156-164

[27] Funkhouser T, Min P, Kazhdan M, *et al*. A search engine for 3D models[J]. ACM Transactions on Graphics, 2003, 22(1): 83-105

[28] Maslen D K, Rockmore D N. Generalized FFTs-a survey of some recent results[C] //Proceedings of the Groups and Computation. Washington: American Mathematical Society, 1997: 183-287

[29] Healy Jr D M, Rockmore D N, Kostelec P J, *et al*. FFTs for the 2-sphere-improvements and variations[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2003, 9(4): 341-385

[30] Wang Xiang. Research on parallel algorithms of the fast algorithm for spherical harmonic expansions[D]. Wuhan: National University of Defense Technology, 2011(in Chinese)
(王翔. 球谐函数展开快速算法及其并行算法研究[D]. 武汉: 国防科学技术大学, 2011)

[31] Dilts G A. Computation of spherical harmonic expansion coefficients via FFT's[J]. Journal of Computational Physics, 1985, 57(3): 439-453

[32] Geiger A, Lenz P, Stiller C, *et al*. Vision meets robotics: the KITTI dataset[J]. The International Journal of Robotics Research, 2013, 32(11): 1231-1237

[33] Carlevaris-Bianco N, Ushani A K, Eustice R M. University of Michigan north campus long-term vision and Lidar dataset[J]. The International Journal of Robotics Research, 2016, 35(9): 1023-1035

[34] Jeong J, Cho Y, Shin Y S, *et al*. Complex urban dataset with multi-level sensors from highly diverse urban environments[J]. The International Journal of Robotics Research, 2019, 38(6): 642-657